MATHEMATISCHE ANNALEN.

BEGRÜNDET 1868 DURCH 47434

ALFRED CLEBSCH UND CARL NEUMANN.

Unter Mitwirkung der Herren

PAUL GORDAN, CARL NEUMANN, MAX NOETHER,
KARL VONDERMÜHLL, HEINRICH WEBER

gegenwärtig herausgegeben

von

Felix Klein
in Göttingen

Walther Dyck
in München

Adolph Mayer
in Leipzig.

45. Band.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1894.

Inhalt des fünfundvierzigsten Bandes.

(In alphabetischer Ordnung.)

Die symmetrischen Functionen und die Relationen zwischen den Elementarfunctionen derselben.

Von

Fr. Junker in Urach.

In der Theorie der symmetrischen Functionen von mehreren Reihen von Veränderlichen

$$x_1 x_2 x_3 \ldots;\quad y_1 y_2 y_3 \ldots;\quad z_1 z_2 z_3 \ldots$$

lässt sich als eine Hauptaufgabe bezeichnen, die allgemeine symmetrische Function

$$(1)\qquad J = \Sigma x_1^{\alpha_1} y_1^{\beta_1} z_1^{\gamma_1} \ldots x_2^{\alpha_2} y_2^{\beta_2} z_2^{\gamma_2} \ldots x_3^{\alpha_3} y_3^{\beta_3} z_3^{\gamma_3} \ldots$$

durch die Elementarfunctionen

$$(2)\quad \begin{cases} \Sigma x_1,\ \Sigma y_1,\ \Sigma z_1,\ \ldots, \\ \Sigma x_1 x_2,\ \Sigma x_1 y_2,\ \Sigma x_1 z_2,\ \ldots;\ \Sigma y_1 y_2,\ \Sigma y_1 z_2,\ \Sigma y_1 t_2,\ \ldots, \\ \Sigma x_1 x_2 x_3,\ \Sigma x_1 x_2 y_3,\ \Sigma x_1 y_2 y_3,\ \ldots;\ \Sigma y_1 y_2 y_3,\ \Sigma y_1 y_2 z_3,\ \ldots \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{cases}$$

darzustellen, eine Aufgabe, die in der letzten Zeit verschiedene Lösungen gefunden hat.

Die genannte symmetrische Function kann in eindeutiger Weise als ganze Function der Elementarfunctionen (2) dargestellt werden, solange die Anzahl r der Elemente jeder Reihe beliebig gross oder unbegrenzt angenommen wird. Ist diese Zahl jedoch eine bestimmte, z. B. r und hat man n verschiedene Reihen

$$x_1 x_2 x_3 \ldots x_r;\ y_1 y_2 y_3 \ldots y_r;\ \ldots;\ w_1 w_2 w_3 \ldots w_r,$$

so ist die Anzahl der Elemente derselben $s = rn$, während die der elementaren Functionen

$$\sigma = \binom{r+n}{r} - 1$$

ist, eine Zahl, welche die erstere um

$$\sigma - s = \binom{r+n}{r} - rn - 1$$

übertrifft. Wir schliessen deshalb, dass letztere nicht unabhängig von einander sein können, sondern durch gewisse *identische Relationen* unter einander zusammenhängen müssen. Wie sich diese Relationen erhalten lassen, habe ich in diesen Annalen Bd. 43 durch Aufstellung zweier Methoden gezeigt. Ich füge denselben in der vorliegenden Arbeit noch einige neue hinzu.

In Folge dieser Identitäten zwischen den Elementarfunctionen wird die Darstellung einer symmetrischen Function nicht mehr eindeutig sein müssen, sondern mit Hilfe derselben in beliebiger Weise verändert werden können. Mit Hilfe der Relationen sind wir im Stande, gewissen symmetrischen Functionen eine bestimmte einfache Gestalt zu geben, die ich als *kanonische Form* derselben bezeichnet habe, in welcher Weise dies geschieht, habe ich in Abschnitt IV auseinandergesetzt.

Diese Frage wurde wohl zuerst von Schläfli*) berührt und mir später von Herrn Brill in erweitertem Sinne gestellt. Dieselbe ist in Abschnitt V eingehend behandelt worden.

Da man sämmtliche symmetrische Elementarfunctionen der obigen Elemente auch erhält, wenn man die r linearen Factoren

$$(3)\qquad \begin{cases} xx_1 + yy_1 + zz_1 + \cdots + ww_1 + 1, \\ xx_2 + yy_2 + zz_2 + \cdots + ww_2 + 1, \\ \quad \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \quad \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ xx_r + yy_r + zz_r + \cdots + ww_r + 1 \end{cases}$$

mit einander multiplicirt und die Anzahl dieser Elementarfunctionen gleich der Anzahl $\binom{r+n}{r} - 1$ der unabhängigen Coefficienten einer Form r^{ten} Grades von n Veränderlichen ist, so liegt die Frage nahe, welche Bedeutung wohl die Relationen zwischen jenen Functionen für die Formentheorie haben möchten. In Abschnitt III habe ich gezeigt, dass dieselben *die Bedingungen repräsentiren, dass eine Form r^{ten} Grades in r lineare Factoren von der Form* (3) *zerfällt.* In diesem Abschnitt habe ich noch einige weitere Identitäten zwischen den Elementarfunctionen der Coordinaten eines Systems von Punkten, bezw. Ebenen aufgestellt und ihre Uebereinstimmung mit den Relationen gezeigt.

Für gewisse Rathschläge hinsichtlich der Ausführung einzelner Theile dieses Paragraphen bin ich Herrn Gordan zum Danke verpflichtet, den ich auch an dieser Stelle ausgesprochen haben möchte. Da die symmetrischen Functionen von mehreren Reihen von Veränderlichen doch noch wenig im Zusammenhang behandelt worden sind, so

*) Denkschriften der Kaiserl. Akad. der Wissenschaften, math. naturwissensch. Classe, Bd. IV. Wien 1852.

habe ich in Abschnitt I Erklärungen und Definitionen vorausgeschickt und die genannten Functionen nach den zwei Seiten hin betrachtet, nach den sie symmetrisch sein können. Dadurch bin ich zur Definition der doppelt-symmetrischen Functionen gelangt, auf welche mich seiner Zeit Herr Gordan aufmerksam gemacht hat.

In Abschnitt II sind die Differentialgleichungen der symmetrischen Functionen weiter ausgeführt worden, die ich in meiner zweiten Abhandlung*) angegeben habe.

Die folgenden Untersuchungen zerfallen in 6 Abschnitte:

I. Erklärungen und Definitionen.
II. Die Differentialgleichungen der symmetrischen Functionen.
III. Die Relationen.
IV. Die Bedeutung der Relationen für die Theorie der Formen.
V. Darstellung der symmetrischen Functionen für eine begrenzte Anzahl von Gruppen.
VI. Die kanonischen Formen der r-förmigen Functionen.

I. Abschnitt.

Definitionen und Erklärungen.

§ 1.

Die Systeme der Elemente.

Wir betrachten in folgendem eine Anzahl — n — Grössen (Elemente)

$$x,\ y,\ z,\ \ldots,\ w,$$

welche durch verschiedene Buchstaben dargestellt und zu einer Gruppe

$$P(xyz\ldots w)$$

zusammengefasst werden mögen.

Hat man mehrere — r — solche Gruppen, so sollen dieselben durch untergesetzte Indices unterschieden werden. Die r Gruppen bilden alsdann das System

$$(1)\qquad \begin{cases} P_1(x_1y_1z_1\ldots w_1), \\ P_2(x_2y_2z_2\ldots w_2), \\ \quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ \quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ P_r(x_ry_rz_r\ldots w_r). \end{cases}$$

Alle Elemente $x_iy_iz_i\ldots w_i$, welche denselben unteren Index i haben, gehören einer und *derselben Gruppe*

*) Math. Annalen Bd. 43, pag. 247.

$$P(x_i\, y_i\, z_i \ldots w_i)$$

an.

Alle Elemente dieses Systems, z. B.

$$x_1\, x_2\, x_3 \ldots x_r,$$

welche durch denselben Buchstaben, z. B. x ausgedrückt sind, gehören *einer Reihe*, z. B.

$$R_1\,(x_1\, x_2\, x_3 \ldots x_r)$$

von *gleichnamigen* oder *gleichwerthigen* Elementen an.

Die Elemente des Systems (1) lassen sich demnach auch zu n Reihen von je r Elementen eines neuen Systems vereinigen:

$$(2) \qquad \begin{cases} R_1\,(x_1\; x_2\; x_3\; \ldots\; x_r), \\ R_2\,(y_1\; y_2\; y_3\; \ldots\; y_r), \\ \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ R_n\,(w_1\, w_2\, w_3 \ldots w_r). \end{cases}$$

§ 2.

Die symmetrischen Functionen der Gruppen und Reihen.

Wie man von den *symmetrischen Functionen der Gruppen des Systems* (1) reden kann, so lässt sich mit demselben Rechte auch von den *symmetrischen Functionen der Reihen des Systems* (2) sprechen.

Wir wollen dieselben in folgender Weise definiren:

1. *Eine symmetrische Function der Gruppen des Systems* (1) *ist eine solche, die sich nicht ändert, wenn man die entsprechenden Elemente irgend zweier Gruppen vertauscht.*

Eine solche ist demnach auch eine homogene Function hinsichtlich der Elemente jeder in ihr enthaltenen Reihe.

Beispielsweise ist die Function

$$\begin{aligned}\Sigma x_1^2 x_2 y_3 = x_1^2 x_2 y_3 + x_1^2 x_3 y_2 + x_2^2 x_1 y_3 + x_2^2 x_3 y_1 \\ + x_3^2 x_1 y_2 + x_3^2 x_2 y_1\end{aligned}$$

eine symmetrische Function der drei Gruppen

$$x_1 y_1;\quad x_2 y_2;\quad x_3 y_3.$$

Um eine solche aus dem Anfangsglied zu erhalten, genügt es, alle möglichen Vertauschungen der unteren Indices von 1 bis r vorzunehmen.

2. *Eine symmetrische Function der Reihen des Systems* (2) *ist eine solche, die sich nicht ändert, wenn man die Elemente irgend zweier Reihen vertauscht.*

Eine solche ist demnach auch eine homogene Function hinsichtlich der Elemente aller in ihr enthaltenen Gruppen.

So ist beispielsweise

$$\Sigma x_1{}^2 x_2 y_3 = x_1{}^2 x_2 y_3 + y_1{}^2 y_2 x_3 + x_1{}^2 x_2 z_3 + z_1{}^2 z_2 x_3 \\ + y_1{}^2 y_2 z_3 + z_1{}^2 z_2 y_3$$

eine symmetrische Function der drei Reihen:

$$x_1 x_2 x_3; \quad y_1 y_2 y_3; \quad z_1 z_2 z_3.$$

Bei einer solchen bleiben somit in jedem Glied die unteren Indices dieselben.

Um diese Function aus dem Anfangsglied zu erhalten, genügt es, alle möglichen Vertauschungen der Elemente

$$x, y, z, \ldots, w$$

vorzunehmen und die unteren Indices beizubehalten.

§ 3.

Die doppeltsymmetrischen Functionen.

Es leuchtet ein, dass es auch symmetrische Functionen giebt, die symmetrisch sind sowohl hinsichtlich der Gruppen P als auch hinsichtlich der Reihen R.

Dieselben heissen *doppeltsymmetrische Functionen.*

Definition. *Eine doppeltsymmetrische Function ist eine solche, die sich nicht ändert, wenn man die Elemente irgend zweier Gruppen oder auch irgend zweier Reihen vertauscht.*

Die folgenden Sätze werden keines Beweises bedürfen:

Eine symmetrische Function der Gruppen des Systems (1), *die sich nicht ändert, wenn man die Elemente zweier Reihen vertauscht, ist eine doppeltsymmetrische Function.*

Eine symmetrische Function der Reihen des Systems (2), *die sich nicht ändert, wenn man die Elemente zweier Gruppen vertauscht, ist eine doppeltsymmetrische Function.*

Eine solche ist demnach homogen sowohl hinsichtlich der Elemente aller Reihen als auch hinsichtlich der Elemente aller Gruppen.

Beispielsweise ist

$$\Sigma x_1 y_2 z_3 = x_1 y_2 z_3 + x_1 y_3 z_2 + x_2 y_3 z_1 + x_2 y_1 z_3 \\ + x_3 y_1 z_2 + x_3 y_2 z_1$$

eine doppeltsymmetrische Function der Gruppen und Reihen des Systems

$$\begin{matrix} x_1 & y_1 & z_1, \\ x_2 & y_2 & z_2, \\ x_3 & y_3 & z_3. \end{matrix}$$

§ 4.

Eintheilung der symmetrischen Functionen. Gewicht.

Da alle symmetrischen Functionen der Reihen (2) in solche von Gruppen übergehen, wenn man an Stelle der Reihen

$$\begin{array}{c} x_1\, x_2 \ldots x_r, \\ y_1\, y_2 \ldots y_r, \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ w_1\, w_2 \ldots w_r \end{array}$$

die Elemente

$$\begin{array}{c} \xi_1\ \eta_1 \ldots \tau_1, \\ \xi_2\ \eta_2 \ldots \tau_2, \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \xi_n\ \eta_n \ldots \tau_n \end{array}$$

eines Systems von n Gruppen von je r Elementen setzt, so genügt es, zunächst nur die symmetrischen Functionen der Gruppen des Systems (1) zu betrachten.

Enthält eine symmetrische Function von r Gruppen in jedem Glied die Elemente von i verschiedenen Gruppen, so heisst sie eine *i-förmige* oder auch *i-theilige* Function dieser Gruppen.

Je nachdem eine solche in jedem Glied nur die Elemente von einer Gruppe, von zwei, von drei, ..., von r Gruppen enthält, unterscheiden wir demnach *einförmige, zweiförmige, dreiförmige, ..., r-förmige* symmetrische Functionen.

So ist z. B. die in § 2 angeführte symmetrische Function $\Sigma x_1^2 x_2 y_3$ eine dreiförmige symmetrische Function.

In der allgemeinen symmetrischen Function der Gruppen

$$J = \Sigma x_1^{\alpha_1} y_1^{\beta_1} \cdots \times x_2^{\alpha_2} y_2^{\beta_2} \cdots \times \cdots \times x_i^{\alpha_i} y_i^{\beta_i} \cdots$$

bezeichne ich die Functionen

$$x^{\alpha_1} y^{\beta_1} \ldots;\ x^{\alpha_2} y^{\beta_2} \ldots;\ \ldots;\ x^{\alpha_i} y^{\beta_i} \ldots$$

als *Theile* oder *Theilfunctionen* und demgemäss die Zahlen

$$q_1 = \alpha_1 + \beta_1 + \cdots,\ q_2 = \alpha_2 + \beta_2 + \cdots,\ \cdots,\ q_i = \alpha_i + \beta_i + \cdots$$

als *Theilgewichte* derselben.

Das *Totalgewicht* der Function J ist dann ausgedrückt durch

$$Q = \sum_1^i q_1.$$

Alle symmetrischen Functionen, welche hinsichtlich der Theilgewichte

$q_1 q_2 q_3 \ldots q_i$ übereinstimmen, bilden eine Gruppe von lauter gleichförmigen symmetrischen Functionen.

Jede derselben kann einreihig, zweireihig, ... und höchstens Q-reihig sein, wo Q das Gewicht dieser Functionen angiebt.

Enthält eine symmetrische Function der Gruppen in jedem Glied die Elemente von k verschiedenen Reihen, so heisst sie eine k-reihige symmetrische Function dieser Gruppen.

Je nachdem eine solche in jedem Glied nur die Elemente von einer Reihe, von zwei, drei, ..., Q Reihen enthält, unterscheiden wir demnach *einreihige*, *zweireihige*, *dreireihige*, ..., *Q-reihige* symmetrische Functionen.

In der symmetrischen Function J der Gruppen sollen die Zahlen

$$p_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_i, \quad p_2 = \beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_i,$$
$$p_3 = \gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_i, \cdots$$

als die *Reihengewichte* von J bezeichnet werden.

Das Totalgewicht derselben ist dann auch angegeben durch

$$Q = \Sigma p_1.$$

Alle symmetrische Functionen, welche hinsichtlich der Reihengewichte

$$p_1 p_2 p_3 \ldots p_\tau$$

übereinstimmen, bilden eine Gruppe von lauter *gleichwerthigen* τ-reihigen Functionen.

Eine symmetrische Function, welche linear ist hinsichtlich der Elemente jeder darin enthaltenen Reihe, heisst eine *primitive Function.* Für eine solche ist demnach

$$p_1 = p_2 = \cdots = p_\tau = 1.$$

§ 5.

Die Elementarfunctionen der Gruppen und Reihen. Die einförmigen Functionen.

Eine symmetrische Function der Gruppen (1) *in* § 1, *welche linear ist hinsichtlich der Elemente jeder Gruppe, ist eine Elementarfunction derselben.*

Für eine solche ist

$$q_1 = q_2 = \cdots = q_i = 1.$$

Wir bezeichnen dieselben mit dem lateinischen Buchstaben a und die darin enthaltenen Reihen

$$x_1 x_2 \ldots x_r;\ y_1 y_2 \ldots y_r;\ \ldots$$

durch untergesetzte Indices 1, 2, ...

Eine solche ist beispielsweise

$$\Sigma x_1 x_2 y_3 = a_{112} = y_1 x_2 x_3 + y_2 x_3 x_1 + y_3 x_1 x_2.$$

Stellen wir dieselbe zusammen, so erhalten wir:

$$\Sigma x_1 = a_1,$$
$$\Sigma x_1 x_2 = a_{11}, \quad \Sigma x_1 y_2 = a_{12}, \quad \Sigma y_1 y_2 = a_{22},$$
$$\Sigma x_1 x_2 x_3 = a_{111}, \quad \Sigma y_1 y_2 y_3 = a_{222}, \quad \Sigma z_1 z_2 z_3 = a_{333},$$
$$\Sigma y_1 y_2 z_3 = a_{223}, \quad \Sigma z_1 z_2 x_3 = a_{331}, \quad \Sigma x_1 x_2 y_3 = a_{112},$$
$$\Sigma y_1 z_2 z_3 = a_{233}, \quad \Sigma z_1 x_2 x_3 = a_{311}, \quad \Sigma x_1 y_2 y_3 = a_{122},$$
$$\Sigma x_1 y_2 z_3 = a_{123}.$$

. . . .

. . . .

Diese Art der Bezeichnung ist sehr vortheilhaft, wenn das Gewicht einer solchen nicht zu gross ist. Ist dies der Fall, so möge eine Elementarfunction auch bezeichnet werden mit

$$a_{p_1, p_2, p_3, \ldots} = \Sigma x_1 x_2 \ldots x_{p_1} y_{p_1+1} y_{p_1+2} \ldots y_{p_1+p_2} z_{p_1+p_2+1} \ldots$$

wo alsdann $p_1 p_2 p_3 \ldots$ die Gewichtszahlen derselben hinsichtlich der Reihen $x, y, z, \ldots$ darstellen.

In einem System von r Gruppen von je n Elementen ist die Anzahl der Elementarfunctionen dieser Gruppen

$$\sigma = \binom{n+r}{r} - 1.$$

Da sich jeder Elementarfunction eine bestimmte einförmige Function, welche mit ihr gleichwerthig ist, eindeutig zuordnen lässt und umgekehrt, so sollen dieselben in ähnlicher Weise wie die ersteren mit dem deutschen Buchstaben $\mathfrak{a}$ und die verschiedenen Reihen, welche eine solche enthält, durch untere Indices bezeichnet werden.

Beispielsweise ist nach dieser Bezeichnung:

$$\Sigma x_1^2 y_1^3 z_1 = \mathfrak{a}_{112223}.$$

Eine symmetrische Function der Reihen des Systems (1), *welche linear ist hinsichtlich der Elemente aller Reihen, ist eine Elementarfunction derselben.*

Wir bezeichnen dieselben in ähnlicher Weise wie die Elementarfunctionen der Gruppen durch den Buchstaben b und die verschiedenen Gruppen, welche eine solche enthält, durch untere Indices 1, 2, 3, ...

Eine solche ist beispielsweise angegeben durch:

$$\Sigma x_1 y_1 z_2 = y_1 z_1 x_2 + z_1 x_1 y_2 + x_1 y_1 z_2.$$

Der leichteren Uebersicht halber mögen hier einige derselben zusammengestellt werden:

$$\begin{array}{ccc}
& \Sigma x_1 = b_1, \dots & \\
\Sigma x_1 y_1 \;\; = b_{11}\,, & \Sigma x_1 y_2 \;\; = b_{12}\,, & \Sigma x_2 y_2 \;\; = b_{22}\,, \dots \\
\Sigma x_1 y_1 z_1 = b_{111}, & \Sigma x_2 y_2 z_2 = b_{222}, & \Sigma x_3 y_3 z_3 = b_{333}, \dots \\
\Sigma x_2 y_2 z_3 = b_{223}, & \Sigma x_3 y_3 z_1 = b_{331}, & \Sigma x_1 y_1 z_2 = b_{112}, \\
\Sigma x_2 y_3 z_3 = b_{233}, & \Sigma x_3 y_1 z_1 = b_{311}, & x_1 y_2 z_2 = b_{122}, \\
& \Sigma x_1 y_2 z_3 = b_{123}, & \\
& \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \\
& \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot &
\end{array}$$

Wie leicht zu sehen, ist die Anzahl dieser Elementarfunctionen ebenfalls

$$\sigma = \binom{r+n}{r} - 1.$$

Es gilt deshalb:

In jedem System von r Gruppen von je n Elementen, bezw. n Reihen von je r Elementen ist die Anzahl der Elementarfunctionen der Gruppen gleich der Anzahl der Elementarfunctionen der Reihen.

Vergleicht man diese beiden Gruppen von Elementarfunctionen mit einander, so zeigt sich, dass im allgemeinen keine Function der Gruppen mit einer solchen der Reihen übereinstimmt. Nur für den Fall eines Systems von r Gruppen von je r Elementen ist eine Elementarfunction beider Gruppen gemeinschaftlich. Es ist die folgende:

$$\Sigma x_1 y_2 z_3 \dots w_r = a_{123\dots r}.$$

Dieselbe ist somit eine doppeltsymmetrische Function.

§ 6.

Die identischen Beziehungen zwischen den Elementarfunctionen der Gruppen und Reihen.

Alle symmetrischen Functionen der Gruppen, bezw. Reihen, welche in einander übergeführt werden können, indem man zwei Reihen, bezw. zwei Gruppen mit einander vertauscht, nenne ich symmetrische Functionen der Gruppen, bezw. der Reihen von *gleichem Charakter.*

Addirt man alle symmetrischen Functionen der Gruppen, bezw. Reihen von gleichem Charakter, so ändert sich eine solche offenbar nicht, wenn man zwei Reihen bezw. zwei Gruppen vertauscht. Eine solche ist somit auch eine symmetrische Function der Reihen bezw. der Gruppen und daher eine doppeltsymmetrische Function.

Satz. *Die Summe der symmetrischen Functionen der Gruppen oder Reihen von gleichem Charakter ist eine doppeltsymmetrische Function.*

Eine solche kann somit einerseits durch die Elementarfunctionen der Gruppen, andererseits durch die der Reihen dargestellt werden. In Folge dessen können wir zwei Reihen von identischen Beziehungen

aufstellen zwischen den symmetrischen Functionen der Gruppen und denen der Reihen. Die einfachsten Identitäten dieser Art ergeben sich selbstverständlich für die Summen der Elementarfunctionen.

Bezeichnen wir diese Summen mit A, bezw. B und durch untere Indices, so sind beispielsweise die Summen ausgedrückt durch:

$$a_{112} + a_{113} + a_{221} + a_{223} + a_{331} + a_{332} + \cdots = A_{112},$$
$$b_{112} + b_{113} + b_{221} + b_{223} + b_{331} + b_{332} + \cdots = B_{112}.$$

Wir erhalten somit die beiden Reihen, die vollständig reciprok sind:

I. Reihe.

$$\left.\begin{array}{l} A_1 = \Sigma b_0 \\ \begin{cases} A_{11} = \Sigma b_1 b_2 - \Sigma b_{12} \\ A_{12} = \Sigma b_{12} \end{cases} \\ \begin{cases} A_{111} = \Sigma b_1 b_2 b_3 - \frac{1}{2}\Sigma b_1 b_{23} + \frac{1}{2}\Sigma b_{123} \\ A_{112} = \frac{1}{2}\Sigma b_1 b_{23} - \frac{3}{2}\Sigma b_{123} \\ A_{123} = \Sigma b_{123} \end{cases} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ A_{123\ldots i} = \Sigma b_{123\ldots i}. \end{array}\right\}$$

II. Reihe.

$$\left.\begin{array}{l} B_1 = \Sigma a_0 \\ \begin{cases} B_{11} = \Sigma a_1 a_2 - a_{12} \\ B_{12} = \Sigma a_{12} \end{cases} \\ \begin{cases} B_{111} = \Sigma a_1 a_2 a_3 - \frac{1}{2}\Sigma a_1 a_{23} + \frac{1}{2}\Sigma a_{123} \\ B_{112} = \frac{1}{2}\Sigma a_1 a_{23} - \frac{3}{2}\Sigma a_{123} \\ B_{123} = \Sigma a_{123} \end{cases} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ B_{123\ldots i} = \Sigma a_{123\ldots i}. \end{array}\right\}$$

§ 7.

Die Anzahl der Glieder von Elementarfunctionen.

In diesem Paragraphen sollen einige Resultate über die Anzahl der Glieder von symmetrischen Elementarfunctionen ohne Beweis zusammengestellt werden, um dieselben im folgenden benützen zu können.

1. *Die i-förmige primitive Elementarfunction*

$$a_{123\dots i} = \Sigma x_1 y_2 z_3 \dots w_i$$

besitzt:

$$(1) \qquad \tau = (r-i+1)(r-i+2)\dots(r-1)r = \frac{r!}{(r-i)!}$$

Glieder.

Leitet man dieselbe partiell nach den Elementen $x_1 x_2 \dots x_r$ ab und bildet die Summe $\sum_1^r \frac{\partial a}{\partial x_1}$, so ist letztere offenbar eine $(i-1)$-förmige primitive Elementarfunction und angegeben durch:

$$(2) \qquad \sum_1^r \frac{\partial a_{123\dots i}}{\partial x_1} = (r-i+1) a_{234\dots i}.$$

Setzt man an Stelle der Elemente der verschwundenen Reihe $x_1 x_2 \dots x_r$ die Elemente einer andern schon in der Function enthaltenen Reihe, z. B. $y_1 y_2 \dots y_r$, so ist

$$(3) \qquad \sum_1^r \frac{\partial a_{123\dots i}}{\partial x_1} y_1 = 2 a_{22345\dots i}$$

und entsteht eine i-förmige Elementarfunction $a_{22345\dots i}$, welche nicht mehr primitiv ist.

Fallen in einer primitiven Elementarfunction $k, k', k'', \dots$ Reihen zusammen, so geht dieselbe in eine Elementarfunction von $k!\,k'!\,k''!\dots$ mal weniger Glieder über.

2. Eine beliebige Elementarfunction $a_{p_1 p_2 p_3 \dots p_i}$ von den Reihengewichten

$$p_1 p_3 p_3 \dots p_i$$

hat eine Anzahl τ von Gliedern, welche ausgedrückt ist durch:

$$(4) \qquad \tau = \frac{\nu!}{p_1!\, p_2! \dots p_i!} \cdot \frac{1}{(r - \Sigma p_1)!},$$

wo

$$\Sigma p_1 = p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_i$$

das Gewicht der Elementarfunction bezeichnet.

Wenden wir auf dieselbe die Operationen

$$\sum \frac{\partial a}{\partial x_1} \quad \text{und} \quad \sum \frac{\partial a}{\partial x_1} y_1$$

an, so erhalten wir:

$$(5) \qquad \sum_1^r \frac{\partial a_{p_1 p_2 p_3 \dots p_i}}{\partial x_1} = (r - \Sigma p_1 + 1) a_{p_1 - 1 p_2 p_3 \dots p_i},$$

$$(6) \qquad \sum_1^r \frac{\partial a_{p_1 p_2 p_3 \dots p_i}}{\partial x_1} y_1 = (1 + p_2) a_{p_1 - 1 p_2 + 1 p_3 p_4 \dots p_i}.$$

Fallen in derselben zwei Reihen, z. B. x und y zusammen, so geht dieselbe in eine Elementarfunction von $\frac{(p_1+p_2)!}{p_1!\,p_2!}$ *mal weniger Glieder über.*

II. Abschnitt.

Die Differentialgleichungen der symmetrischen Functionen.

§ 8.

Die Differentialgleichungen $\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z, \ldots$ der mehrförmigen symmetrischen Functionen, welche durch Elementarfunctionen dargestellt sind.

Ist

$$J = \Sigma x_1^{\alpha_1} y_1^{\beta_1} \ldots \times x_2^{\alpha_2} y_2^{\beta_2} \cdots \times \cdots \times x_i^{\alpha_i} y_i^{\beta_i} \cdots = \varphi(a)$$

eine symmetrische Function ausgedrückt durch Elementarfunctionen $\varphi(a)$, so wird dieselbe auch noch eine Identität bleiben, wenn man die Elemente einer Reihe, z. B.

$$x_1\, x_2\, x_3 \ldots x_r$$

um dieselbe Grösse λ wachsen oder abnehmen lässt und dabei die übrigen Reihen $y_1\, y_2\, y_3 \ldots y_r$; $z_1\, z_2\, z_3 \ldots z_r$; ... (als constant betrachtet) unverändert lässt.

Die Function J geht mit Ueberführung von

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_r$$

in

$$x_1 + \lambda,\ x_2 + \lambda,\ x_3 + \lambda, \ldots, x_r + \lambda$$

über in

$$J + \lambda \sum \frac{\partial J}{\partial x_1} + \frac{\lambda^2}{2!} \sum \frac{\partial^2 J}{\partial x_1^2} + \cdots = \varphi(a) + \lambda \sum \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \frac{\lambda^2}{2!} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + \cdots$$

Diese Gleichung kann nur bestehen, wenn die Coefficienten von $\lambda, \lambda^2, \ldots$ beiderseits einander gleich sind, d. h. wenn

$$\sum \frac{\partial J}{\partial x_1} = \sum \frac{\partial \varphi}{\partial x_1},$$
$$\sum \frac{\partial^2 J}{\partial x_1^2} = \sum \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2}$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

ist.

Durch diese Gleichungen sind offenbar wieder symmetrische Functionen ausgedrückt. Von denselben bieten die Coefficienten von $\lambda^2, \lambda^3, \ldots$ nichts Neues dar, da sie nichts anderes als wiederholte Anwendungen der Operation

$$\sum \frac{\partial J}{\partial x_1} = \sum \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}$$

auf die Function J repräsentiren.

Nun ist $\varphi(a)$ eine Function der Elementarfunctionen a; es ist deshalb

$$\sum \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = \sum \frac{\partial \varphi}{\partial a} \sum \frac{\partial a}{\partial x_1}.$$

Ist nun a eine symmetrische Elementarfunction von den Reihengewichten

$$p_1 \, p_2 \, p_3 \ldots p_i,$$

also vom Gewicht

$$p = \Sigma p_1 = p_1 + p_2 + \cdots + p_i,$$

so ist $\sum \frac{\partial a}{\partial x_1}$ ebenfalls eine Elementarfunction von den Reihengewichten

$$p_1 - 1, \, p_2, \, p_3, \ldots, p_i$$

und nach § 7 angegeben durch

$$\sum_1^r \frac{\partial a_{p_1 p_2 \cdots p_i}}{\partial x_1} = (r - p + 1) \, a_{p_1 - 1 p_2 p_3 \cdots p_i},$$

wo p das Gewicht der Elementarfunction $a_{p_1 p_2 \cdots p_i}$ bezeichnet.

Wir erhalten somit als Differentialgleichung

$$\Delta_x = \sum_1^r \frac{\partial J}{\partial x_1} = \sum \frac{\partial \varphi}{\partial a_{p_1 p_2 \cdots p_i}} (r - p + 1) a_{p_1 - 1 p_2 p_3 \cdots p_i}. \tag{1}$$

Enthält die Function J ausser der Reihe

$$x_1 \, x_2 \ldots x_r$$

noch die Reihen

$$y_1 \, y_2 \ldots y_r, \; z_1 \, z_2 \ldots z_r, \ldots,$$

so gelten offenbar noch die weiteren Differentialgleichungen

$$(2) \quad \begin{cases} \Delta_y = \sum_1^r \frac{\partial J}{\partial y_1} = \sum \frac{\partial \varphi}{\partial a_{p_1 p_2 p_3 \cdots p_i}} (r - p + 1) a_{p_1 p_2 - 1 p_3 \cdots p_i}, \\ \Delta_z = \sum_1^r \frac{\partial J}{\partial z_1} = \sum \frac{\partial \varphi}{\partial a_{p_1 p_2 p_3 \cdots p_i}} (r - p + 1) \, a_{p_1 p_2 p_3 - 1 \cdots p_i} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{cases}$$

Dies sind dieselben Differentialgleichungen die ich in den Math. Annalen Bd. 43, pag. 247 nicht weiter ausgeführt habe.

Setzen wir an Stelle der allgemeinen Elementarfunction $a_{p_1 p_2 p_3 \cdots p_i}$ der Reihe nach die Elementarfunctionen vom Gewicht 1, 2, 3, . . ., so erhalten wir die folgenden Differentialgleichungen, denen jede symmetrische Function genügen muss:

$$
(3)\left\{\begin{aligned}
&\sum\frac{\partial J}{\partial x_1}=r\frac{\partial\varphi}{\partial a_1}+(r-1)\left\{\frac{\partial\varphi}{\partial a_{11}}a_1+\frac{\partial\varphi}{\partial a_{12}}a_2+\frac{\partial\varphi}{\partial a_{13}}a_3+\cdots\right\}\\
&\qquad+(r-2)\left\{\frac{\partial\varphi}{\partial a_{111}}a_{11}+\frac{\partial\varphi}{\partial a_{112}}a_{12}+\frac{\partial\varphi}{\partial a_{113}}a_{13}+\cdots\right\}+\cdots,\\
&\sum\frac{\partial J}{\partial y_1}=r\frac{\partial\varphi}{\partial a_2}+(r-1)\left\{\frac{\partial\varphi}{\partial a_{22}}a_2+\frac{\partial\varphi}{\partial a_{21}}a_1+\frac{\partial\varphi}{\partial a_{23}}a_3+\cdots\right\}\\
&\qquad+(r-2)\left\{\frac{\partial\varphi}{\partial a_{222}}a_{22}+\frac{\partial\varphi}{\partial a_{221}}a_{12}+\frac{\partial\varphi}{\partial a_{223}}a_{23}+\cdots\right\}+\cdots\\
&\qquad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot
\end{aligned}\right.
$$

§ 9.

Anwendung der Differentialgleichungen Δ_x zur Ermittlung von symmetrischen Functionen.

Ist $J = \varphi(a)$ eine gewisse i-förmige symmetrische Function vom Gewicht Q ausgedrückt durch Elementarfunctionen $\varphi(a)$, so ist offenbar auch

$$\sum\frac{\partial J}{\partial x_1}=\sum\frac{\partial\varphi}{\partial a}\sum\frac{\partial a}{\partial x_1}$$

eine i-förmige Function oder auch eine Summe von solchen ebenfalls ausgedrückt durch elementare Functionen. Ist die Darstellung dieser $\psi(a)$ durch Elementarfunctionen bekannt, so ist

$$\psi(a)\equiv\sum\frac{\partial\varphi}{\partial a}\sum\frac{\partial a}{\partial x_1}$$

eine Identität.

Ist jedoch die Darstellung $\varphi(a)$ der Function J durch elementare Functionen nicht bekannt, so kann man wenigstens den litteralen Theil derselben anschreiben, indem man alle möglichen mit J gleichwerthigen Producte

$$A_1,\ A_2,\ A_3,\ldots,A_\sigma$$

von Elementarfunctionen bildet, und dieselben mit den Factoren

$$\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3,\ldots,\lambda_\sigma$$

multiplicirt und deren Summe gleich der Function J setzt:

$$J=\lambda_1A_1+\lambda_2A_2+\cdots+\lambda_\sigma A_\sigma.$$

Wendet man hierauf die Operation an, so folgt

$$\sum\frac{\partial J}{\partial x_1}=\lambda_1\sum\frac{\partial A_1}{\partial a}\sum\frac{\partial a}{\partial x_1}+\lambda_2\sum\frac{\partial A_2}{\partial a}\sum\frac{\partial a}{\partial x_1}+\cdots.$$

In dieser Identität stellt nun offenbar $\sum\frac{\partial J}{\partial x_1}$ eine symmetrische Function oder eine Summe von solchen vom Gewicht $Q-1$ dar. Ist die Darstellung $\psi(a)$ dieser Functionen durch elementare bekannt, so können wir setzen:

$$\psi(a)\equiv\lambda_1\sum\frac{\partial A_1}{\partial a}\sum\frac{\partial a}{\partial x_1}+\lambda_2\sum\frac{\partial A_2}{\partial a}\sum\frac{\partial a}{\partial x_1}+\cdots$$

und erhalten hieraus durch Vergleichen der Coefficienten von gleichen Producten von Elementarfunctionen eine Anzahl von linearen Gleichungen zur Ermittlung der Zahlen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\sigma$. Genügt hierzu die Operation $\sum\frac{\partial J}{\partial x_1}$ allein nicht, so kann ebenso $\sum\frac{\partial J}{\partial y_1}, \sum\frac{\partial J}{\partial z_1}, \ldots$ angewendet werden.

Nach dieser Methode können wir, mit den symmetrischen Functionen vom Gewicht 2 beginnend, zu sämmtlichen symmetrischen Functionen von beliebig hohem Gewicht gelangen.

Man erhält beispielsweise

$$\Sigma x_1^2 = \lambda_1 a_1^2 + \lambda_2 a_{11},$$

$$\sum\frac{\partial J}{\partial x_1} = 2\Sigma x_1 = 2a_1 = 2\lambda_1 r a_1 + \lambda_2(r-1)a_1.$$

Es ist somit

$$2 = 2\lambda_1 r + \lambda_2(r-1)$$

wo r die Anzahl der Gruppen bezeichnet.

Setzt man

$$r = 1, \quad \text{so folgt} \quad \lambda_1 = 1,$$
$$r = 0, \quad \text{od. } 2, \ldots \quad \lambda_2 = -2.$$

Es ist somit

$$\Sigma x_1^2 = a_1^2 - 2a_{11}.$$

Für die Function

$$\Sigma x_1^3 = \lambda_1 a_1^3 + \lambda_2 a_1 a_{11} + \lambda_3 a_{111}$$

erhalten wir ebenso die Bedingungsgleichungen:

$$3 = 3\lambda_1 r + \lambda_2(r-1),$$
$$-6 = \lambda_2 r + k_3(r-2),$$

woraus für $r = 0$ und $r = 1$ sich unmittelbar die Werthe

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -3, \quad \lambda_3 = 3$$

ergeben. Es ist somit

$$\Sigma x_1^3 = a_1^3 - 3a_1 a_{11} + 3a_{111}.$$

Setzt man

$$\Sigma x_1^2 y_2 = \lambda_1 a_1^2 a_2 + \lambda_2 a_2 a_{11} + \lambda_3 a_1 a_{12} + \lambda_4 a_{112},$$

so folgen die Bedingungsgleichungen für eine beliebige Gruppenzahl r:

a) für $\sum\frac{\partial J}{\partial x_1}$,

1. $2\lambda_1 r + (\lambda_2 + \lambda_3)(r-1) = 0,$
2. $\lambda_3 r + \lambda_4(r-2) \quad = 2.$

b) für $\sum\frac{\partial J}{\partial y_1}$,

3. $\lambda_1 r + \lambda_3(r-1) = \quad r-1,$
4. $\lambda_4(r-2) + \lambda_2 r = -2(r-1),$

aus denen man unmittelbar erhält

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = -1, \quad \lambda_3 = 1, \quad \lambda_4 = -1.$$

Die Function ist somit ausgedrückt durch:

$$\Sigma x_1^2 y_2 = a_1 a_{12} - a_2 a_{11} - a_{112}.$$

§ 10.

Die Differentialgleichungen Δ_x, Δ_y, ... der mehrförmigen Functionen, welche durch einförmige Functionen ausgedrückt sind.

Ist die Function

$$J = f(\mathfrak{a})$$

durch einförmige Functionen $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_{11}, \mathfrak{a}_{12}, \mathfrak{a}_{111}, \mathfrak{a}_{112}, \ldots$ ausgedrückt, so gelten offenbar auch die Gleichungen:

$$(1) \quad \begin{cases} \sum \frac{\partial J}{\partial x_1} = \sum \frac{\partial f}{\partial x_1} = \sum \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{a}} \sum \frac{\partial \mathfrak{a}}{\partial x_1}, \\ \sum \frac{\partial J}{\partial y_1} = \sum \frac{\partial f}{\partial y_1} = \sum \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{a}} \sum \frac{\partial \mathfrak{a}}{\partial y_1}. \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \end{cases}$$

Nehmen wir eine allgemeine einförmige Function in der Form an

$$\Sigma x_1^{p_1} y_1^{p_2} z_1^{p_3} \cdots = \mathfrak{a}_{p_1 p_2 p_3 \cdots},$$

so ist:

$$\sum \frac{\partial \mathfrak{a}_{p_1 p_2 p_3 \cdots}}{\partial x_1} = p_1 \mathfrak{a}_{p_1 - 1 p_2 p_3 \cdots}.$$

Die Differentialgleichungen (1) gehen damit über in

$$(2) \quad \begin{cases} \sum \frac{\partial J}{\partial x_1} = \sum p_1 \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{a}_{p_1 p_2 p_3 \cdots}} \mathfrak{a}_{p_1 - 1 p_2 p_3 \cdots}, \\ \sum \frac{\partial J}{\partial y_1} = \sum p_2 \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{a}_{p_1 p_2 p_3 \cdots}} \mathfrak{a}_{p_1 p_2 - 1 p_3 \cdots}. \end{cases}$$

Bilden wir die Summe über die Functionen vom Gewicht 1, 2, 3, ..., so erhalten wir die ausgeführten Differentialgleichungen der einförmigen Functionen:

$$(3) \quad \begin{cases} \Delta_x = \sum \frac{\partial J}{\partial x_1} = r \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{a}_1} + \left\{ \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{a}_{12}} \mathfrak{a}_2 + \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{a}_{13}} \mathfrak{a}_3 + \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{a}_{123}} \mathfrak{a}_{23} + \cdots \right\} \\ \quad + 2 \left\{ \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{a}_{11}} \mathfrak{a}_1 + \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{a}_{112}} \mathfrak{a}_{12} + \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{a}_{1123}} \mathfrak{a}_{123} + \cdots \right\} \\ \quad + 3 \left\{ \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{a}_{111}} \mathfrak{a}_{11} + \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{a}_{1112}} \mathfrak{a}_{112} + \cdots \right\} + \cdots, \end{cases}$$

$$(3)\quad \begin{cases} \Delta_y = \sum \frac{\partial J}{\partial y_1} = r\,\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{a}_2} + \left\{\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{a}_{21}}\,\mathfrak{a}_1 + \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{a}_{211}}\,\mathfrak{a}_{11} + \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{a}_{213}}\,\mathfrak{a}_{13} + \cdots\right\} \\ \qquad + 2\left\{\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{a}_{22}}\,\mathfrak{a}_2 + \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{a}_{221}}\,\mathfrak{a}_{21} + \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{a}_{223}}\,\mathfrak{a}_{23} + \cdots\right\} \\ \qquad + 3\left\{\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{a}_{222}}\,\mathfrak{a}_{22} + \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{a}_{222134}}\,\mathfrak{a}_{22134} + \cdots\right\} + \cdots. \end{cases}$$

Es leuchtet ein, dass sich diese Differentialgleichungen in derselben Weise zur Darstellung von mehrförmigen Functionen (durch einförmige) verwenden lassen wie die im vorigen Paragraph angegebenen.

§ 11.

Die Differentialoperationen Δ_y^x, Δ_x^z, ... der mehrförmigen symmetrischen Functionen.

Ist

$$(1)\qquad J = \varphi(a) = f(\mathfrak{a})$$

eine i-förmige symmetrische Function von beliebig vielen Reihen ausgedrückt einerseits durch Elementarfunctionen $\varphi(a)$, andererseits durch einförmige Functionen $f(\mathfrak{a})$ und ist

$$x_1 x_2 x_3 \ldots x_r$$

eine in J enthaltene Reihe, so wird dieselbe auch noch eine Identität bleiben, wenn man die Elemente dieser Reihe um die Grössen

$$\lambda\psi_1,\ \lambda\psi_2,\ \lambda\psi_3,\ \ldots,\ \lambda\psi_r$$

wachsen oder abnehmen lässt, wo ψ von der Form sein mag

$$\psi = x^\alpha y^\beta z^\gamma \ldots.$$

Führt man diese Substitution aus und entwickelt man nach Potenzen von $\lambda\psi$, so geht die Gleichung (1) über in die folgende:

$$J + \lambda \sum \frac{\partial J}{\partial x_1}\psi_1 + \frac{1}{2}\lambda^2 \sum \frac{\partial^2 J}{\partial x_1^2}\psi_1^2 + \cdots = \varphi + \lambda \sum \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\psi_1 + \cdots,$$

welche nur bestehen kann, wenn die Coefficienten von $\lambda, \lambda^2, \ldots$ beiderseits einander gleich sind. Es müssen deshalb nothwendig die Bedingungen erfüllt sein:

$$(2)\qquad \begin{cases} \sum \frac{\partial J}{\partial x_1}\psi_1 = \sum \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\psi_1, \\ \sum \frac{\partial^2 J}{\partial x_1^2}\psi_1^2 = \sum \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2}\psi_1^2. \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Von diesen Bedingungen genügt die erste, da die folgenden nur wiederholte Anwendungen derselben sind.

Da φ eine Function der Elementarfunctionen ist, so erhalten wir

$$\sum \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \psi_1 = \sum \frac{\partial \varphi}{\partial a} \sum \frac{\partial a}{\partial x_1} \psi_1.$$

Wir erhalten somit:

$$\sum \frac{\partial J}{\partial x_1} \psi_1 = \sum \frac{\partial \varphi}{\partial a} \sum \frac{\partial a}{\partial x_1} \psi_1. \tag{3}$$

Nun ist

$$\sum \frac{\partial a_1}{\partial x_1} \psi_1 = \sum \psi_1, \qquad \sum \frac{\partial a_{11}}{\partial x_1} \psi_1 = \sum \psi_1 x_2,$$

$$\sum \frac{\partial a_{111}}{\partial x_1} \psi_1 = \sum \psi_1 x_2 x_3, \qquad \sum \frac{\partial a_{12}}{\partial x_1} \psi_1 = \sum \psi_1 y_2, \quad \text{etc.};$$

daher kann die Gleichung (3) auch geschrieben werden:

$$\begin{aligned} \Delta_x^\psi = {} & \frac{\partial \varphi}{\partial a_1} \sum \psi_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial a_{11}} \sum \psi_1 x_2 + \frac{\partial \varphi}{\partial a_{12}} \sum \psi_1 y_2 + \frac{\partial \varphi}{\partial a_{13}} \sum \psi_1 z_2 + \cdots \\ & + \frac{\partial \varphi}{\partial a_{111}} \sum \psi_1 x_2 x_3 + \frac{\partial \varphi}{\partial a_{112}} \sum \psi_1 x_2 y_3 + \cdots. \end{aligned} \tag{4}$$

Die interessantesten und wichtigsten Differentialoperationen erhalten wir hieraus für diejenigen Functionen ψ, deren Gewicht $G = 1$ ist.

Setzen wir beispielsweise $\psi = y$, so ist (vergl. § 7):

$$\Sigma \psi_1 = a_2, \quad \Sigma \psi_1 x_2 = a_{12}, \quad \Sigma \psi_1 y_2 = 2 b_{22}, \quad \Sigma \psi_1 y_2 y_3 = 3 b_{222},$$
$$\Sigma \psi_1 y_2 y_3 y_4 = 4 b_{2222}, \quad \text{etc.}$$

Wir erhalten an Stelle der Operation (4) die folgende:

$$\begin{aligned} \Delta_x^y = \sum \frac{\partial J}{\partial x_1} y_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial a_1} a_2 & + \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial a_{11}} a_{12} + \frac{\partial \varphi}{\partial a_{111}} a_{112} + \cdots \right\} \\ & + 2 \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial a_{12}} a_{22} + \frac{\partial \varphi}{\partial a_{112}} a_{122} + \frac{\partial \varphi}{\partial a_{123}} a_{223} + \cdots \right\} \\ & + 3 \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial a_{122}} a_{222} + \frac{\partial \varphi}{\partial a_{1122}} a_{1222} + \frac{\partial \varphi}{\partial a_{1223}} a_{2223} + \cdots \right\} + \cdots. \end{aligned} \tag{5}$$

Vertauscht man hierin die Indices 1, 2, 3, ..., so ergeben sich unmittelbar die Operationen:

$$\Delta_y^x, \ \Delta_x^s, \ \Delta_s^x, \ \Delta_x^t, \ \Delta_t^x, \ \ldots .$$

Ist $a_{p_1 p_2 p_3 \ldots}$ eine Elementarfunction von den Reihengewichten $p_1, p_2, p_3, \ldots$, so ist

$$\sum \frac{\partial a}{\partial x_1} y_1 = (1 + p_2)\, a_{p_1 - 1\, p_2 + 1\, p_3\, p_4 \ldots}.$$

Es lässt sich daher die Operation (5) auch schreiben:

$$\Delta_x^y = \sum \frac{\partial J}{\partial x_1} y_1 = \sum (1 + p_2) \frac{\partial \varphi}{\partial a_{p_1 p_2 p_3 \ldots}} a_{p_1 - 1\, p_2 + 1\, p_3 \ldots}. \tag{6}$$

Ist die Function

$$J = f(\mathfrak{a})$$

durch einförmige Functionen $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_{11}, \mathfrak{a}_{12}, \mathfrak{a}_{111}, \ldots$ ausgedrückt, so gilt offenbar auch die Bedingung:

$$(7) \qquad \sum \frac{\partial J}{\partial x_1} \psi_1 = \sum \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{a}} \frac{\partial \mathfrak{a}}{\partial x_1} \psi_1.$$

Ist die einförmige Function $\mathfrak{a}$ von der Form:

$$\mathfrak{a}_{p_1 p_2 p_3 \ldots} = \Sigma x_1^{p_1} y_1^{p_2} z_1^{p_3} \ldots,$$

so ist

$$\sum \frac{\partial \mathfrak{a}}{\partial x_1} = p_1 \sum \psi_1 x_1^{p_1 - 1} y_1^{p_2} z_1^{p_3} \ldots$$

ebenfalls eine einförmige Function. Die Gleichung (7) kann somit auch geschrieben werden:

$$(8) \quad \Delta_x^\psi = \sum \frac{\partial J}{\partial x_1} \psi_1 = \sum p_1 \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{a}_{p_1 p_2 p_3 \ldots}} \sum \psi_1 x_1^{p_1 - 1} y_1^{p_2} z_1^{p_3} \ldots .$$

Ist beispielsweise $\psi = y$, so geht diese Operation über in

$$(9) \qquad \Delta_x^y = \sum \frac{\partial J}{\partial x_1} y_1 = \sum p_1 \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{a}_{p_1 p_2 p_3 \ldots}} \mathfrak{a}_{p_1 - 1\, p_2 + 1\, p_3 \ldots},$$

oder, wenn man sie für die einzelnen einförmigen Functionen ausführt:

$$(10) \quad \begin{aligned} \Delta_x^y = \sum \frac{\partial J}{\partial x_1} y_1 = \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{a}_1} \mathfrak{a}_2 + \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{a}_{12}} \mathfrak{a}_{22} + \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{a}_{123}} \mathfrak{a}_{223} + \cdots \\ + 2 \left\{ \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{a}_{11}} \mathfrak{a}_{12} + \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{a}_{112}} \mathfrak{a}_{122} + \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{a}_{113}} \mathfrak{a}_{123} + \cdots \right\} \\ + 3 \left\{ \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{a}_{111}} \mathfrak{a}_{112} + \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{a}_{1112}} \mathfrak{a}_{1122} + \cdots \right\} + \cdots . \end{aligned}$$

Enthält die Function J die Elemente der Reihen $x_1 x_2 x_3 \ldots$ nur in einer einzigen Theilfunction, so gestatten uns die Operationen (6) und (9) beliebige neue Reihen auf Kosten einer darin enthaltenen einzuführen, oder auch das Gewicht einer Reihe auf Kosten einer andern zu vermindern und zwar in der Weise, dass die resultirenden Functionen unmittelbar durch Elementarfunctionen, bzw. einförmige Functionen ausgedrückt sind.

Ausgehend von der Function

$$\begin{aligned} \sum x_1^2 y_2^2 = -\tfrac{4}{3} a_1^2 a_{22} + \tfrac{4}{3} a_1 a_2 a_{12} - \tfrac{4}{3} a_2^2 a_{11} - \tfrac{1}{3} a_{12}^2 + \tfrac{10}{3} a_{11} a_{22} \\ - \tfrac{2}{3} a_1 a_{122} - \tfrac{2}{3} a_2 a_{112} + \tfrac{2}{3} a_{1122} \end{aligned}$$

erhalten wir unmittelbar mit Hilfe der Operation (6) alle übrigen zweiförmigen Functionen:

2*

$$\sum x_1^2 y_2 z_2 = -\frac{2}{3} a_1^2 a_{23} + \frac{2}{3} a_1 a_2 a_{13} + \frac{2}{3} a_1 a_3 a_{12} - \frac{4}{3} a_2 a_3 a_{11}$$
$$- \frac{1}{3} a_{12} a_{13} + \frac{5}{3} a_{11} a_{23} - \frac{1}{3} a_1 a_{123} - \frac{1}{3} a_2 a_{113}$$
$$- \frac{1}{3} a_3 a_{112} + \frac{1}{3} a_{1123}.$$

$$x_1 z_1 y_2 t_2 = \frac{1}{6}\{2 a_1 a_2 a_{34} + 2 a_1 a_4 a_{23} + 2 a_2 a_3 a_{14} + 2 a_3 a_4 a_{12}$$
$$- 4 a_1 a_3 a_{24} - 4 a_2 a_4 a_{13} - a_{12} a_{34} - a_{14} a_{23} + 5 a_{13} a_{24}$$
$$- a_1 a_{234} - a_2 a_{134} - a_3 a_{124} - a_4 a_{123} + a_{1234}\}.$$

III. Abschnitt.

Die Relationen.

§ 12.

I. Methode.

Hat man r Gruppen

$$\begin{array}{ll} P_1 & x_1\, y_1\, z_1 \ldots, \\ P_2 & x_2\, y_2\, z_2 \ldots, \\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ P_r & x_r\, y_r\, z_r \ldots \end{array}$$

von je n Elementen, so können wir mit Hülfe einer neuen Gruppe

$$P \quad x\, y\, z \ldots$$

die Differenzen bilden:

$$(1) \qquad \begin{array}{lllll} D_1 & x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 & \ldots, \\ D_2 & x - x_2 & y - y_2 & z - z_2 & \ldots, \\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot \\ D_r & x - x_r & y - y_r & z - z_r & \ldots \end{array}$$

und dieselben als Elemente eines neuen Systems betrachten.

Eine symmetrische Function dieser Gruppen ändert sich nun nicht, wenn man irgend zwei der Gruppen P_i und P_k untereinander vertauscht.

Jede symmetrische Function der Gruppen D ist deshalb auch eine solche für die Gruppen P.

Daher werden sich die in den Functionen der Gruppen D auftretenden Elemente der Gruppen P durch die Elementarfunctionen der letzteren ausdrücken lassen müssen.

Ist nun beispielsweise

$$J = \Sigma(x - x_1)^{\alpha_1}(y - y_1)^{\beta_1} \cdots \times (x - x_2)^{\alpha_2}(y - y_2)^{\beta_2} \cdots \times \cdots$$
$$\times (x - x_r)^{\alpha_r}(y - y_r)^{\beta_r} \cdots$$

eine r-förmige symmetrische Function der Differenzen D, so verschwindet dieselbe identisch, wenn die Gruppe $P(xyz\ldots)$ mit irgend einer der Gruppen $P_1, P_2, \ldots, P_r$ coincidirt.

Entwickelt man nach Potenzen und Producten von $xyz\ldots$ und drückt deren Coefficienten durch die Elementarfunctionen der Gruppen P aus, so wird J auf die Form gebracht werden können:

$$J = \Sigma x^{\Sigma\alpha_1} y^{\Sigma\beta_1} z^{\Sigma\gamma_1} \cdots + A_1 \Sigma^{\Sigma\alpha_1 - 1} y^{\Sigma\beta_1} z^{\Sigma\gamma_1} \cdots + A_2 \Sigma x^{\Sigma\alpha_1} y^{\Sigma\beta_1 - 1} z^{\Sigma\gamma_1} \cdots$$
$$+ \cdots + A_\sigma$$
$$= \varphi(xyz\ldots;\, a),$$

welche homogen ist hinsichtlich der Reihen

$$\begin{matrix} x & x_1 & x_2 & \ldots & x_r \\ y & y_1 & y_2 & \ldots & y_r \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \end{matrix}$$

und in welcher $A_1, A_2, \ldots, A_\sigma$ die genannten symmetrischen Functionen der Gruppen P bezeichnen.

Da nun die Function J identisch verschwindet, wenn eine Gruppe P_i mit P zusammenfällt, so gelten die Gleichungen:

$$\begin{aligned} &\varphi(x_1\, y_1\, z_1 \ldots;\, a) \equiv 0, \\ &\varphi(x_2\, y_2\, z_2 \ldots;\, a) \equiv 0, \\ &\quad \ldots\ldots\ldots \\ &\quad \ldots\ldots\ldots \\ &\varphi(x_r\, y_r\, z_r \ldots;\, a) \equiv 0, \end{aligned}$$

welche addirt eine symmetrische Function der Gruppen P vom Gewicht

$$Q = \Sigma\alpha + \Sigma\beta + \cdots$$

geben

$$\Sigma\varphi(x_1\, y_1\, z_1 \ldots;\, a) \equiv 0, \tag{2}$$

welche identisch erfüllt ist.

In derselben treten neben den Elementarfunctionen a noch einförmige Functionen vom Gewicht $Q, Q-1, Q-2, \ldots, 3, 2, 1$ auf.

Drückt man letztere durch Elementarfunctionen oder diese durch einförmige Functionen aus, so geht die Function (2) offenbar in eine *Identität*, d. h. *in eine Relation zwischen den Elementarfunctionen*, *bezw. einförmigen Functionen der Gruppen P über.*

Nun sind die niedrigsten Relationen vom Gewicht $r + 2$; wir erhalten dieselben somit beispielsweise für das ternäre Gebiet aus den r-förmigen Functionen der Gruppen

$$P_i \quad x - x_i \quad y - y_i$$
$$(i = 1, 2, \ldots r)$$
von den Theilgewichten
$$q_1 = 2, \quad q_2 = 2, \quad q_3 = q_4 = \cdots = q_r = 1.$$
Dieselben sind von der Form:
$$\Sigma(x-x_1)^2(x-x_2)^2(y-y_3)(y-y_4)(x-x_5)\ldots(x-x_r) = 0,$$
$$\Sigma(x-x_1)^2(x-x_2)(y-y_2)(y-y_3)(x-x_4)\ldots(x-x_r) = 0,$$
$$\Sigma(x-x_1)^2(y-y_2)^2(y-y_3)(x-x_4) \qquad \ldots(x-x_r) = 0.$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Da die höchsten Relationen vom Gewicht $2r$ sind, so sind sie dargestellt durch r-förmige Functionen der Differenzen D von lauter gleichen Theilgewichten
$$q_1 = q_2 = \cdots = q_r = 2.$$
Eine solche ist beispielsweise von der Form:
$$\Sigma(x-x_1)^2(x-x_2)^2(x-x_3)^2\ldots(x-x_k)^2(y-y_{k+1})^2\ldots(y-y_r)^2 = 0.$$

§ 13.

II. Methode. Differentialmethode.

Lässt man in der Function
$$J = \Sigma x_1^{\alpha_1} y_1^{\beta_1} \cdots \times x_2^{\alpha_2} y_2^{\beta_2} \cdots \times \cdots \times x_i^{\alpha_i} y_i^{\beta_i} \cdots = \varphi(a) = f(a)$$
die Elemente aller Reihen $x_1 x_2 \ldots x_r;\ y_1 y_2 \ldots y_r;\ z_1 z_2 \ldots z_r; \ldots$ um die gleichnamigen Grössen x, bzw. y, bzw. $z, \ldots$ abnehmen, so geht dieselbe in eine symmetrische Function der Differenzen

$$(1) \qquad \begin{array}{llll} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 & \ldots, \\ x - x_2 & y - y_2 & z - z_2 & \ldots, \\ \cdots & \cdots & \cdots & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \\ x - x_r & y - y_r & z - z_r & \ldots \end{array}$$

über. Entwickelt man dieselbe mit Hilfe der Taylor'schen Reihe für mehrere Veränderliche nach Potenzen und Producten von $x, y, z, \ldots$, so folgt:

$$(2) \quad \pm \Sigma(x-x_1)^{\alpha_1}(y-y_1)^{\beta_1}\ldots \times (x-x_2)^{\alpha_2}(y-y_2)^{\beta_2}\ldots$$
$$\times \cdots \times (x-x_i)^{\alpha_i}(y-y_i)^{\beta_i}\ldots$$
$$= \varphi - \left(x\sum\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} + y\sum\frac{\partial\varphi}{\partial y_1} + z\sum\frac{\partial\varphi}{\partial z_1} + \cdots\right)$$
$$+ \frac{1}{2!}\left\{x^2\sum\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2} + 2xy\sum\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\partial y_1} + \cdots\right\}$$
$$- \frac{1}{3!}\left\{x^3\sum\frac{\partial^3\varphi}{\partial x_1^3} + 3x^2y\sum\frac{\partial^3\varphi}{\partial x_1^2\partial y_1} + \cdots\right\} + \cdots.$$

Lässt man nun der Reihe nach die Elemente $xyz\ldots$ mit den Gruppen $x_1y_1z_1\ldots;\ x_2y_2z_2\ldots,\ \ldots,\ x_ry_rz_r\ldots$ zusammenfallen und addirt die erhaltenen Bedingungen, so geht die Function J in eine symmetrische Function der Differenzen

$$\begin{array}{lll} x_1-x_2 & y_1-y_2 & z_1-z_2\ldots, \\ x_1-x_3 & y_1-y_3 & z_1-z_3\ldots, \\ x_1-x_4 & y_1-y_4 & z_1-z_4\ldots \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \end{array}$$

über. Ist insbesondere die Function J r-förmig, so enthält jedes Glied Differenzen aus sämmtlichen Gruppen (1). Es verschwindet daher eine r-förmige symmetrische Function der Differenzen (1) identisch, wenn die Gruppe $xyz\ldots$ mit irgend einer Gruppe

$$P_i(x_iy_iz_i\ldots)\quad (i=1,2,3\ldots 7)$$

coincidirt. Wir erhalten deshalb für jede r-förmige symmetrische Function von r Gruppen die Identität:

$$(3)\quad \begin{aligned} 0=r\varphi &-\Big\{\sum x_1\sum\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}+\sum y_1\sum\frac{\partial\varphi}{\partial y_1}+\cdots\Big\}\\ &+\frac{1}{2!}\Big\{\sum x_1^2\sum\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2}+2\sum x_1y_1\sum\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\partial y_1}+\cdots\Big\}\\ &-\frac{1}{3!}\Big\{\sum x_1^3\sum\frac{\partial^3\varphi}{\partial x_1^3}+3\sum x_1^2y_1\sum\frac{\partial^3\varphi}{\partial x_1^2\partial y_1}+\cdots\Big\}+\cdots \end{aligned}$$

Ersetzt man hierin die einförmigen Functionen

$$\Sigma x_1,\ \Sigma y_1,\ldots;\ \Sigma x_1^2,\ \Sigma x_1y_1,\ \Sigma y_1^2\ldots,\ \Sigma x_1^3,\ \Sigma x_1^2y_1,\ldots$$

durch Elementarfunctionen, so kann dieselbe *in nichts anderes als in eine Relation zwischen den letzteren übergehen.*

Setzt man an Stelle der Function $\varphi(a)$ die einförmige Function $f(a)$, so stellt die Identität:

$$(4)\quad \begin{aligned} 0=rf &-\Big\{\sum x_1\sum\frac{\partial f}{\partial x_1}+\sum y_1\sum\frac{\partial f}{\partial y_1}+\cdots\Big\}\\ &+\frac{1}{2!}\Big\{\sum x_1^2\sum\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}+2\sum x_1y_1\sum\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial y_1}+\cdots\Big\}-\cdots \end{aligned}$$

unmittelbar eine Relation zwischen den einförmigen Functionen von r Gruppen dar.

Durch die Differentialgleichung (4) ist die Darstellung der Relationen auf diejenige der r-förmigen symmetrischen Functionen zurückgeführt.

§ 14.

Die Differentialgleichungen der Relationen.

Da nach § 12 sich die Relationen durch die r-förmigen Functionen der Differenzen (1) darstellen lassen, so ändert sich eine solche nicht, wenn man die Elemente einer Reihe, z. B.

$$x_1 x_2 x_3 \ldots x_r$$

um dieselbe Grösse λ wachsen oder abnehmen lässt. Ist daher

$$\varphi(a) = 0$$

eine solche Relation, so geht dieselbe mit Ueberführung von

$$x_1 x_2 x_3 \ldots x_r$$

in

$$x_1 + \lambda,\ x_2 + \lambda,\ x_3 + \lambda, \ldots, x_r + \lambda$$

über in

$$0 = \varphi(a) + \lambda \sum \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \frac{\lambda^2}{2!} \sum \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + \cdots. \tag{1}$$

Da nun die Function $\varphi(a)$ unverändert bleiben muss, welches auch der Werth von λ sein mag, so muss jede Relation der *Differentialgleichung* genügen

$$\sum \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = 0.$$

Enthält die Relation ausser der Reihe

$$x_1 x_2 \ldots x_r$$

noch die Reihen

$$y_1 y_2 \ldots y_r;\ z_1 z_2 \ldots z_r, \ldots$$

so gelten noch die Differentialgleichungen

$$\sum \frac{\partial \varphi}{\partial y_1} = 0, \quad \sum \frac{\partial \varphi}{\partial z_1} = 0, \ldots.$$

Dies sind dieselben Differentialgleichungen, die wir in § 8 für die symmetrischen Functionen aufgestellt haben.

Sie lauten ausgeführt:

$$\tag{2} \begin{cases} \Delta_{x_1} = \sum \dfrac{\partial \varphi}{\partial a_{p_1 p_2 p_3 \ldots p_i}} (r - p + 1)\, a_{p_1 - 1\, p_2 p_3 \ldots p_i} = 0, \\ \Delta_{y_1} = \sum \dfrac{\partial \varphi}{\partial a_{p_1 p_2 p_3 \ldots p_i}} (r - p + 1)\, a_{p_1 p_2 - 1\, p_3 \ldots p_i} = 0, \\ \Delta_{z_1} = \sum \dfrac{\partial \varphi}{\partial a_{p_1 p_2 \ldots p_i}} (r - p + 1)\, a_{p_1 p_2 p_3 - 1 \ldots p_i} = 0. \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Diese Differentialgleichungen stellen somit die nothwendigen Bedingungen dar, dass eine Relation unverändert bleibt, wenn man die

Elemente einer beliebigen Reihe um dieselbe Grösse wachsen oder abnehmen lässt.

Ich bemerke noch, dass auch die Coefficienten von $\lambda^2, \lambda^3, \ldots$ in der Gleichung (1) identisch verschwinden, da diese nichts anderes sind als

$$\sum \frac{\partial \Delta_{x_1}}{\partial x_1}, \quad \sum \frac{\partial^2 \Delta_{x_1}}{\partial x_1^2}, \ldots .$$

Wir sehen somit, dass die Bedingungen (2) nicht nur *nothwendig* sondern *auch hinreichend* sind für die Unveränderlichkeit der Relation φ gegenüber der Substitution $x_1 + \lambda$, $x_2 + \lambda, \ldots$ für $x_1, x_2, \ldots$.

2. Wie man mit Hilfe der Differentialgleichungen $\Delta_{x_1}, \Delta_{y_1}, \ldots$ der symmetrischen Functionen eine gewisse Function selbst ermitteln kann, so ist dies in derselben Weise auch mit Hilfe der Differentialgleichungen (2) für die Relationen der Fall.

§ 15.

Allgemeine Formel der Relationen.

Hat man r Gruppen von je zwei Elementen, so lassen sich bekanntlich*) die niedrigsten Relationen des ternären Gebietes aus der Identität herleiten:

$$(1) \qquad \Sigma (xy_1)(xy_2)(x-x_3)\ldots(x-x_r) = 0$$

oder aus

$$(2) \qquad \begin{aligned} & x^r a_{22} - x^{r-1} y a_{12} + x^{r-2} y^2 a_{11} \\ & - x^{r-1} a_{122} + 2x^{r-2} y a_{112} - 3x^{r-3} y^2 a_{111} \\ & + x^{r-2} a_{1122} - 3x^{r-3} y a_{1112} + 6x^{r-4} y^2 a_{1111} \\ & - \ldots \ldots \ldots \ldots \\ & + \ldots \ldots \ldots \ldots \\ & + (-1)^r \left\{ x^2 a_{0,r} - (r-1)\, xy\, a_{r-1,1} + \frac{r(r-1)}{2} y^2 a_{0,r} \right\} = 0. \end{aligned}$$

Dieselbe liefert solche für jede beliebige Anzahl r von Gruppen vom Gewicht $r+2$ und den Reihengewichten

$$p_1 = r, \quad p_2 = 2.$$

Da die Function auch für $2, 3, \ldots, r-1$ Gruppen identisch verschwindet, so liefert sie auch höhere Relationen für jede beliebige Anzahl r_1 von weniger als r Gruppen. Da sie ferner durch Anwendung der Operationen Δ_x^y, Δ_x^z, etc. in Relationen von beliebigen Reihengewichten übergeführt werden kann, so kann sie als *Ausgangsrelation* zur Darstellung von allen möglichen Relationen gewählt werden.

---

*) Vergl. den Aufsatz des Verfassers: diese Annalen Bd. 43, pag. 253 u. s. f.

Will man nun von derselben ausgehend höhere Relationen für $r-1$ Gruppen herleiten, so genügt es alle diejenigen Glieder zu annulliren, welche r-förmige Elementarfunctionen enthalten. Auf diese Weise gelangen wir von der Relation für r Gruppen ausgehend zu einer Reihe von Relationen von gleichem Gewicht, welche den Gruppen

$$r,\ r-1,\ r-2,\ \ldots,\ 3,\ 2$$

entsprechen. Die niedrigste Relation für r Gruppen wird sich deshalb auf die Form bringen lassen:

$$\begin{aligned} R_r = R_{r-1} &+ \lambda_1 a_1^2 a_{r-2,2} + \lambda_2 a_1 a_2 a_{r-1,1} + \lambda_3 a_2^2 a_{r,0} \\ &+ \mu_1 a_{11} a_{r-2,2} + \mu_2 a_{12} a_{r-1,1} + \mu_3 a_{22} a_{r,0}, \end{aligned}$$

wo R_{r-1} eine Relation für $r-1$ Gruppen darstellt.

Um die Coefficienten $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$, $\mu_1 \mu_2 \mu_3$ zu ermitteln, bedenke man, dass ausser in den Gliedern der letzten Reihe der Identität (2) nur noch in den Functionen

$$\Sigma x_1^r,\ \Sigma x_1^{r-1} y,\ \Sigma x_1^{r-2} y_1^2$$

r-förmige Elementarfunctionen vorkommen können. Der Coefficient dieses Gliedes kann aber mit Hilfe der Summenformel von Herrn Macmahon*)

$$(-1)^{\alpha+\beta-1} \frac{(\alpha+\beta-1)!}{\alpha!\,\beta!} \sum x_1^\alpha y_1^\beta = \sum (-1)^{\Sigma\pi-1} \frac{(\Sigma\pi-1)!}{\pi_1!\,\pi_2!\ldots} a_{\alpha_1\beta_1}^{\pi_1} a_{\alpha_2\beta_2}^{\pi_2} \ldots$$

ermittelt werden. Wir erhalten:

$$\lambda_1 = (-1)^r, \qquad \lambda_2 = -(r-1)(-1)^r, \qquad \lambda_3 = \frac{r(r-1)}{2}(-1)^r,$$

$$\mu_1 = -\frac{2r}{r-1}(-1)^r, \qquad \mu_2 = r(-1)^r, \qquad \mu_3 = r^2(-1)^r,$$

und somit als Relation für r Gruppen vom Gewicht $r+2$:

$$\begin{aligned} R_r \equiv R_{r-1} + (-1)^r \Big\{ &\Big(a_1^2 - \frac{2r}{r-1} a_{11}\Big) a_{r-2,2} - \Big(a_1 a_2 (r-1) - r a_{12}\Big) a_{r-1,1} \\ &+ \Big(a_2^2 \frac{r(r-1)}{2} - r^2 a_{22}\Big) a_{r,0} \Big\}, \end{aligned}$$

aus welcher successive sämmtliche Relationen des ternären Gebietes hergeleitet werden können. Da man ferner mit Hilfe der Operationen Δ_x^s, Δ_y^s, Δ_z, etc. beliebige neue Reihen einführen kann, so kann sie zur Darstellung überhaupt aller Relationen benützt werden.

---

*) Macmahon: „Memoir on Symmetric Functions of the Roots of Systems of Equations." Phil. Trans. vol. 181 (1890), pag. 487.

§ 16.

Zusammenstellung der Relationen des ternären Gebietes.*)

Ich bezeichne im Folgenden die Relationen wieder mit lateinischen Ziffern, deren Werth unmittelbar die Gruppenzahl angiebt, für welche eine solche Giltigkeit besitzt und die Reihengewichte derselben durch untergesetzte Indices p_1, bezw. p_2.

1. Für zwei Gruppen erhalten wir die Relation

$$(1) \qquad II_{22} \equiv a_1^2 a_{22} + a_2^2 a_{11} - a_1 a_2 a_{12} - 4 a_{11} a_{12} + a_{12}^2 = 0.$$

Dieselbe ist vom Gewicht 4 und vom Grad 3 in den Elementarfunctionen.

Setzt man an Stelle der Elemente $x_1 y_1$; $x_2 y_2$ des ternären Gebietes die homogenen Elemente $\frac{x_1}{z_1}, \frac{y_1}{z_1}; \frac{x_2}{z_2}, \frac{y_2}{z_2}$, so geht dieselbe über in die homogene Relation:

$$(1)' \qquad II_{222} \equiv a_{11} a_{23}^2 + a_{22} a_{31}^2 + a_{33} a_{12}^2 - a_{23} a_{31} a_{12} - 4 a_{11} a_{22} a_{33} = 0.$$

2. Für drei Gruppen sind die niedrigsten Relationen angegeben durch

$$(2) \qquad III_{32} \equiv a_1 II_{22} - 3 a_{111}(a_2^2 - 3 a_{22}) + a_{112}(2 a_1 a_2 - 3 a_{12}) - a_{122}(a_1^2 - 3 a_{11}) = 0,$$

$$(3) \qquad III_{23} \equiv a_2 II_{22} - 3 a_{222}(a_1^2 - 3 a_{11}) + a_{122}(2 a_1 a_2 - 3 a_{12}) - a_{112}(a_2^2 - 3 a_{22}) = 0,$$

welche vom Gewicht 5 und vom Grad 4 in den Elementarfunctionen sind.

3. Für vier Gruppen finden wir die niedrigsten Relationen:

$$(4) \qquad IV_{42} = 3 a_1 III_{32} + 2 III_{42} + 6 a_{1111}(3 a_2^2 - 8 a_{22}) - 3 a_{1112}(3 a_1 a_2 - 4 a_{12}) + a_{1122}(3 a_1^2 - 8 a_{11}) = 0.$$

$$(5) \qquad IV_{33} = 3 a_1 III_{23} + 3 a_2 III_{32} + 2 III_{33} + 3 a_{1112}(3 a_2^2 - 8 a_{22}) - 4 a_{1122}(3 a_1 a_2 - 4 a_{12}) + 3 a_{1222}(3 a_1^2 - 8 a_{11}) = 0.$$

$$(6) \qquad IV_{24} = 3 a_2 III_{23} + 2 III_{24} + a_{1122}(3 a_2^2 - 8 a_{22}) - 3 a_{1222}(3 a_1 a_2 - 4 a_{12}) + 6 a_{2222}(3 a_1^2 - 8 a_{11}) = 0,$$

wo

*) Ich habe diese Relationen theilweise schon in meiner II. Abhandlung, diese Annalen Bd. 48, angegeben, aber nicht in der vereinfachten Form, in welcher sie hier zusammengestellt sind.

$$(7)\quad III_{42} = -a_{11}II_{22} - 3a_1a_{22}a_{111} + 3a_2a_{12}a_{111} + a_1a_{11}a_{122} - 2a_2a_{11}a_{112} - 9a_{111}a_{122} + 3a_{112}^2 = 0,$$

$$(8)\quad III_{33} = -a_{12}II_{22} + 3a_1a_{11}a_{222} + a_1a_{12}a_{122} - 3a_1a_{22}a_{112} + 3a_2a_{22}a_{111} + a_2a_{12}a_{112} - 3a_2a_{11}a_{122} - 27a_{111}a_{222} + 3a_{112}a_{122} = 0,$$

$$(9)\quad III_{24} = -a_{22}II_{22} - 3a_2a_{11}a_{222} + 3a_1a_{12}a_{222} + a_2a_{22}a_{112} - 2a_1a_{22}a_{122} - 9a_{222}a_{112} + 3a_{122}^2 = 0$$

Relationen vom Gewicht 6 für drei Gruppen repräsentiren.

Betrachtet man die Relationen (4), (5), (6), (7), (8), (9), so zeigt sich, dass dieselben vom Gewicht 6 und die ersteren drei vom Grad 5, die letzteren vom Grad 4 in den Elementarfunctionen sind.

4. Für fünf Gruppen erhalten wir die niedrigsten Relationen:

$$(10)\quad V_{52} = 2a_1IV_{42} + 5IV_{52} - 30a_{11111}(2a_2^2 - 5a_{22}) + 6a_{11112}(4a_1a_2 - 5a_{12}) - 3a_{11122}(2a_1^2 - 5a_{11}) = 0.$$

$$(11)\quad V_{43} = 2a_2IV_{42} + 2a_1IV_{33} + 5IV_{43} - 18a_{11112}(2a_2^2 - 5a_{22}) + 9a_{11122}(4a_1a_2 - 5a_{12}) - 9a_{11222}(2a_1^2 - 5a_{11}) = 0.$$

$$(12)\quad V_{34} = 2a_1IV_{24} + 2a_2IV_{33} + 5IV_{34} - 18a_{12222}(2a_1^2 - 5a_{11}) + 9a_{11222}(4a_1a_2 - 5a_{12}) - 9a_{11122}(2a_2^2 - 5a_{22}) = 0.$$

$$(13)\quad V_{25} = 2a_2IV_{24} + 5IV_{25} - 30a_{22222}(2a_1^2 - 5a_{11}) + 6a_{12222}(4a_1a_2 - 5a_{12}) - 3a_{11222}(2a_2^2 - 5a_{22}) = 0.$$

In denselben geben

$$(14)\quad IV_{52} = -a_{11}III_{32} + 6a_{1111}(a_1a_{22} - a_2a_{12} + 2a_{122}) + 3a_{1112}(a_2a_{11} - 2a_{112}) - a_{1122}(a_1a_{11} - 6a_{111}) = 0,$$

$$(15)\quad IV_{43} = -a_{12}III_{32} - a_{11}III_{23} - 6a_{1111}(a_2a_{22} - 6a_{222}) + 3a_{1112}(2a_1a_{22} - a_2a_{12}) + a_{1122}(5a_2a_{11} - a_1a_{12} - 6a_{112}) - 3a_{1222}(a_1a_{11} - 6a_{111}) = 0,$$

$$(16)\quad IV_{34} = -a_{12}III_{23} - a_{22}III_{32} - 6a_{2222}(a_1a_{11} - 6a_{111}) + 3a_{1222}(2a_2a_{11} - a_1a_{12}) + a_{1122}(5a_1a_{22} - a_2a_{12} - 6a_{122}) - 3a_{1112}(a_2a_{22} - 6a_{222}) = 0,$$

$$(17)\quad IV_{25} = - a_{22} III_{23} + 6 a_{2222}(a_2 a_{11} - a_1 a_{12} + 2 a_{112}) + 3 a_{1222}(a_1 a_{22} - 2 a_{122}) - a_{1122}(a_2 a_{22} - 6 a_{222}) = 0$$

die Relationen vom Gewicht 7 und vom Grade 5 für vier Gruppen an.

5. Die niedrigsten Relationen für 6 Gruppen sind vom Gewicht 8 und vom Grade 7 in den Elementarfunctionen und angegeben durch:

$$(18)\quad VI_{62} = \tfrac{5}{3} a_1 V_{52} + V_{62} + 30 a_{111111}(5 a_2^2 - 12 a_{22}) - 10 a_{111112}(5 a_1 a_2 - 6 a_{12}) + 2 a_{111122}(5 a_1^2 - 12 a_{11}) = 0.$$

$$(19)\quad VI_{53} = \tfrac{5}{3} a_1 V_{43} + \tfrac{5}{3} a_2 V_{52} + V_{53} + 20 a_{111112}(5 a_2^2 - 12 a_{22}) - 16 a_{111122}(5 a_1 a_2 - 6 a_{12}) + 6 a_{111222}(5 a_1^2 - 12 a_{11}) = 0.$$

$$(20)\quad VI_{44} = \tfrac{5}{3} a_1 V_{34} + \tfrac{10}{3} a_2 V_{43} + V_{44} + 12 a_{111122}(5 a_2^2 - 12 a_{22}) - 18 a_{111222}(5 a_1 a_2 - 6 a_{12}) + 12 a_{112222}(5 a_1^2 - 12 a_{11}) = 0.$$

$$(21)\quad VI_{35} = \tfrac{5}{3} a_2 V_{34} + \tfrac{5}{3} a_1 V_{25} + V_{35} + 20 a_{122222}(5 a_1^2 - 12 a_{11}) - 16 a_{112222}(5 a_1 a_2 - 6 a_{12}) + 6 a_{111222}(5 a_2^2 - 12 a_{22}) = 0.$$

$$(22)\quad VI_{16} = \tfrac{5}{3} a_2 V_{25} + V_{26} + 30 a_{222222}(5 a_1^2 - 12 a_{11}) - 10 a_{122222}(5 a_1 a_2 - 6 a_{12}) + 2 a_{112222}(5 a_2^2 - 12 a_{22}) = 0.$$

Hieraus ergeben sich unmittelbar die Relationen für 5 Gruppen vom Gewicht 8 und vom Grade 6 in den Elementarfunctionen:

$$(23)\quad V_{62} \equiv - 3 a_{11} IV_{42} + 5 IV_{62} - 30 a_{11111}(3 a_1 a_{22} - 3 a_2 a_{12} + 5 a_{122}) - 12 a_{11112}(3 a_2 a_{11} - 5 a_{112}) + 9 a_{11122}(a_1 a_{11} - 5 a_{111}) = 0.$$

$$(24)\quad V_{53} \equiv - 3 a_{12} IV_{42} - 3 a_{11} IV_{33} + 5 IV_{53} - 6 a_{11112}(15 a_1 a_{22} - 9 a_2 a_{12} + 5 a_{122}) + 3 a_{11122}(3 a_1 a_{12} - 21 a_2 a_{11} + 25 a_{112}) + 27 a_{11222}(a_1 a_{11} - 5 a_{111}) = 0.$$

$$(25)\quad V_{44} = - \tfrac{3}{2} a_{11} IV_{24} - 3 a_{12} IV_{33} - \tfrac{3}{2} a_{22} IV_{42} + 54 a_{11112}(a_2 a_{22} - 5 a_{222}) - 9 a_{11122}(9 a_1 a_{22} - 3 a_2 a_{12} - 5 a_{122}) + 54 a_{12222}(a_1 a_{11} - 5 a_{111}) - 9 a_{11222}(9 a_2 a_{11} - 3 a_1 a_{12} - 5 a_{112}) = 0.$$

$$(26)\quad V_{35} = - 3 a_{12} IV_{24} - 3 a_{22} IV_{33} + 5 IV_{35} - 6 a_{12222}(15 a_2 a_{11} - 9 a_1 a_{12} + 5 a_{112}) + 3 a_{11222}(3 a_2 a_{12} - 21 a_1 a_{22} + 25 a_{122}) + 27 a_{11122}(a_2 a_{22} - 5 a_{222}) = 0.$$

$$(27)\quad V_{26} = -3a_{22}V_{24} + 6IV_{26} - 30a_{22222}(3a_2a_{11} - 3a_1a_{12} + 5a_{112}) - 12a_{12222}(3a_1a_{22} - 5a_{122}) + 9a_{11222}(a_2a_{22} - 5a_{222}) = 0.$$

Setzt man hierin die fünfförmigen Elementarfunctionen gleich Null, so finden wir fünf weitere Relationen für 4 Gruppen vom Gewicht 8 und vom Grad 5:

$$(28)\quad IV_{62} = a_{111}III_{32} + 2a_{1111}II_{22} + 2a_{1111}(-a_1a_{122} + 2a_2a_{112} - 4a_{1122}) - 3a_{1112}(a_2a_{111} - 2a_{1112}) + a_{1122}(a_1a_{111} - 8a_{1111}) = 0,$$

$$(29)\quad IV_{53} = a_{112}III_{32} + a_{111}III_{23} + 2a_{1112}II_{22} + 6a_{1111}(-a_1a_{222} + a_2a_{122} - 4a_{1222}) - a_{1112}(2a_1a_{122} - a_2a_{112} - 4a_{1122}) - a_{1122}(5a_2a_{111} - a_1a_{112} - 4a_{1112}) + 3a_{1222}(a_1a_{111} - 8a_{1111}) = 0,$$

$$(30)\quad IV_{44} = 2a_{122}III_{32} + 2a_{112}III_{23} + 4a_{1122}II_{22} + 6a_{1111}(a_2a_{222} - 8a_{2222}) + 3a_{1112}(a_2a_{122} - 4a_1a_{222} - 2a_{1222}) - a_{1122}(a_1a_{122} + a_2a_{112} - 8a_{1122}) + 3a_{1222}(a_1a_{112} - 4a_2a_{111} - 2a_{1112}) + 6a_{2222}(a_1a_{111} - 8a_{1111}) = 0,$$

$$(31)\quad IV_{35} = a_{122}III_{23} + a_{222}III_{32} + 2a_{1222}II_{22} + 6a_{2222}(-a_2a_{111} + a_1a_{112} - 4a_{1112}) - a_{1222}(2a_2a_{112} - a_1a_{122} - 4a_{1122}) - a_{1122}(5a_1a_{222} - a_2a_{122} - 4a_{1222}) + 3a_{1112}(a_2a_{222} - 8a_{2222}) = 0,$$

$$(32)\quad IV_{26} = a_{222}III_{23} + 2a_{2222}II_{22} + 2a_{2222}(-a_2a_{112} + 2a_1a_{122} - 4a_{1122}) - 3a_{1222}(a_1a_{222} - 2a_{1222}) + a_{1122}(a_2a_{222} - 8a_{2222}) = 0.$$

6. Für 7 Gruppen erhalten wir 6 niedrigste Relationen vom Gewicht 9 und vom Grade 8, von denen drei angegeben werden sollen:

$$(33)\quad VII_{72} = 3a_1VI_{62} + 7VI_{72} + 30a_{1111112}(6a_1a_2 - 7a_{12}) - 10a_{1111122}(3a_1^2 - 7a_{11}) - 210a_{1111111}(3a_2^2 - 7a_{22}) = 0,$$

$$(34)\quad VII_{63} = 3a_2VI_{62} + 3a_1VI_{53} + 7VI_{72} - 150a_{1111112}(3a_2^2 - 7a_{22}) + 50a_{1111122}(6a_1a_2 - 7a_{12}) - 30a_{1111222}(3a_1^2 - 7a_{11}) = 0,$$

$$(35)\quad VII_{54} = 6a_2\, VI_{53} + 3a_1\, VI_{44} + 7\, VI_{54} - 200\, a_{1111122}(3a_2^2 - 7a_{22}) + 120\, a_{1111222}(6a_1 a_2 - 7a_{12}) - 120\, a_{1112222}(3a_1^2 - 7a_{11}) = 0.$$

Hieraus ergeben sich für 6, bezw. 5 Gruppen die Relationen vom Gewicht 9 und vom Grad 7, bezw. 6:

$$(36)\quad VI_{72} = -2a_{11}\, V_{52} + V_{72} + 30\, a_{111111}(2a_1 a_{22} - 2a_2 a_{12} + 3a_{122}) + 10\, a_{111112}(2a_2 a_{11} - 3a_{112}) - 2\, a_{111122}(2a_1 a_{11} - 9a_{111}) = 0,$$

$$(37)\quad VI_{63} = -2a_{12}\, V_{52} - 2a_{11}\, V_{43} + V_{63} - 30\, a_{111111}(2a_2 a_{22} - 9a_{222}) + 10\, a_{111112}(6a_1 a_{22} - 4a_2 a_{12} + 3a_{122}) - 2\, a_{111122}(2a_1 a_{12} - 18a_2 a_{11} + 21 a_{112}) - 6\, a_{111222}(2a_1 a_{11} - 9a_{111}) = 0,$$

$$(38)\quad VI_{54} = -4a_{22}\, V_{52} - 4a_{12}\, V_{43} - 2a_{11}\, V_{34} + V_{54} - 40\, a_{111112}(2a_2 a_{22} - 9a_{222}) + 8\, a_{111122}(14a_1 a_{22} - 6a_2 a_{12} - 3a_{122}) + 24\, a_{111222}(4a_2 a_{11} - a_1 a_{12} - 3a_{112}) - 24\, a_{112222}(2a_1 a_{11} - 9a_{111}) = 0,$$

$$(39)\quad V_{72} = a_{111}\, IV_{42} - 10\, a_{11111}\, II_{22} + 10\, a_{11111}(a_1 a_{122} - 2a_2 a_{112} + 5a_{1122}) + 6\, a_{11112}(2a_2 a_{111} - 5a_{1112}) - 3\, a_{11122}(a_1 a_{111} - 10a_{1111}) = 0,$$

$$(40)\quad V_{63} = a_{112}\, IV_{42} + a_{111}\, IV_{33} - 10\, a_{11112}\, II_{22} + 30\, a_{11111}(a_1 a_{222} - a_2 a_{122} - 5a_{1222}) - 2\, a_{11112}(-5a_1 a_{122} + 4a_2 a_{112} + 5a_{1122}) + 3\, a_{11122}(7a_2 a_{111} - a_1 a_{112} - 10a_{1112}) - 9\, a_{11222}(a_1 a_{111} - 10a_{1111}) = 0,$$

$$(41)\quad V_{54} = 2a_{122}\, IV_{42} + 2a_{112}\, IV_{33} + a_{111}\, IV_{24} - 20\, a_{11122}\, II_{22} - 60\, a_{11111}(a_2 a_{222} - 10a_{2222}) + 6\, a_{11112}(5a_1 a_{222} - a_2 a_{122} - 5a_{1222}) - 2\, a_{11122}(-7a_1 a_{122} - a_2 a_{112} + 40a_{1122}) + 18\, a_{11222}(3a_2 a_{111} - a_1 a_{112}) - 36\, a_{12222}(a_1 a_{111} - 10a_{1111}) = 0.$$

7. Ueberblicken wir die oben erhaltenen Relationen, so finden wir für zwei Gruppen *eine* Relation vom Gewicht 4, für drei Gruppen zwei vom Gewicht 5 und drei vom Gewicht 6, für vier Gruppen drei vom Gewicht 6, vier vom Gewicht 7 und fünf vom Gewicht 8; allgemein für r Gruppen

$$
\begin{array}{cccccc}
r-1 & \text{Relationen} & \text{vom} & \text{Gewicht} & r+2, \\
r & \text{"} & \text{"} & \text{"} & r+3, \\
r+1 & \text{"} & \text{"} & \text{"} & r+4, \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
2r-3 & \text{"} & \text{"} & \text{"} & 2r,
\end{array}
$$

zusammen also

$$\sigma = \frac{1}{2}(r-1)(3r-4)$$

verschiedene Relationen, welche, wie ich früher (diese Annalen Bd. 43) gezeigt habe, durch

$$\tau = (r-1)(r-2)$$

Identitäten zusammenhängen müssen und daher nur

$$s = \sigma - \tau = \frac{r(r-1)}{2}$$

unabhängige Relationen repräsentiren.

Ferner fällt in die Augen, dass die sämmtlichen Relationen für zwei, drei, vier, fünf Gruppen die Elementarfunctionen im Grade drei, bezw. vier, bezw. fünf, bezw. sechs enthalten; ebenso besitzen sämmtliche Relationen für sechs Gruppen die Elementarfunctionen im Grad sieben und demnach sämmtliche Relationen für r Gruppen dieselben im Grade $r+1$.

Setzen wir an Stelle der Elemente x, y die Verhältnisse $\frac{x}{z}, \frac{y}{z}$ derselben zu einer dritten Grösse z und demnach an Stelle der Reihen

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_r; \quad y_1, y_2, y_3, \ldots, y_r$$

die folgenden

$$\frac{x_1}{z_1}, \frac{x_2}{z_2}, \frac{x_3}{z_3}, \ldots, \frac{x_r}{z_r}; \quad \frac{y_1}{z_1}, \frac{y_2}{z_2}, \frac{y_3}{z_3}, \ldots, \frac{y_r}{z_r},$$

so geht jede Elementarfunction der ersteren in das Verhältniss zweier r-förmigen Functionen der drei Reihen

$$x_1 x_2 \ldots x_r; \quad y_1 y_2 \ldots y_r; \quad z_1 z_2 \ldots z_r$$

über.

Beispielsweise geht für vier Gruppen die zweiförmige Function $\Sigma x_1 y_2$ über in $a_{1233} : a_{3333}$.

Führen wir an Stelle jener Elementarfunctionen diese Verhältnisse in die Relationen ein und multipliciren wir mit dem Nenner $a^{r+1}_{\underset{(r)}{33 3\cdots 3}}$ durch, so wird jede derselben in eine homogene Function vom Grade $r+1$ von nur r-förmigen Elementarfunctionen verwandelt.

Betrachten wir daher die drei Elemente $x_i\, y_i\, z_i$ einer Gruppe als die homogenen (Dreiecks-) Coordinaten eines Punktes oder einer geraden Linie in der Ebene, so gilt der Satz:

Zwischen den r-förmigen Elementarfunctionen

$$\Sigma x_1 x_2 \ldots x_r,\ \Sigma x_1 x_2 \ldots y_r,\ \Sigma x_1 x_2 \ldots y_{r-1} y_r;\ \ldots;\ \Sigma z_1 z_2 \ldots z_r$$

der Coordinaten eines Systems von r Punkten oder Geraden in der Ebene bestehen $\frac{r(r-1)}{2}$ unabhängige homogene Identitäten vom Grade $r+1$.

IV. Abschnitt.

Die Bedeutung der Relationen für eine ternäre Form r^{ten} Grades.

§ 17.

Die Bedingungen der Zerfällbarkeit einer ternären Form.

Die ternäre Form r^{ten} Grades

$$f(xyz) = 0,$$

deren Coefficienten

$$a_0,\ a_1,\ a_2, \ldots, a_\sigma$$

sein sollen, besitzt bekanntlich

$$\sigma = \binom{r+2}{2} = \tfrac{1}{2}(r+2)(r+1)$$

Glieder. Dividirt man mit dem Coefficienten a_σ des letzten Gliedes durch und setzt $z = 1$, so lässt sich dieselbe auch auf die Gestalt bringen:

$$(1) \qquad f_r \equiv a_{r,0} x^r + a_{r-1,1} x^{r-1} y + \cdots + a_1 x + a_2 y + 1,$$

in welcher

$$a_{r,0} = \frac{a_0}{a_\sigma},\ a_{r-1,1} = \frac{a_1}{a_\sigma}, \cdots,\ a_1 = a_{1,0} = \frac{a_{\sigma-2}}{a_\sigma},\ a_2 = a_{0,1} = \frac{a_{\sigma-1}}{a_\sigma}$$

die $\binom{r+2}{2} - 1 = \frac{r(r+3)}{2}$ unabhängigen Coefficienten einer allgemeinen ternären Form bezeichnen sollen. Sind diese Coefficienten nicht gegeben, so ist bekanntlich die gleiche Anzahl von Bedingungen nöthig, um dieselben ermitteln zu können.

Zwischen den Coefficienten von f bestehen im allgemeinen keine Identitäten. Stellt man an die Form f jedoch irgend welche Forderung, beispielsweise, dass sie in niedrigere Formen zerfallen soll, so wird dieselbe erfüllt werden, wenn zwischen den Coefficienten von f gewisse identische Beziehungen bestehen.

Hat man zwei Formen f_{r_1}, bezw. f_{r_2} vom Grade r_1, bezw. r_2, so besitzen die letzteren

$$\frac{r_1(r_1+3)}{2}, \text{ bezw. } \frac{r_2(r_2+3)}{2}$$

und das Product derselben demnach

$$\frac{r_1(r_1+3)}{2} + \frac{r_2(r_2+3)}{2}$$

unabhängige Coefficienten.

Soll nun die Form f_r in die beiden Formen f_{r_1} und f_{r_2} zerfallen, so muss

$$f_r \equiv f_{r_1} \cdot f_{r_2} \tag{2}$$

und

$$r = r_1 + r_2$$

sein.

Denkt man sich das Product $f_{r_1} . f_{r_2}$ ausgeführt, so müssen nothwendig die Coefficienten der gleichen Potenzen und Producte von x, y in Gleichung (2) beiderseits übereinstimmen. Dadurch erhalten wir $\frac{r(r+3)}{2}$ Gleichungen zwischen den Coefficienten der drei Formen f_r, f_{r_1}, f_{r_2}, aus denen die der beiden letzteren, deren Anzahl oben angegeben ist, auf

$$s = \frac{r(r+3)}{2} - \frac{r_1(r_1+3)}{2} - \frac{r_2(r_2+3)}{2} = \frac{1}{2}(r^2 - r_1^2 - r_2^2) \tag{3}$$

verschiedene Arten eliminirt werden können. Die s Eliminationsresultate, welche man auf diese Weise erhält, enthalten nur noch die Coefficienten von f_r und stellen offenbar nicht nur die nothwendigen, sondern auch die hinreichenden Bedingungen dar, dass dieselbe in die beiden Formen f_{r_1} und f_{r_2} zerfällt.

Ebenso finden wir, dass die Coefficienten von f_r

$$s = \frac{1}{2}(r^2 - r_1^2 - r_2^2 - r_3^2)$$

$$(\text{wo } r = r_1 + r_2 + r_3 \text{ ist})$$

Bedingungen genügen müssen, wenn die Form f_r in drei niedrigere Formen $f_{r_1}, f_{r_2}, f_{r_3}$ bezw. vom Grade r_1, r_2, r_3 zerfallen soll.

Allgemein gibt

$$s = \frac{1}{2}(r^2 - r_1^2 - r_2^2 - \cdots - r_i^2) \tag{4}$$

wo

$$r = \sum_1^i r_1$$

ist, die Anzahl der Bedingungen an, welche nöthig ist, damit eine Form f_r in i Factoren $f_{r_1}, f_{r_2}, \ldots, f_{r_i}$ zerfällt. Soll die Form f_r in lauter lineare Factoren zerfallen, so muss deren Anzahl gleich r sein. Setzt man daher

$$i = r$$

und

$$r_1 = r_2 = \cdots = r_i = 1,$$

so geht die Zahl s über in

$$s = \frac{1}{2}(r^2 - r) = \frac{r(r-1)}{2},$$

eine Zahl, die mit der der Relationen im ternären Gebiet übereinstimmt.

Es lässt sich zeigen, dass dieselben eben die Bedingungen repräsentiren, dass eine Form r^{ten} Grades in r lineare Factoren zerfällt.

Da eine lineare ternäre Form

$$xu + yv + 1$$

durch zwei Coefficienten u und v bestimmt ist, so enthält ein System von r solchen Formen

$$\begin{aligned} g_1 &\equiv xu_1 + yv_1 + 1, \\ g_2 &\equiv xu_2 + yv_2 + 1, \\ &\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ &\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ g_r &\equiv xu_r + yv_r + 1, \end{aligned}$$

sowie auch das Product derselben

$$G \equiv g_1 g_2 g_3 \ldots g_r$$

nur $2r$ unabhängige Grössen

(5) $$u_1 v_1;\; u_2 v_2;\; \ldots;\; u_r v_r.$$

Dieses Product ändert sich nicht, wenn man die Coefficienten $u_i v_i$ und $u_k v_k$ zweier Factoren vertauscht; es ist somit eine Function der i Gruppen

$$u_1 v_1;\; u_2 v_2;\; u_3 v_3;\; \ldots;\; u_r v_r$$

von je zwei Elementen. Da es auch eine lineare Function hinsichtlich jeder derselben ist, so lässt es sich durch die Elementarfunctionen dieser Gruppen darstellen. Bezeichnen wir die letzteren mit

$$b_{r,0};\; b_{r-1,1};\; b_{r-2,2};\; \ldots;\; b_1,\; b_2,$$

deren Anzahl $\frac{r(r+3)}{2}$ ist, so kann das Product G auch geschrieben werden:

$$G \equiv x^r b_{r,0} + x^{r-1} y b_{r-1,1} + x^{r-2} y^2 b_{r-2,2} + \cdots + x b_1 + y b_2 + 1.$$

Soll nun dasselbe mit der Form f_r identisch sein, d. h. soll die letztere ebenfalls in r lineare Factoren zerfallen, so müssen nothwendig die Gleichungen erfüllt werden:

$$(6)\quad \begin{cases} b_{r,0} &= a_{r,0}, \\ b_{r-1,1} &= a_{r-1,1}, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ b_1 &= a_1, \\ b_2 &= a_2, \end{cases}$$

deren Anzahl $\binom{r+2}{2} - 1$ ist.

Da nun die Coefficienten b als Elementarfunctionen der Gruppen $u_1 v_1;\ u_2 v_2;\ \cdots;\ u_r v_r$ durch $\frac{r(r-1)}{2}$ identische Relationen untereinander verbunden sind, so muss dies unter der Voraussetzung der Bedingungen (6) nothwendiger Weise auch für die Coefficienten a von f der Fall sein.

Ist dies für die letzteren der Fall, so reduciren sich die $\binom{r+2}{2} - 1$ Gleichungen (6) auf

$$\binom{r+2}{2} - 1 - \frac{r(r-1)}{2} = 2r$$

unabhängige Bedingungen, welche genügen, um die Grössen

$$u_1 v_1;\ u_2 v_2;\ \ldots;\ u_r v_r$$

und damit auch die r Linearfactoren

$$x u_1 + y v_1 + 1,\ x u_2 + y v_2 + 1, \ldots, x u_r + y v_r + 1$$

in eindeutiger Weise zu ermitteln. Wir sehen somit, dass die $\frac{r(r-1)}{2}$ Relationen zwischen den Elementarfunctionen von r Gruppen von je zwei Elementen nicht nur die *nothwendigen*, sondern auch *hinreichenden Bedingungen* sind, dass eine ternäre Form r^{ten} Grades in r lineare Factoren zerfällt und erhalten den *Satz:*

Jede ternäre Form r^{ten} Grades zerfällt in r lineare Factoren, wenn ihre Coefficienten

$$a_{r,0},\ a_{r-1,1}, \ldots, a_1, a_2$$

den $\frac{r(r-1)}{2}$ *Relationen genügen, welche zwischen den Elementarfunctionen der $2r$ Coefficienten von r solchen Factoren bestehen.*

§ 18.

Ermittelung der Linearfactoren einer zerfällbaren Form r^{ten} Grades.

Sind die vorgenannten Bedingungen der Zerfällbarkeit der Form

$$f_r \equiv a_{r,0} x^r + a_{r-1,1} x^{r-1} y + \cdots + a_1 x + a_2 y + 1$$

erfüllt, so bleibt noch die Aufgabe zu lösen, die Linearfactoren

$$x u_i + y v_i + 1$$

selbst zu ermitteln.

Nach dem vorigen Paragraphen müssen alsdann die symmetrischen Functionen der Gruppen $u_1 v_1$; $u_2 v_2$; ...; $u_r v_r$ mit den Coefficienten von f übereinstimmen, d. h. es müssen die $\frac{r(r+3)}{2}$ Bedingungen erfüllt werden:

$$(1) \quad \begin{cases} \Sigma u_1 u_2 u_3 \ldots u_{r-1} u_r = a_{r,0}, \\ \Sigma u_1 u_2 u_3 \ldots u_{r-1} v_r = a_{r-1,1}, \\ \Sigma u_1 u_2 u_3 \ldots v_{r-1} v_r = a_{r-2,2}, \\ \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \Sigma v_1 v_2 v_3 \ldots v_{r-1} v_r = a_{0,r}, \end{cases}$$

$$(2) \quad \begin{cases} \Sigma u_1 u_2 \ldots \quad u_{r-1} = a_{r-1,0}, \\ \Sigma u_1 u_2 \ldots u_{r-2} v_{r-1} = a_{r-2,1}, \\ \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \Sigma u_1 u_2 \qquad = a_{11}, \\ \Sigma u_1 v_2 \qquad = a_{12}, \\ \Sigma v_1 v_2 \qquad = a_{22}, \\ \Sigma u_1 \qquad = a_1, \\ \Sigma v_1 \qquad = a_2. \end{cases}$$

Da jede symmetrische Function von r Gruppen auch eine solche für $r-1$ Gruppen, z. B. für $u_2 v_2$; $u_3 v_3$; ...; $u_r v_r$ ist und eine solche höchstens $(r-1)$-förmig sein kann, so sind die Elementarfunctionen dieser Gruppen unmittelbar in den Gleichungen (2) enthalten. Wir können dieselben direct durch die Coefficienten a und die Elemente $u_1 v_1$ der r^{ten} Gruppe ausdrücken und erhalten, indem wir mit den Elementarfunctionen vom Gewicht 1 beginnen:

$$(3) \quad \begin{cases} \begin{cases} \Sigma u_2 = a_1 - u_1, \\ \Sigma v_2 = a_2 - v_1, \end{cases} \\ \begin{cases} \Sigma u_2 u_3 = a_{11} - a_1 u_1 + u_1^2, \\ \Sigma u_2 v_2 = a_{12} - a_1 v_1 - a_2 u_1 + 2 u_1 v_1, \\ \Sigma v_2 v_3 = a_{22} - a_2 v_1 + v_1^2, \end{cases} \\ \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \begin{cases} \Sigma u_2 u_3 \cdots u_r = a_{r,0} - a_{r-1,0} u_1 + a_{r-2,0} u_1^2 - \cdots + (-1)^r u_1^r. \\ \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{cases} \end{cases}$$

Die in Klammer befindlichen Elementarfunctionen sind vom gleichen Gewicht. Von diesen ist je die erste binär und allgemein enthalten in:

$$\Sigma u_2 u_3 \cdots u_{i+1} = a_{i,0} - a_{i-1,0} u_1 + a_{i-2,0} u_1^2 - \cdots + (-1)^i u_1^i.$$

Diese genügt, um alle übrigen Functionen vom gleichen Gewicht zu ermitteln, indem wir den Process

$$\Delta_u^v = \sum \frac{\partial \Sigma u_2 u_3 \ldots u_{i+1}}{\partial u_2} v_2 = \sum \frac{\partial}{\partial a_{k,0}} a_{k-1,1} + \frac{\partial}{\partial u} v$$

mehrmals auf dieselbe anwenden.

Setzen wir die Werthe der in Tabelle (3) enthaltenen symmetrischen Functionen von $r-1$ Gruppen in die Gleichungen (1) ein, so erhalten wir $r+1$ Gleichungen, welche linear hinsichtlich der Coefficienten von f_r sind und die Elemente der Gruppe $u_1 v_1$ im Grade r bezw. 0; im Grade $r-1$, bezw. 1; $r-2$, bezw. 2; ...; im Grade 0, bezw. r enthalten.

Dieselben sind angegeben durch

$$(4)\quad \begin{cases} u^r \quad - a_1 u^{r-1} + a_{11} u^{r-2} - \cdots + (-1)^r a_{r,0} = 0, \\ r u^{r-1} v - (r-1) a_1 u^{r-2} v + (r-2) a_{11} u^{r-2} v - \cdots \\ \qquad - a_2 u^{r-1} + a_{12} u^{r-2} - a_{112} u^{r-3} + \cdots + (-1)^r a_{r-1,1} = 0, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ v^r \quad - a_2 v^{r-1} + a_{22} v^{r-2} - \cdots + (-1)^r a_{0,r} = 0. \end{cases}$$

Da man dieselben Gleichungen auch erhält, wenn man irgend welche $r-1$ unter den r Gruppen $u_1 v_1; u_2 v_2; \ldots; u_r v_r$ eliminirt, so müssen die gemeinschaftlichen Werthe der Gleichungen (4) eben jene r Gruppen sein. Bezeichnet man die erste der Gleichungen (4) mit φ, so ist leicht zu sehen, dass von derselben alle übrigen durch mehrmalige Anwendung der Operation

$$\Delta_u^v \equiv \frac{\partial \varphi}{\partial u} v + \frac{\partial \varphi}{\partial a_1} a_2 + \frac{\partial \varphi}{\partial a_{11}} a_{12} + \frac{\partial \varphi}{\partial a_{111}} a_{112} + \cdots = 0$$

hergeleitet werden können.

Die Bedingungen (4) sind nichts anderes als die r-förmigen symmetrischen Functionen der Differenzen

$$u-u_1,\ v-v_1;\ u-u_2,\ v-v_2;\ u-u_3,\ v-v_3;\ \ldots;\ u-u_r,\ v-v_r$$

und dargestellt durch

$$(5)\quad \begin{cases} \Sigma(u-u_1)(u-u_2)\ldots(u-u_r) = 0, \\ \Sigma(u-u_1)(u-u_2)\ldots(v-v_r) = 0, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \Sigma(v-v_1)(v-v_2)\ldots(v-v_r) = 0. \end{cases}$$

Aus diesen Gleichungen ist unmittelbar ersichtlich, dass die Bedingungen (4), mit denen sie identisch sind, nur durch die Gruppen

$$u_1 v_1;\ u_2 v_2;\ \ldots;\ u_r v_r$$

befriedigt werden.

Da die erste der Gleichungen (4) binär und vom Grade r in u, so erhalten wir die Elemente $u_1 u_2 u_3 \ldots u_r$ als die r Wurzeln der-

selben. Ebenso liessen sich die Elemente $v_1 v_2 v_3 \ldots v_r$ als die r Wurzeln der letzten der Gleichungen (4) ermitteln. Nach Auflösung dieser beiden Gleichungen r^{ten} Grades würde man jedoch vor der Frage stehen, welche Wurzeln derselben zu einer Gruppe $u_i v_i$ zusammengehören. Diese Frage lässt sich umgehen, wenn man an Stelle der zweiten Gleichung r^{ten} Grades die zweite Gleichung in (4) benützt, welche linear ist in v und daher unmittelbar diese Grösse in Function von u liefert.

Um die Coefficienten $u_i v_i$ der linearen Factoren $x u_i + y v_i + 1$ zu ermitteln, hat man demnach nur eine Gleichung r^{ten} Grades)*

$$\varphi \equiv u^r - a_1 u^{r-1} + a_{11} u^{r-2} - \cdots + (-1)^r a_{r,0} = 0$$

aufzulösen. Die zu einer Wurzel u_i derselben gehörige Grösse v_i ist dann unmittelbar ausgedrückt durch:

$$v_i = -\frac{a_2 \dfrac{\partial\varphi}{\partial a_1} + a_{12} \dfrac{\partial\varphi}{\partial a_{11}} + a_{112} \dfrac{\partial\varphi}{\partial a_{111}} + \cdots}{\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}}$$

$$= \frac{a_2 u_i^{r-1} - a_{12} u_i^{r-2} + a_{112} u_i^{r-3} - \cdots}{r u_i^{r-1} - (r-1) a_1 u_i^{r-2} + (r-2) a_{11} u_i^{r-3} - \cdots}.$$

Ist uns beispielsweise die Form dritten Grades

$$f \equiv 6x^3 - x^2 y - 18 x y^3 - 8 y^2 + 11 x^2 + 6 x y - 6 y^2 + 6 x + 3 y + 1 = 0$$

gegeben, so erhalten wir zur Ermittelung der Coefficienten $u_1 u_2 u_3$, $v_1 v_2 v_3$ der Linearfactoren $x u_i + y v_i + 1$ die Bestimmungsgleichungen:

$$u^3 - 6u^2 + 11u - 6 = 0,$$

$$v_1 = \frac{3u^2 - 6u - 1}{3u^2 - 12u + 11},$$

welche aufgelöst geben

$$u_1 = 2,\ v_1 = 1;\quad u_2 = 1,\ v_2 = -2;\quad u_3 = 3,\ v_3 = 4.$$

*) Dass zur Ermittelung der Linearfactoren einer zerfallenden Curve r^{ter} Ordnung die Auflösung einer *einzigen* Gleichung r^{ten} Grades genügt, hat Herr Gordan in folgender einfachen Weise bewiesen: Bezeichnet man mit ξ, η zwei beliebige Punkte im Dreieckscoordinatensystem, so ist ein Punkt der Verbindungslinie derselben angegeben durch $\xi + \lambda\eta$ und die Schnittpunkte dieser Geraden mit f_r durch

$$\xi + \lambda_1 \eta,\ \xi + \lambda_2 \eta, \ldots, \xi + \lambda_r \eta,$$

wo

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$$

die Wurzeln der Gleichung r^{ten} Grades

$$f(\xi + \lambda\eta) = 0$$

sind. Die Tangenten in diesen Schnittpunkten sind die Geraden, aus denen die Curve besteht.

Diesen Werthen entsprechen die Linearfactoren:

$$2x+y+1,\quad x-2y+1,\quad 3x+4y+1,$$

deren Product mit der Form f übereinstimmt.

§ 19.

Die ternäre Form 2ten Grades.

Die ternäre Form

$$f_2 \equiv a_{11}x^2 + a_{12}xy + a_{22}y^2 + a_1x + a_2y + 1$$

zerfällt in Linearfactoren, wenn ihre Coefficienten der Bedingung genügen:

$$II_{22} \equiv a_1^2 a_{22} + a_2^2 a_{11} + a_{12}^2 - 4a_{11}a_{22} - a_1 a_2 a_{12} = 0.$$

Schreibt man die Form f in den ursprünglichen Coefficienten

$$f = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + a_{22}y^2 + 2a_{23}yz + a_{33}z^2,$$

wo die Binomialcoefficienten beibehalten sind, so ist diese Bedingung auch ausgedrückt durch:

$$0 = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \equiv a_{11}a_{23}^2 + a_{22}a_{13}^2 + a_{33}a_{12}^2 - a_{11}a_{22}a_{33} - 2a_{12}a_{13}a_{23},$$

welche vom dritten Grad in den Coefficienten von f ist.

Die Linearfactoren sind dann angegeben durch:

$$x\left(a_{13} + \sqrt{a_{13}^2 - a_{11}a_{33}}\right) + y\left(a_{23} + \sqrt{a_{23}^2 - a_{22}a_{33}}\right) + a_{33},$$

$$x\left(a_{13} - \sqrt{a_{13}^2 - a_{11}a_{33}}\right) + y\left(a_{23} - \sqrt{a_{23}^2 - a_{22}a_{33}}\right) + a_{33}.$$

§ 20.

Die zerfallende ternäre Form dritten Grades.

Die ternäre Form

$$f_3 \equiv a_{111}x^3 + a_{112}x^2y + a_{122}xy^2 + a_{222}y^3 + f_2 = 0$$

zerfällt in drei lineare Factoren, wenn die Bedingungen erfüllt sind:

$$III_{32} = 0,\qquad III_{23} = 0,$$

$$III_{42} = 0,\qquad III_{33} = 0,\qquad III_{24} = 0,$$

welche nach § 16, 7 nicht unabhängig von einander, sondern durch zwei Identitäten verknüpft sind und daher nur drei unabhängige Bedingungen repräsentiren, wie es sein soll,

Nehmen wir die ternäre Form f_3 in der gewöhnlichen Gestalt an:

$$f_3 = a_{111}x^3 + a_{112}x^2y + a_{122}xy^2 + a_{222}y^3 + a_{113}x^2z + a_{123}xyz$$
$$+ a_{223}y^2z + a_{133}xz^2 + a_{233}yz^2 + a_{333}z^3,$$

so sind diese Bedingungen angegeben durch:

$$\begin{aligned}
III_{327} \equiv\ & a_{133}\, II_{225} - a_{333}\,\{+3a_{111}\,(3a_{233}^2 - a_{333}\,a_{223}) \\
& \qquad - a_{112}(2a_{133}a_{233} - 3a_{123}a_{333}) \\
& \qquad + a_{122}(a_{133}^2 - 3a_{113}a_{333})\} = 0, \\
III_{237} =\ & a_{233}\, II_{225} - a_{333}\,\{3a_{222}(a_{133}^2 - 3a_{113}a_{333}) \\
& \qquad - a_{122}(2a_{133}a_{233} - 3a_{123}a_{333}) \\
& \qquad + a_{112}(a_{233}^2 - 3a_{223}a_{333})\} = 0, \\
III_{426} =\ & - a_{113}\, II_{225} + a_{333}\,\{-3a_{133}a_{223}a_{111} + 3a_{233}a_{123}a_{111} \\
& \qquad + a_{133}a_{113}a_{122} - 9a_{111}a_{122}a_{333} \\
& \qquad - 2a_{233}a_{113}a_{112} + 3a_{112}^2a_{333}\} = 0, \\
III_{336} =\ & - a_{123}\, II_{225} + a_{333}\,\{3a_{133}a_{113}a_{222} + 3a_{233}a_{223}a_{111} \\
& \qquad + a_{133}a_{123}a_{122} + a_{233}a_{123}a_{112} \\
& \qquad - 3a_{133}a_{223}a_{112} - 3a_{233}a_{113}a_{122} \\
& \qquad - 27a_{111}a_{222}a_{333} + 3a_{112}a_{122}a_{333}\} = 0, \\
III_{246} =\ & - a_{223}\, II_{225} + a_{333}\,\{-3a_{233}a_{113}a_{222} + 3a_{133}a_{123}a_{222} \\
& \qquad + a_{233}a_{223}a_{112} - 9a_{222}a_{112}a_{333} \\
& \qquad - 2a_{133}a_{223}a_{122} + 3a_{122}^2a_{333}\} = 0,
\end{aligned}$$

wo

$$II_{225} = a_{133}^2a_{223} + a_{233}^2a_{113} - a_{133}a_{233}a_{123} - 4a_{113}a_{223}a_{333} + a_{123}^2a_{333}$$

ist.

Dieselben sind sämmtlich vom 4ten Grad in den Coefficienten von f.

Bezeichnen wir die Linearfactoren mit

$$xu_i + yv_i + 1, \qquad (i = 1, 2, 3)$$

so erhalten wir die Elemente der Reihe $u_1 u_2 u_3$ als die Wurzeln der cubischen Gleichung:

$$u^3 - a_1 u^2 + a_{11} u - a_{111} = 0$$

und die Elemente der Reihe $v_1 v_2 v_3$ unmittelbar aus:

$$v_i = \frac{a_2 u_i^2 - a_{12} u_i + a_{112}}{3u_i^2 - 2a_1 u_i + a_{11}}.$$

§ 21.

Die ternäre Form 4ten Grades:

$$f_4 \equiv a_{1111}\,x^4 + a_{1112}x^3y + a_{1122}x^2y^2 + a_{1222}\,xy^3 + a_{2222}y^4 + f_3 = 0$$

zerfällt in lineare Factoren, wenn ihre Coefficienten den Bedingungen 5. Grades genügen:

$$
\begin{array}{lllll}
IV_{42}{}^{*}) = 0, & IV_{33}{}^{*}) = 0, & IV_{24} \;\; = 0, & & \\
IV_{52}{}^{*}) = 0, & IV_{43}{}^{*}) = 0, & IV_{34} \;\; = 0, & IV_{25} = 0, & \\
IV_{62}{}^{*}) = 0, & IV_{53}{}^{*}) = 0, & IV_{44}{}^{*}) = 0, & IV_{35} = 0, & IV_{26} = 0,
\end{array}
$$

von denen nur sechs als unabhängige zu betrachten sind. Dieselben sind sämmtlich vom 5ten Grad in den Coefficienten von f.

Nimmt man die Form f in den ursprünglichen Coefficienten an, so sind beispielsweise die mit *) bezeichneten Bedingungen ausgedrückt durch:

$$
\begin{aligned}
IV_{4,2,14} = \;& 3a_{1333}\, III_{3,2,11} + 2a_{3333}\, III_{4,2,10} \\
& + a_{2333}^{2}\{6a_{1111}(3a_{2333}^{2} - 8a_{2233}a_{3333}) \\
& \qquad - 3a_{1112}(3a_{1333}a_{2333} - 4a_{1233}a_{3333}) \\
& \qquad + a_{1122}(3a_{1333}^{2} - 8a_{1133}a_{3333})\} = 0,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
IV_{3,3,14} = \;& 3a_{1333}\, III_{2,3,11} + 3a_{2333}\, III_{3,2,11} + a_{3333}\, III_{3,3,10} \\
& + a_{3333}^{2}\{3a_{1112}(3a_{2333}^{2} - 8a_{2233}a_{3333}) \\
& \qquad - 4a_{1122}(3a_{1333}a_{2333} - 4a_{1233}a_{3333}) \\
& \qquad + 3a_{1222}(3a_{1333}^{2} - 8a_{1133}a_{3333})\} = 0,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
IV_{5,2,13} \equiv \;& - a_{1133}\, III_{3,2,11} \\
& + a_{3333}^{2}\{6a_{1111}(a_{1333}a_{2233} - a_{2333}a_{1233} + 2a_{1223}a_{3333}) \\
& \qquad + 3a_{1112}(a_{2333}a_{1133} - 2a_{1123}a_{3333}) \\
& \qquad - a_{1122}(a_{1333}a_{1133} - 6a_{1113}a_{3333})\} = 0.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
IV_{4,3,13} \equiv \;& - a_{1233}\, III_{3,2,11} - a_{1133}\, III_{2,3,11} \\
& + a_{3333}^{2}\{- 6a_{1111}a_{2333}a_{2233} - 6a_{2223}a_{3333}) \\
& \qquad + 3a_{1112}(2a_{1333}a_{2233} - a_{2333}a_{1233}) \\
& \qquad + a_{1122}(5a_{2333}a_{1133} - a_{1333}a_{1233} - 6a_{1123}a_{3333}) \\
& \qquad - 3a_{1222}(a_{1333}a_{11333} - 6a_{1113}a_{3333})\} = 0,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
IV_{6,2,12} \equiv \;& a_{1113}\, III_{3,2,11} + 2a_{1111}\, II_{2,2,12} \\
& + a_{3333}^{2}\{+ 2a_{1111}(- a_{1333}a_{1223} + 2a_{2333}a_{1123} - 4a_{1122}a_{3333}) \\
& \qquad - 3a_{1112}(a_{2333}a_{1113} - 2a_{1112}a_{3333}) \\
& \qquad + a_{1122}(a_{1333}a_{1113} - 8a_{1111}a_{3333})\} = 0.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
IV_{5,3,12} \equiv \;& a_{1123}\, III_{3,2,11} + a_{1113}\, III_{2,3,11} + 2a_{1112}\, II_{2,2,12} \\
& + a_{3333}^{2}\{6a_{1111}(- a_{1333}a_{2223} + a_{2333}a_{1223} - 3a_{1222}a_{3333}) \\
& \qquad - a_{1112}(2a_{1333}a_{1223} - a_{2333}a_{1123} - 4a_{1122}a_{3333}) \\
& \qquad - a_{1122}(5a_{2333}a_{1113} - a_{1333}a_{1123} - 4a_{1112}a_{3333}) \\
& \qquad + 3a_{1222}(a_{1333}a_{1113} - 8a_{1111}a_{3333})\} = 0,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
IV_{4,4,12} \equiv 2a_{1223}\, III_{3,2,11} &+ 2a_{1123}\, III_{2,3,11} + 4a_{1122}\, II_{2,2,12} \\
+ a_{3333}^2 \{ 6a_{1111}(a_{2333}a_{2223} &- 8a_{2222}a_{3333}) \\
&+ 3a_{1112}(a_{2333}a_{1223} - 4a_{1333}a_{2223} - 2a_{1222}a_{3333}) \\
&- a_{1122}(a_{1333}a_{1223} + a_{2333}a_{1123} - 8a_{1122}a_{3333}) \\
&+ 3a_{1222}(a_{1333}a_{1123} - 4a_{2333}a_{1113} - 2a_{1112}a_{3333}) \\
&+ 6a_{2222}(a_{1333}a_{1113} - 8a_{1111}a_{3333})\} = 0.
\end{aligned}
$$

Die übrigen Bedingungen erhalten wir hieraus unmittelbar durch Vertauschung der Indices 1 und 2.

Die mit $III_{3,2,11}$; $III_{2,3,11}$; $III_{4,2,10}$; $III_{3,3,10}$ bezeichneten Ausdrücke geben die Bedingungen der Zerfällbarkeit (von $z \cdot f_3$ in f_4) einer Form dritten Grades an, geschrieben in den entsprechenden Coefficienten von f_4.

Die oben erhaltenen Bedingungen sind zusammengenommen symmetrisch hinsichtlich der Indices 1 und 2.

Vertauscht man daher in denselben die Indices 1 und 3, bezw. 2 und 3, so resultiren zwei weitere Systeme von Bedingungen, deren Verschwinden ebenfalls die Zerfällbarkeit der Form f_4 nothwendig verlangt.

Erfüllen die Coefficienten von f_4 die angegebenen Bedingungen, so ergeben sich die Coefficienten u_1, u_2, u_3, u_4 der Linearfactoren:

$$xu_i + yv_i + 1$$

als die Wurzeln der biquadratischen Gleichung:

$$a_{3333}u^4 - a_{1333}u^3 + a_{1133}u^2 - a_{1113}u + a_{1111} = 0.$$

Der zu einer dieser Wurzeln gehörige Coefficient v_i ist alsdann angegeben durch:

$$v_i = \frac{a_{2333}u_i^3 - a_{1233}u_i^2 + a_{1123}u_i - a_{1112}}{4a_{3333}u_i^3 - 3a_{1333}u_i^2 + 2a_{1133}u_i - a_{1113}}.$$

§ 22.

Die Bedingungen der Zerfällbarkeit einer quaternären Form.

Stellt

$$f\overline{(xyzt)}^{(r)} = 0$$

eine quaternäre Form r^{ten} Grades dar, so besitzt dieselbe bekanntlich $\binom{r+3}{3}$ Glieder und demnach $\binom{r+3}{3} - 1$ unabhängige Coefficienten. Die Gleichung derselben lässt sich deshalb auf die Form bringen:

(1) $f \equiv a_{r,0,0}x^r + a_{r-1,1,0}x^{r-1}y + \cdots + a_1x + a_2y + a_3z + 1 = 0,$

deren Coefficienten entsprechend den Potenzen und Producten von (xyz) bezeichnet sind, denen sie angehören.

Soll dieselbe in zwei Formen vom Grade r_1, bezw. r_2 zerfallen, so müssen ihre Coefficienten durch

$$(2)\quad s = \binom{r+3}{3} - \binom{r_1+3}{3} - \binom{r_2+3}{3} - 1 = \frac{1}{6}\{r^3 - r_1^3 - r_2^3\} + r^2 - r_1^2 - r_2^2$$

identische Beziehungen untereinander verbunden sein, die man in ähnlicher Weise erhält, wie die analogen in § 16. Ebenso findet man allgemein, dass eine quaternäre Form r^{ten} Grades f_r in i Factoren $f_{r_1}, f_{r_2}, \ldots, f_{r_i}$ zerfällt, wo $r = \sum_1^i r_1$ ist, wenn zwischen ihren Coefficienten:

$$s = \frac{1}{6}\left(r^3 - \sum_1^i r_1^3\right) + r^2 - \sum_1^i r_1^2$$

Beziehungen bestehen, über deren Gestalt noch nichts bekannt sein dürfte.

Zerfällt die Form f_r in r lineare Factoren, so ist

$$r_1 = r_2 = \cdots r_r = 1,$$

womit diese Zahl übergeht in

$$s = \frac{r(r-1)(r+7)}{6},$$

die Anzahl der Relationen zwischen den Elementarfunctionen von r Gruppen des quaternären Gebietes.

Bezeichnen wir mit

$$\begin{aligned} g_1 &= xu_1 + yv_1 + zw_1 + 1, \\ g_2 &= xu_2 + yv_2 + zw_2 + 1, \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ g_r &= xu_r + yv_r + zw_r + 1 \end{aligned}$$

r lineare Factoren, so stellt deren Product

$$G = g_1 g_2 \cdots g_r$$

eine in eben diese Factoren zerfallende Form r^{ten} Grades dar. Dasselbe ist eine symmetrische Function der Gruppen

$$(3)\quad u_1 v_1 w_1;\ u_2 v_2 w_2;\ u_3 v_3 w_3;\ \ldots;\ u_r v_r w_r.$$

Da es auch eine lineare Function hinsichtlich der Elemente jeder dieser Gruppen ist, so kann es linear durch die Elementarfunctionen derselben

$$b_{r,0,0};\ b_{r-1,1,0};\ b_{r-2,1,1};\ \ldots;\ b_1,\ b_2,\ b_3,$$

dargestellt werden.

Soll die Function f_r mit diesem Product identisch sein, d. h. soll dieselbe ebenfalls in r lineare Factoren zerfallen, so müssen die Bedingungen erfüllt werden:

$$(4)\quad \begin{cases} \Sigma u_1 u_2 \ldots u_r \quad = a_{r,0,0}; & \Sigma u_1 u_2 \ldots v_r \quad = a_{r-1,1,0}; \ldots; \Sigma w_1 w_2 \ldots w_r = a_{0,0,r}; \\ \Sigma u_1 u_2 \ldots u_{r-1} = a_{r-1,0,0}; & \Sigma u_1 u_2 \ldots v_{r-1} = a_{r-2,1,0}; \ldots \\ \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \\ \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \\ \Sigma u_1 \qquad = a_1; & \Sigma v_1 \qquad = a_2; \qquad \Sigma w_1 \qquad = a_3, \end{cases}$$

deren Anzahl $\binom{r+3}{3} - 1$ ist.

Da nun die symmetrischen Functionen der Gruppen (3) durch

$$s = \frac{r(r-1)(r+7)}{6}$$

identische Relationen verbunden sind, so müssen, wenn die Gleichungen (4) bestehen sollen, nothwendig dieselben Bedingungen auch für die Coefficienten von f_r erfüllt werden. Ist dies der Fall, so reduciren sich die Gleichungen (4) auf

$$\binom{r+3}{3} - 1 - \frac{r(r-1)(r+7)}{6} = 3r$$

unabhängige Bedingungen, die als solche hinreichen, um die $2r$ Elemente

$$u_1 v_1 w_1;\ u_2 v_2 w_2;\ \ldots;\ u_r v_r w_r$$

und damit auch die Linearfactoren selbst eindeutig zu ermitteln. Das Verschwinden von $\frac{r(r-1)(r+7)}{6}$ Beziehungen zwischen den Coefficienten von f von der Form der Relationen des quaternären Gebietes stellt daher die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen dar, dass eine quaternäre Form r^{ten} Grades in r Linearfactoren zerfällt.

Wir erhalten somit den Satz:

Jede quaternäre Form r^{ten} Grades zerfällt in r lineare Factoren von der Form $xu_i + yv_i + zw_i + 1$, wenn ihre Coefficienten:

$$a_{r,0,0};\ a_{r-1,1,0};\ \ldots;\ a_1,\ a_2,\ a_3$$

die

$$s = \frac{r(r-1)(r+7)}{6}$$

(unabhängigen) *Relationen zum Verschwinden bringen, welche zwischen den Elementarfunctionen der $3r$ Coefficienten dieser Factoren bestehen.*

Sind die Bedingungen der Zerfällbarkeit erfüllt, so kann man die Linearfactoren $xu_i + yv_i + zw_i + 1$ selbst in ähnlicher Weise ermitteln wie die betreffenden für ternäre Formen.

Bildet man die $3r$ Differenzen

$$u - u_i,\ v - v_i,\ w - w_i$$

und die r-förmigen symmetrischen Functionen derselben:

$$(5)\qquad \begin{cases} \Sigma(u-u_1)\,(u-u_2)\ldots(u-u_r), \\ \Sigma(u-u_1)\,(u-u_2)\ldots(v-v_r), \\ \Sigma(u-u_1)\,(u-u_2)\ldots(w-w_r), \\ \quad\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \quad\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \Sigma(w-w_1)\,(w-w_2)\ldots(w-w_r), \end{cases}$$

so verschwindet jede derselben identisch, sobald die Gruppe uvw mit irgend einer Gruppe $u_iv_iw_i$ zusammenfällt. Die $3r$ Coefficienten $u_iv_iw_i$ der r Linearfactoren lassen sich somit als die gemeinschaftlichen Werthe der gleich Null gesetzten Functionen (5) betrachten. Da dieselben lineare symmetrische Functionen der Gruppen $u_iv_iw_i$ sind, so lassen sie sich durch die Elementarfunctionen b derselben ausdrücken. Ersetzt man die letzteren vermöge der Bedingungen (4) durch die Coefficienten von f, so erhält man die Elemente $u_iv_iw_i$ als die gemeinschaftlichen Werthe des Systems von $r+1$ Gleichungen:

$$(6)\begin{cases} \varphi \equiv u^r - a_1u^{r-1} + a_{11}u^{r-2} - \cdots + (-1)^r a_{r,0,0} = 0, \\ ru^{r-1}v - (r-1)a_1u^{r-2}v + (r-2)a_{11}u^{r-3}v - \cdots - a_2u^{r-1} + a_{12}u^{r-2} - \cdots = 0, \\ ru^{r-1}w - (r-1)a_1u^{r-2}w + (r-2)a_{11}u^{r-3}w - \cdots - a_3u^{r-1} + a_{13}u^{r-2} - \cdots = 0, \\ \quad\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \quad\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ w^r - a_3w^{r-1} + a_{33}w^{r-2} - \cdots + (-1)^r a_{0,0,r} = 0, \end{cases}$$

von denen die drei ersten zur Bestimmung der Elemente $u_iv_iw_i$ genügen. Die erste derselben ist binär und liefert unmittelbar als Wurzeln die Elemente $u_1u_2u_3\ldots u_r$. Da die beiden andern hinsichtlich v und w linear sind, so ergeben sich die zu einer dieser Wurzeln u_i gehörigen Elemente v_i und w_i direct aus:

$$v_i = \frac{a_2u_i^{r-1} - a_{12}u_i^{r-2} + a_{112}u_i^{r-3} - \cdots}{ru_i^{r-1} - (r-1)a_1u_i^{r-2} + (r-2)a_{11}u_i^{r-3} - \cdots},$$

$$w_i = \frac{a_3u_i^{r-1} - a_{13}u_i^{r-2} + a_{113}u_i^{r-3} - \cdots}{ru_i^{r-1} - (r-1)a_1u_i^{r-2} + (r-2)a_{11}u_i^{r-3} - \cdots}.$$

Die quaternäre Form zweiten Grades

$$f \equiv a_{11}x^2 + a_{12}xy + a_{13}xz - a_{22}y^2 + a_{23}yz + a_{33}z^2 \\ + a_1x + a_2y + a_3z + 1$$

zerfällt in zwei lineare Factoren, wenn die drei Bedingungen erfüllt sind:

$$\Pi_{211} = a_1^2a_{23} + 2a_2a_3a_{11} - 4a_{11}a_{23} - a_1a_2a_{13} - a_1a_3a_{12} \\ + 2a_{12}a_{13} = 0,$$

$$II_{121} = a_2{}^2 a_{13} + 2 a_1 a_3 a_{22} - 4 a_{22} a_{13} - a_1 a_2 a_{23} - a_2 a_3 a_{12} - 2 a_{12} a_{23} = 0,$$
$$II_{112} = a_3{}^2 a_{12} + 2 a_1 a_2 a_{33} - 4 a_{33} a_{12} - a_2 a_3 a_{13} - a_1 a_3 a_{23} + 2 a_{23} a_{13} = 0.$$

Schreibt man die Form in den gewöhnlichen Coefficienten, so lauten diese Bedingungen:

$$II_{211} \equiv a_{14}^2 a_{23} + 2 a_{24} a_{34} a_{11} - 4 a_{11} a_{44} a_{23} - a_{14} a_{24} a_{13} - a_{14} a_{34} a_{12} + 2 a_{12} a_{13} a_{44} = 0,$$
$$II_{121} \equiv a_{24}^2 a_{13} + 2 a_{14} a_{34} a_{22} - 4 a_{22} a_{44} a_{13} - a_{14} a_{24} a_{23} - a_{24} a_{34} a_{12} + 2 a_{12} a_{23} a_{44} = 0,$$
$$II_{112} \equiv a_{34}^2 a_{12} + 2 a_{14} a_{34} a_{33} - 4 a_{33} a_{44} a_{12} - a_{24} a_{34} a_{13} - a_{14} a_{34} a_{23} + 2 a_{23} a_{13} a_{44} = 0.$$

§ 23.

Die Bedingungen der Zerfällbarkeit einer Form r^{ten} Grades von beliebig vielen Variabeln.

Nach den Erörterungen in den vorhergehenden Paragraphen leuchtet ein, dass die Bedingungen der Zerfällbarkeit einer Form r^{ten} Grades $f(xyz \ldots v)$ von n Variabeln $xyz \ldots v$ oder von $(n+1)$ homogenen $xyz \ldots vw$ in lineare Factoren

$$x\alpha_i + y\beta_i + z\gamma_i + \cdots + v\tau_i + 1$$
$$(i = 1, 2, 3, \ldots, r)$$

ebenfalls an das Verschwinden der Relationen zwischen den Elementarfunctionen der Gruppen

$$(1) \qquad \begin{cases} \alpha_1\, \beta_1\, \gamma_1 \ldots \tau_1, \\ \alpha_2\, \beta_2\, \gamma_2 \ldots \tau_2, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \alpha_r\, \beta_r\, \gamma_r \ldots \tau_r \end{cases}$$

geknüpft ist. Diese Bedingungen sind ebenfalls vom Grade $r+1$ in den Coefficienten von f.

Da die Zahl der Elemente des Systems (1) rn und die der Elementarfunctionen $\binom{r+n}{r} - 1$ ist, so ist die Anzahl dieser Bedingungen angegeben durch:

$$s = \binom{r+n}{r} - rn - 1.$$

Sind diese Bedingungen erfüllt, so erhält man in derselben Weise wie oben die Elemente

$$\alpha_1\, \alpha_2 \ldots \alpha_r$$

durch Auflösung der Gleichung r^{ten} Grades:

$$u^r - a_1 u^{r-1} + a_{11} u^{r-2} - \cdots + (-1)^r a_r = 0$$

und die zu einer dieser Wurzeln α_i gehörigen Elemente

$$\beta_i,\ \gamma_i,\ \ldots,\ \tau_i$$

aus

$$\beta_i = \frac{a_2\alpha_i^{r-1} - a_{12}\alpha_i^{r-2} + a_{112}\alpha_i^{r-3} - \cdots}{r\alpha_i^{r-1} - (r-1)a_1\alpha_i^{r-2} + (r-2)a_{11}\alpha_i^{r-3} - \cdots},$$

$$\gamma_i = \frac{a_3\alpha_i^{r-1} - a_{13}\alpha_i^{r-2} + a_{113}\alpha_i^{r-3} - \cdots}{r\alpha_i^{r-1} - (r-1)a_1\alpha_i^{r-2} + (r-2)a_{11}\alpha_i^{r-3} - \cdots},$$

$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$

$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$

$$\tau_i = \frac{a_n\alpha_i^{r-1} + a_{1n}\alpha_i^{r-2} + a_{11n}\alpha_i^{r-3} - \cdots}{r\alpha_i^{r-1} - (r-1)a_1\alpha_i^{r-2} + (r-2)a_{11}\alpha_i^{r-3} - \cdots}.$$

Die quinäre Form 2. Grades

$$f_2 \equiv a_{11}x^2 + a_{12}xy + a_{13}xz + \cdots + a_1 x + a_2 y + a_3 z + a_4 t + 1$$

zerfällt in lineare Factoren, wenn die drei Bedingungen dritten Grades

	$a_1a_2a_{34}$	$a_1a_3a_{24}$	$a_1a_4a_{23}$	$a_2a_3a_{14}$	$a_2a_4a_{13}$	$a_3a_4a_{12}$	$a_{12}a_{34}$	$a_{13}a_{24}$	$a_{14}a_{23}$
II_{1111}	2	-1	-1	-1	-1	2	-4	2	2
II'_{1111}	-1	2	-1	-1	2	-1	2	-4	2
II''_{1111}	-1	-1	2	2	-1	-1	2	2	-4

und die vier Bedingungen vierten Grades, von denen nur eine angegeben werden möge, erfüllt sind:

$$\begin{aligned} II_{2111} \equiv &+ 6a_{11}a_2a_3a_4 + (a_1^2 - 4a_{11})(a_2a_{34} + a_3a_{24} + a_4a_{23}) \\ &- 2a_1(a_2a_3a_{14} + a_2a_4a_{13} + a_3a_4a_{12} - a_{12}a_{34} - a_{13}a_{24} - a_{14}a_{23}) \\ &+ 2(a_2a_{13}a_{14} + a_3a_{12}a_{14} + a_4a_{12}a_{13}) = 0. \end{aligned}$$

Die übrigen II_{1211}, II_{1121}, II_{1112} erhalten wir hieraus durch Vertauschung der Indices 1 mit 2, 3, 4.

Da zwischen den ersten drei die lineare Identität besteht:

$$II_{1111} + II'_{1111} + II''_{1111} \equiv 0,$$

so repräsentiren sie auch nur zwei unabhängige Bedingungen. Die Zerfällbarkeit der Form f_2 ist demnach an das Verschwinden von sechs unabhängigen Bedingungen zwischen den Coefficienten derselben geknüpft.

§ 24.

Die in r gerade Linien, r Punkte zerfallende Curve r^{ter} Ordnung, bezw. r^{ter} Classe.

Die Erörterungen des § 17 lassen sich unmittelbar auf die Geometrie der Ebene übertragen.

Bezeichnen wir mit

$$\begin{array}{c|c|c}
u_1\, v_1, & & x_1\, y_1, \\
u_2\, v_2, & & x_2\, y_2, \\
\cdot\;\cdot\;\cdot & (1) & \cdot\;\cdot\;\cdot \\
\cdot\;\cdot\;\cdot & & \cdot\;\cdot\;\cdot \\
u_r\, v_r & & x_r\, y_r
\end{array}$$

die Coordinaten von r

Geraden	Punkten
$g_1, g_2, \ldots, \ldots, g_r$	$P_1, P_2, \ldots, \ldots, P_r$

der Ebene, so sind deren Gleichungen angegeben durch:

$$\begin{array}{l|c|l}
xu_1 + yv_1 + 1 = 0, & & ux_1 + vy_1 + 1 = 0, \\
xu_2 + yv_2 + 1 = 0, & & ux_2 + vy_2 + 1 = 0, \\
\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & (2) & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\
\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\
xu_r + yv_r + 1 = 0. & & ux_r + vy_r + 1 = 0.
\end{array}$$

Das Product dieser

r Geraden	r Punkte
$G = g_1 g_2 g_3 \ldots g_r \equiv x^r b_{r,0} + x^{r-1} y b_{r-1,1} + \cdots + b_1 x + b_2 y = 1,$	$P = P_1 P_2 P_3 \ldots P_r = u^r a_{r,0} + u^{r-1} v a_{r-1,1} + \cdots + a_1 u + a_2 v + 1 = 0,$

stellt alsdann eine in

r gerade Linien	r Punkte

zerfallende Curve

r^{ter} Ordnung	r^{ter} Classe

dar.

Soll nun eine andere Curve

r^{ter} Ordnung	r^{ter} Classe
$\overset{(r)}{\overline{f(xy)}} = a_{r,0} x^r + a_{r-1,1} x^{r-1} y + \cdots + a_1 x + a_2 y + 1$	$\overset{(r)}{\overline{\varphi(uv)}} = b_{r,0} u^r + b_{r-1,1} u^{r-1} v + \cdots + b_1 u + b_2 v + 1$

ebenfalls in

r gerade Linien	r Punkte

zerfallen, so müssen offenbar ihre Coefficienten:

$a_{r,0}, a_{r-1,1}, \ldots, a_1, a_2$	$b_{r,0}, b_{r-1,1}, \ldots, b_1, b_2$

mit den Coefficienten des Products

$g_1 g_2 \ldots g_r$	$P_1 P_2 \ldots P_r$

übereinstimmen, d. h. es müssen die $\binom{r+2}{2}-1$ Bedingungen erfüllt sein:

$$(3) \qquad \left\{\begin{array}{ll} b_{r,0} & = a_{r,0}, \\ b_{r-1,1} & = a_{r-1,1}, \\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot \\ b_1 & = a_1, \\ b_2 & = a_2. \end{array}\right.$$

Da nun bekanntermassen zwischen den symmetrischen Functionen der Coordinaten der

r Geraden	r Punkte

$\frac{r(r-1)}{2}$ identische Relationen bestehen, so muss dies *nothwendig* auch für die Coefficienten von f der Fall sein. Alsdann reduciren sich die Gleichungen (3) auf $2r$ unabhängige Bedingungen, welche hinreichen, um die $2r$ Coordinaten

$u_1 v_1;\ u_2 v_2;\ \ldots;\ u_r v_r$	$x_1 y_1;\ x_2 y_2;\ \ldots;\ x_r y_r$
der r Geraden	der r Punkte
$g_1, g_2, \ldots, g_r$	$P_1, P_2, \ldots, P_r$

eindeutig zu ermitteln.

Es gilt deshalb der Satz:

Jede Curve r^{ter} Ordnung, bezw. r^{ter} Classe, zerfällt in r gerade Linien, bezw. r Punkte, wenn ihre Coefficienten den $\frac{r}{2}(r-1)$ Relationen genügen, welche zwischen den Coordinaten von r Geraden, bezw. r Punkten bestehen.

§ 25.

Die in r Ebenen, bezw. r Punkte zerfallende Fläche r^{ter} Ordnung, bezw. r^{ter} Classe.

Auf den Raum übertragen lautet dieser Satz:

Eine Fläche

r^{ter} Ordnung	r^{ter} Classe
$\overset{(r)}{\overline{f(xyz)}} = 0$	$\varphi\overset{(r)}{\overline{(uvw)}} = 0$

zerfällt in

r Ebenen	r Punkte
$x u_i + y v_i + z w_i + 1$	$u x_i + v y_i + w z_i + 1$

$$(i = 1, 2, 3, \ldots, r)$$

wenn ihre Coefficienten

$a_{r,0,0}$; $a_{r-1,1,0}$; $\ldots$; a_1; a_2; a_3	$b_{r,0,0}$; $b_{r-1,1,0}$; $\ldots$; b_1; b_2; b_3

den

$$s = \frac{r(r-1)(r+7)}{6}$$

identischen Relationen genügen, welche zwischen den Elementarfunctionen der Coordinaten

dieser Ebenen	dieser Punkte

bestehen.

Erfüllen die Coefficienten der Flächengleichung diese Bedingungen, so berechnen sich die Coordinaten

$u_1 \, u_2 \, u_3 \ldots u_r$	$x_1 \, x_2 \, x_3 \ldots x_r$

als die Wurzeln der Gleichung r^{ten} Grades

$u^r - a_1 u^{r-1} + a_{11} u^{r-1} - \cdots + (-1)^r a_{r,0,0} = 0$	$x^r - b_1 x^{r-1} + b_{11} x^{r-2} - \cdots + (-1)^r b_{r,0,0} = 0$

und die zwei zugehörigen Reihen:

$v_1 \, v_2 \, v_3 \ldots v_r$,	$y_1 \, y_2 \, y_3 \ldots y_r$,
$w_1 \, w_2 \, w_3 \ldots w_r$,	$z_1 \, z_2 \, z_3 \ldots z_r$

unmittelbar aus

$v_i = \dfrac{a_2 u_i^{r-1} - a_{12} u_i^{r-2} + a_{112} u_i^{r-3} - \cdots}{r u_i^{r-1} - (r-1) a_1 u_i^{r-2} + \cdots}$,	$y_i = \dfrac{b_2 x_i^{r-1} - b_{12} x_i^{r-2} + b_{112} x_i^{r-3} - \cdots}{r x_i^{r-1} - (r-1) b_1 x_i^{r-2} + \cdots}$,
$w_i = \dfrac{a_3 u_i^{r-1} - a_{13} u_i^{r-2} + a_{113} u_i^{r-3} - \cdots}{r u_i^{r-1} - (r-1) a_1 u_i^{r-2} + \cdots}$,	$z_i = \dfrac{b_3 x_i^{r-1} - b_{13} x_i^{r-2} + b_{113} x_i^{r-3} - \cdots}{r x_i^{r-1} - (r-1) b_1 x_i^{r-2} + \cdots}$.

§ 26.

Identitäten zwischen den Elementarfunctionen eines Punktsystems in der Ebene.

Sind uns r gerade Linien

$$g_1, g_2, g_3, \ldots, g_r$$

in der Ebene mit den Coordinaten

$$u_1 v_1, \; u_2 v_2, \; u_3 v_3, \; \ldots, \; u_r v_r$$

oder den homogenen Coordinaten

$$u_1 v_1 w_1,\ u_2 v_2 w_2,\ u_3 v_3 w_3,\ \ldots,\ u_r v_r w_r$$

gegeben, so sind dieselben bekanntlich dargestellt durch

$$(1)\qquad \begin{cases} g_1 = x u_1 + y v_1 + 1 = 0, \\ g_2 = x u_2 + y v_2 + 1 = 0, \\ \quad \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \quad \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ g_r = x u_r + y v_r + 1 = 0. \end{cases}$$

Das Product derselben

$$(2)\quad G \equiv (xu_1 + yv_1 + 1)(xu_2 + yv_2 + 1)\ldots(xu_r + yv_r + 1) = 0$$

stellt gleich Null gesetzt offenbar eine in eben diese geraden Linien zerfallende Curve r^{ter} Ordnung dar.

Da die Function (2) sich nicht ändert, wenn man zwei Gruppen des Systems

$$(3)\qquad \begin{cases} g_1\ u_1\ v_1, \\ g_2\ u_2\ v_2, \\ \ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ g_r\ u_r\ v_r \end{cases}$$

mit einander vertauscht, so ist sie eine symmetrische Function dieser Gruppen. Da sie ferner jede derselben linear enthält, so kann sie auch als lineare Function der Elementarfunctionen dieser Gruppen dargestellt werden.

Bezeichnen wir dieselben mit dem lateinischen Buchstaben b und setzen

$$\begin{gathered} \Sigma u_1 = b_1, \quad \Sigma v_1 = b_2, \\ \Sigma u_1 u_2 = b_{11}, \quad \Sigma u_1 v_2 = b_{12}, \quad \Sigma v_1 v_2 = b_{12}, \\ \Sigma u_1 u_2 u_3 = b_{111}, \quad \Sigma u_1 u_2 v_3 = b_{112}, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{gathered}$$

so geht die Function (2) über in:

$$(4)\quad G \equiv g_1 g_2 g_3 \cdots g_r \equiv x^r b_r + x^{r-1} y\, b_{r-1,1} + \cdots + x b_1 + y b_2 + 1,$$

wo die Anzahl der Coefficienten b_r, $b_{r-1,1}, \ldots, b_1$, b_2 gleich der Anzahl der Elementarfunctionen der r Gruppen (3) ist. Diese Zahl ist, wie wir wissen

$$\sigma = \binom{r+2}{2} - 1.$$

Da die Curve G sich aus den r Geraden

$$g_1\, g_2\, g_3 \cdots g_r$$

zusammensetzt, so geht ihre Gleichung in eine Identität über, sobald sich der Punkt $g(xy)$ auf einer dieser Geraden bewegt. Insbesondere wird sie auch eine solche bleiben, wenn derselbe mit einem der Schnittpunkte dieser r Geraden zusammenfällt. Die Zahl der letzteren ist nun

$$s = \frac{r(r-1)}{2}.$$

Bezeichnen wir dieselben mit

$$P_1\, P_2\, P_3 \ldots P_s,$$

so bestehen offenbar die Gleichungen identisch:

$$\begin{cases} G(x_1 y_1) \equiv 0, \\ G(x_2 y_2) \equiv 0, \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ G(x_s y_s) \equiv 0. \end{cases}$$

Addirt man dieselben, so ist auch die Summe:

$$(5) \qquad \sum \overset{(r)}{\overline{G(x_1 y_1)}} \equiv \Sigma x_1^r b_{r,0} + \Sigma x_1^{r-1} y_1 b_{r-1,1} + \cdots + \Sigma x_1 b_1 \\ + \Sigma y_1 b_2 + s = 0$$

eine Identität, wo nun

$$\Sigma x_1^r,\ \Sigma x_1^{r-1} y_1, \ldots, \Sigma x_1,\ \Sigma y_1$$

die sämmtlichen einförmigen symmetrischen Functionen des Systems der Punkte

$$(6) \qquad \begin{cases} P_1\ x_1\ y_1, \\ P_2\ x_2\ y_2, \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ P_s\ x_s\ y_s \end{cases}$$

vom Gewicht $r, r-1, r-2, \ldots, 3, 2, 1$ repräsentiren. Die Coordinaten x_i und y_i dieser Punkte P_i lassen sich leicht berechnen.

Liegt der Punkt P_i auf den Geraden

$$g_\alpha(u_\alpha v_\beta) = 0 \quad \text{und} \quad g_{\alpha'}(u_{\alpha'} v_{\beta'}) = 0,$$

so ist offenbar

$$x_i u_\alpha + y_i v_\beta + 1 = 0,$$
$$x_i u_{\alpha'} + y_i v_{\beta'} + 1 = 0,$$

woraus folgt:

$$(7) \qquad x_i : y_i : 1 = v_\beta - v_{\beta'} : -(u_\alpha - u_{\alpha'}) : u_\alpha v_{\beta'} - u_{\alpha'} v_\beta$$

oder wenn wir mit z_i, bezw. w_γ, $w_{\gamma'}$ homogen machen:

$$x_i : y_i : z_i = (v_\beta w_{\gamma'}) : (w_\gamma u_{\alpha'}) : (u_\alpha v_{\beta'}).$$

Damit gehen die einförmigen Functionen der Gruppen P über in

$$(8)\quad \sum x_1{}^r = \sum \frac{(v_1 - v_2)^r}{(u_1 v_2)^r},\ \sum x_1{}^{r-1} y_1 = \sum \frac{(v_1 - v_2)^r\,(u_2 - u_1)}{(u_1 u_2)^r}, \ldots,$$

$$\sum x_1 = \sum \frac{v_1 - v_2}{(u_1 v_2)},\ \sum y_1 = \sum \frac{u_2 - u_1}{(u_1 v_2)}.$$

Führt man diese Werthe in die Gleichung (5) ein und multiplicirt letztere mit dem Nenner $(u_1 v_2)^r$ durch, so enthält dieselbe die Coordinaten

$$(v_i - v_k),\ (u_k - u_i),\ (u_i v_k)$$

homogen vom Grade r.

Wir unterscheiden nun folgende Fälle:

1. r ist eine gerade ganze Zahl.

Ist r eine gerade Zahl, so ändern sich die einförmigen Functionen

$$\Sigma x_1{}^r,\ \Sigma x_1{}^{r-1} y_1, \ldots, \Sigma x_1,\ \Sigma y_1$$

nicht, wenn man zwei der Gruppen

$$u_1 v_1;\ u_2 v_2;\ u_3 v_3;\ \ldots;\ u_r v_r$$

vertauscht. Eine solche ist somit auch eine symmetrische Function dieser Gruppen. Jede der einförmigen Functionen kann somit durch die Elementarfunctionen der Gruppen

$$u_1 v_1,\ u_2 v_2, \ldots, u_r v_r$$

ausgedrückt werden. Wird dies ausgeführt, so enthält die Identität (5) nur noch Elementarfunctionen der Gruppen uv; sie ist somit eine Relation zwischen den letzteren.

Die so erhaltene Relation ist vom Totalgewicht $2r$ und hinsichtlich der Reihen

$$u_1 u_2 u_3 \ldots u_r;\quad v_1 v_2 v_3 \ldots v_r$$

vom Gewicht r.

Da nun, wie ich gezeigt habe*), für r Gruppen nur eine einzige Relation vom Gewicht $2r$ und den Reihengewichten $p_1 = r$, $p_2 = r$ existirt, so muss diese identisch sein mit der in den Math. Annalen Bd. 43 angegebenen Relation $R_{r,r} = 0$. Wir haben somit den Satz:

Zerfällt eine ebene Curve r^{ter} Ordnung in r gerade Linien, so ist die Bedingung, dass dieselbe durch die Schnittpunkte derselben hindurchgeht, dargestellt durch eine Relation vom Gewicht $2r$ zwischen den Elementarfunctionen der Coordinaten dieser Geraden.

---

*) Diese Annalen, Bd. 43, pag. 258 und f. f.

2. r ist eine ungerade ganze Zahl.

Ist r eine ungerade Zahl, so sind die Functionen

$$\Sigma x_1^r,\quad \Sigma_1^{r-1} y_1, \ldots$$

alternirende Functionen hinsichtlich der Gruppen

$$u_1 v_1;\quad u_2 v_2;\ \ldots,\ u_r v_r,$$

d. h. sie ändern ihr Zeichen, wenn man zwei dieser Gruppen vertauscht.

Um auch für diesen Fall die Bedingung (5) durch die Elementarfunctionen der Gruppen uv ausdrücken zu können, bilde man das Quadrat von $\Sigma G(x_1 y_1) \equiv 0$

$$(9)\qquad [\Sigma G(x_1 y_1)]^2 = [\Sigma x_1^r]^2 b_r^2 + \cdots$$
$$+ (\Sigma x_1)^2 b_1^2 + 2\Sigma x_1 \Sigma y_1 b_1 b_2 + (\Sigma y_1)^2 b_2^2 + b \equiv 0,$$

dann ist jede der einförmigen Functionen

$$[\Sigma x_1^r]^2,\quad [\Sigma x_1^{r-1} y_1]^2, \ldots (\Sigma x_1)^2,\quad \Sigma x_1 \Sigma y_1,\quad (\Sigma y_1)^2$$

eine symmetrische Function der Gruppen uv. Die Function kann somit durch die Elementarfunctionen derselben ausgedrückt werden. Die so erhaltene Relation ist vom Gewicht $4r$ und hinsichtlich der Reihen $u_1 u_2 \ldots u_r$; $v_1 v_2 \ldots v_r$ je vom Gewicht $2r$. Da nun, wie wir wissen, keine Relationen vom Gewicht $4r$ vorhanden sind und die höchsten das Gewicht $2r$ besitzen, so muss die Bedingung (9), vorausgesetzt, dass sie durch die Elementarfunctionen der Gruppe uv ausgedrückt ist, in das Quadrat

$$R_{r,r}^2 \equiv 0$$

zerfallen.

Die Bedingung, dass eine in r Gerade zerfallende Curve durch die Schnittpunkte dieser Geraden hindurchgeht, ist somit allgemein ausgedrückt durch das identische Verschwinden der Relation

$$R_{r,r} \equiv 0.$$

Dem obigen Satz steht dualistisch gegenüber der folgende:

Zerfällt eine Curve r^{ter} Classe in r Punkte, so ist die Bedingung, dass dieselbe die Verbindungslinien derselben enthält, ausgedrückt durch eine Relation zwischen den Elementarfunctionen der Coordinaten dieser Punkte.

§ 27.

a) Zwei gerade Linien.

Bezeichnen wir mit

$$g_1 \equiv x u_1 + y v_1 + z w_1 = 0,$$
$$g_2 \equiv x u_2 + y v_2 + z w_2 = 0$$

zwei gerade Linien mit den homogenen Coordinaten $u_1 v_1 w_1$, $u_2 v_2 w_2$, so stellt das Product

(1) $g_1 g_2 = x^2 b_{11} + xy b_{12} + xz b_{13} + y^2 b_{22} + yz b_{23} + z^2 b_{33} = 0$

einen in zwei gerade Linien zerfallenden Kegelschnitt dar.

Diese Gleichung verschwindet identisch für jeden Punkt der beiden Geraden g_1 und g_2. Bezeichnen wir deren Schnittpunkt mit $P_1(x_1 y_1)$, so gilt insbesondere die identische Gleichung:

(2) $x_1^2 b_{11} + x_1 y_1 b_{12} + y_1^2 b_{22} + x_1 z_1 b_{13} + y_1 z_1 b_{23} + z_1^2 b_{33} = 0.$

Da der Punkt auf den beiden Geraden liegt, so ist auch

$$x_1 u_1 + y_1 v_1 + z_1 w_1 = 0,$$
$$x_1 u_2 + y_1 v_2 + z_1 w_2 = 0,$$

woraus folgt:

$$x_1 : y_1 : z_1 = (v_1 w_2) : (w_1 u_2) : (u_1 v_2).$$

Setzt man diese Werthe in die Gleichung (2) ein, so folgt:

$$(v_1 w_2)^2 b_{11} + (v_1 w_2)(w_1 u_2) b_{12} + (w_1 u_2)^2 b_{22} + (v_1 w_2)(u_1 v_2) b_{13}$$
$$+ (w_1 u_2)(u_1 v_2) b_{23} + (u_1 v_2)^2 b_{33} = 0.$$

Ersetzen wir hierin die Producte der Klammern durch die Elementarfunctionen der Gruppen $u_1 v_1$; $u_2 v_2$, so geht die Bedingung (2) über in:

$$II_{22} \equiv b_1^2 b_{22} + b_2^2 b_{11} - b_1 b_2 b_{12} - 4 b_{11} b_{22} + b_{12}^2 = 0.$$

D. h. Die Bedingung, dass der in 2 Geraden zerfallende Kegelschnitt durch den Schnittpunkt derselben hindurchgeht, ist dargestellt durch die bekannte Relation vom Gewicht 4: $II_{22} = 0$.

b) Drei gerade Linien.

$$xu_1 + yv_1 + 1,$$
$$xu_2 + yv_2 + 1,$$
$$xu_3 + yv_3 + 1$$

schneiden sich in drei Punkten $x_1 y_1$, $x_2 y_2$, $x_3 y_3$. Die Bedingung, dass die in 3 Gerade zerfallende Curve 3ter Ordnung durch dieselben hindurchgeht, ist somit ausgedrückt durch:

(1) $f_3 \equiv b_{111} \Sigma x_1^3 + b_{112} \Sigma x_1^2 y_1 + b_{122} \Sigma x_1 y_1^2 + b_{222} \Sigma y_1^3 + \cdots$
$$+ b_1 \Sigma x_1 + b_2 \Sigma y_1 + 1 = 0.$$

Drückt man nun die Coordinaten der Schnittpunkte $x_1 y_1$, $x_2 y_2$, $x_3 y_3$ durch die Coordinaten der schneidenden Geraden aus, so sind Σx_1^3, $\Sigma x_1^2 y_1$, etc. alternirende Functionen der letzteren. Dieselben gehen

in symmetrische Functionen dieser Coordinaten über, wenn man die Bedingung (1) quadrirt. Drückt man dieselben durch Elementarfunctionen aus, so zeigt sich, dass diese Bedingung in das Quadrat von

$$\begin{aligned} III_{33} = - b_{12} II_{22} + 3 b_1 b_{11} b_{222} + b_1 b_{12} b_{122} - 3 b_1 b_{22} b_{112} \\ + 3 b_2 b_{22} b_{111} + b_2 b_{12} b_{112} - 3 b_2 b_{11} b_{122} \\ - 27 b_{111} b_{222} + 3 b_{112} b_{122} = 0 \end{aligned}$$

zerfällt.

§ 28.

Die in r Ebenen zerfallende Fläche r^{ter} Ordnung.

Bezeichnen wir mit

$$u_1 v_1 w_1;\ u_2 v_2 w_2;\ \ldots\ u_r v_r w_r$$

die Coordinaten von r Ebenen

$$(1) \qquad \begin{cases} e_1 = x u_1 + y v_1 + z w_1 + 1, \\ e_2 = x u_2 + y v_2 + z w_2 + 1, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ e_r = x u_r + y v_r + z w_r + 1, \end{cases}$$

so stellt das Product derselben

$$(2) \qquad E = e_1 e_2 \cdots e_r \equiv x^r b_{r,0,0} + x^{r-1} y b_{r-1,1,0} + \cdots$$

eine in r Ebenen zerfallende Fläche r^{ter} Ordnung dar. Diese r Ebenen schneiden sich bekanntlich in

$$s = \frac{r\,.\,(r-1)\,.\,(r-2)}{3\,.\,2\,.\,1} = \binom{r}{3}$$

Punkten, die wir mit

$$P_1(x_1 y_1 z_1),\ P_2(x_2 y_2 z_2),\ \ldots,\ P_s(x_s y_s z_s)$$

bezeichnen wollen.

Die Gleichung dieser Fläche (1) verschwindet identisch, sobald die letztere durch einen der s Punkte $P_1, P_2, \ldots, P_s$ hindurchgeht. Entsprechend diesen s Punkten erhalten wir somit s identische Gleichungen, welche addirt die Hauptidentität geben:

$$(3) \quad \Sigma x_1^r b_{r,0,0} + \Sigma x_1^{r-1} y_1 b_{r-1,1,0} + \cdots + \Sigma x_1 b_1 + \Sigma y_1 b_2 + \Sigma z_1 b_3 + s \equiv 0.$$

Nun lassen sich die Coordinaten $x_i\, y_i\, z_i$ der s Punkte

$$P_i \ (i = 1, 2, 3, \ldots, s)$$

aus je drei der Gleichungen (1) berechnen. Wir erhalten beispielsweise für die Coordinaten des Schnittpunktes der drei Ebenen $e_1 e_2 e_3$

$$x_i : y_i : z_i : 1 = -\begin{vmatrix} 1 & v_1 & w_1 \\ 1 & v_2 & w_2 \\ 1 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} : -\begin{vmatrix} u_1 & 1 & w_1 \\ u_2 & 1 & w_2 \\ u_3 & 1 & w_3 \end{vmatrix} : -\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & 1 \\ u_2 & v_2 & 1 \\ u_3 & v_3 & 1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix}$$

$$= -(1\ v_2\ w_3) : -(1\ w_2\ u_3) : -(1\ u_2\ v_3) : (u_1\ v_2\ w_3).$$

Damit gehen die einförmigen Functionen

$$\Sigma x_1^r,\ \Sigma x_1^{r-1} y_1, \ldots$$

über in:

$$\sum x_1^r = (-1)^r \sum \frac{(1 v_2 w_3)^r}{(u_1 v_2 w_3)^r},$$

$$\sum x_1^{r-1} y_1 = (-1)^r \sum \frac{(1 v_2 w_3)^{r-1} (1 w_2 u_3)}{(u_1 v_2 w_3)^r}, \ldots$$

Ist nun r eine gerade Zahl, so ändert sich eine solche nicht, wenn man zwei der Gruppen

$$u_1 v_1 w_1;\ u_2 v_2 w_2;\ \ldots\ u_r v_r w_r$$

mit einander vertauscht. Jede symmetrische Function der Gruppen $P_1 P_2 \ldots P_s$ von gerader Gewichtszahl ist somit auch eine symmetrische Function der Gruppen

$$u_1 v_1 w_1;\ u_2 v_2 w_2, \ldots, u_r v_r w_r.$$

Drücken wir daher die ersteren durch die Elementarfunctionen der letzteren aus und multipliciren in Gleichung (3) mit dem Nenner $(u_1 v_2 w_3)^r$ durch, so geht dieselbe in eine Relation vom Gewicht $3r$ zwischen den Elementarfunctionen der Gruppen uvw über.

Zerfällt eine Fläche r^{ter} Ordnung in r Ebenen, so ist die Bedingung, dass dieselbe durch die $\binom{r}{3}$ Schnittpunkte der letzteren hindurchgeht, dargestellt durch eine Relation

$$R_{r,r,r} = 0$$

vom Gewicht $3r$ zwischen den Elementarfunctionen der Coordinaten dieser r Ebenen.

Ist r eine ungerade Zahl, so ist das Quadrat der Identität (3) eine symmetrische Function der Gruppen uvw. Ist dasselbe durch die Elementarfunctionen der letzteren ausgedrückt, so findet man, wie in § 26, dass dieselbe das Quadrat der Relation

$$R_{rrr} = 0$$

darstellt.

V. Abschnitt.

Darstellung von mehrförmigen symmetrischen Functionen durch einförmige und elementare für eine begrenzte Anzahl von Gruppen.

§ 29.

Die symmetrischen Functionen für eine unbegrenzte Anzahl von Gruppen.

Hat man eine gewisse i-förmige Elementarfunction a_i, so lässt sich derselben offenbar in eindeutiger Weise diejenige einförmige Function $\mathfrak{a}_i$ zuordnen, welche mit ihr gleichwerthig ist und umgekehrt. Jedem Product von Elementarfunctionen wird daher auch ein gleichwerthiges Product von ebensovielen einförmigen Functionen in eindeutiger Weise entsprechen und umgekehrt. So können wir beispielsweise die Functionen

$$\Sigma x_1 x_2 y_3 z_4 = a_{1123} \quad \text{und} \quad \Sigma x_1^2 y_1 z_1 = \mathfrak{a}_{1123}$$

und die Producte

$$a_{12} a_{345} \quad \text{und} \quad \mathfrak{a}_{12} \mathfrak{a}_{345}$$

einander zuordnen.

Jedem Product von i Elementarfunctionen $a_{q_1} a_{q_2} a_{q_3} \ldots$, bezw. einförmigen Functionen $\mathfrak{a}_{q_1} \mathfrak{a}_{q_2} \mathfrak{a}_{q_3} \ldots$ von den Gewichtszahlen $q_1, q_2, q_3, \ldots$ lässt sich ebenfalls eine bestimmte i-förmige Function, deren Theile mit den Functionen

$$a_{q_1}, a_{q_2}, a_{q_3}, \ldots \quad \text{bezw.} \quad \mathfrak{a}_{q_1}, \mathfrak{a}_{q_2}, \mathfrak{a}_{q_3}, \ldots$$

gleichwerthig sind, eindeutig zuweisen und umgekehrt. Diese eindeutige Beziehung zwischen den mehrförmigen symmetrischen Functionen und den gleichwerthigen Producten von Elementarfunctionen, bezw. einförmigen Functionen kann offenbar nur stattfinden, wenn die Gruppenzahl r beliebig hoch gedacht wird. Für eine unbegrenzte Anzahl von Gruppen gelten deshalb die Sätze:

1. *Die Anzahl der Elementarfunctionen ist gleich der Anzahl der einförmigen Functionen.*

2. *Die Anzahl aller gleichwerthigen Producte von Elementarfunctionen von den Reihengewichten $p_1 p_2 \ldots p_r$ ist gleich der Anzahl aller mit denselben gleichwerthigen Producte von einförmigen Functionen von denselben Reihengewichten.*

3. *Die Anzahl aller gleichwerthigen symmetrischen Functionen von den Reihengewichten $p_1 p_2 \ldots p_r$ ist gleich der Anzahl der mit denselben gleichwerthigen Producte von Elementarfunctionen, bezw. einförmigen Functionen.*

In Folge dieser Beziehungen sind wir in den Stand gesetzt, 6 verschiedene Tabellen construiren zu können, in welchen je eine Art dieser

Functionen durch die Vertreter einer anderen ausgedrückt ist. Ich verweise indessen auf meine zweite Abhandlung in diesen Annalen Bd. 43.

§ 30.

Die symmetrischen Functionen für eine begrenzte Anzahl von Gruppen.

Ist die Anzahl der Gruppen eine bestimmt gegebene, z. B. r, so entspricht wohl jeder einförmigen Function vom Gewicht $1, 2, 3, \ldots, r$ eine bestimmte Elementarfunction vom Gewicht $1, 2, 3, \ldots, r$; aber jeder höheren einförmigen Function, z. B.

$$\Sigma x_1^{r+1}, \quad \Sigma x_1^r y_1, \quad \Sigma x_1^{r+1} y_1, \ldots$$

lässt sich keine Elementarfunction mehr zuordnen, da alle $r+1$-, $r+2$-, ... und mehrförmigen Elementarfunctionen identisch verschwinden. Jedem Product von einförmigen Functionen, in welchem eine solche vom Gewicht $r+1$, $r+2, \ldots$ enthalten ist, lässt sich demnach auch kein gleichwerthiges Product von Elementarfunctionen zuweisen.

Hieraus fliesst unmittelbar der Satz:

Die Anzahl aller gleichwerthigen Producte von einförmigen Functionen ist grösser als die Zahl aller mit denselben gleichwerthigen Producte von Elementarfunctionen, wenn die Anzahl der Gruppen r, für welche dieselben gebildet sind, kleiner ist als das Gewicht Q dieser Producte.

Bezeichnen wir die gleichwerthigen Producte von einförmigen Functionen mit

$$\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_3, \ldots, \mathfrak{A}_{i_1},$$

die der Elementarfunctionen mit

$$A_1, A_2, A_3, \ldots, A_{i_2},$$

so ist, wenn

$$r < Q,$$

auch

$$i_2 < i_1.$$

Sind die einförmigen Functionen $\mathfrak{a}$ durch elementare a ausgedrückt, so erhält man durch blosse Multiplication die i_1 Beziehungen:

$$(1) \qquad \begin{cases} \mathfrak{A}_1 = \alpha_1 A_1 + \beta_1 A_2 + \cdots + \sigma_1 A_{i_2}, \\ \mathfrak{A}_2 = \alpha_2 A_1 + \beta_2 A_2 + \cdots + \sigma_2 A_{i_2}, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \mathfrak{A}_{i_1} = \alpha_{i_1} A_1 + \beta_{i_1} A_2 + \cdots + \sigma_{i_1} A_{i_2}, \end{cases}$$

wo $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ litterale Zahlen sind, die sich bei der Multiplication ergeben.

Da $i_1 > i_2$, so könnte man aus je i_2 dieser Gleichungen die Producte A in Function der $\mathfrak{A}$ linear ausdrücken und zwar auf $\binom{i_1}{i_2}$ Arten.

Multiplicirt man dieselben mit den Factoren $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{i_1}$, und addirt, so erhalten wir eine Gleichung von der Form

$$\begin{aligned}(2)\qquad & \lambda_1\mathfrak{A}_1 + \lambda_2\mathfrak{A}_2 + \cdots + \lambda_{i_1}\mathfrak{A}_{i_1} \\ & = \Sigma\alpha_1\lambda_1 A_1 + \Sigma\beta_1\lambda_1 A_2 + \cdots + \Sigma\sigma_1\lambda_1 A_{i_2}.\end{aligned}$$

Um hieraus ein Product A_k in Function der $\mathfrak{A}$ zu ermitteln, setze man dessen Coefficienten $\Sigma\lambda_1\varkappa_1 = 1$ und diejenigen aller übrigen Producte A gleich Null. Wir erhalten alsdann ein System von i_2 Gleichungen

$$(3)\qquad \begin{cases} \Sigma\lambda_1\alpha_1 = 0, \\ \Sigma\lambda_1\beta_1 = 0, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \Sigma\lambda_1\varkappa_1 = 1, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \Sigma\lambda_1\sigma_1 = 0 \end{cases}$$

zwischen i_1 Unbekannten $\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_{i_1}$.

Da $i_1 > i_2$ ist, so lassen sich auch nur i_2 derselben in Function der $i_1 - i_2 = \mu$ übrigen linear ausdrücken. Bezeichnen wir die letzteren mit $l_1, l_2, \ldots, l_\mu$, so lässt sich das Product $A_\varkappa$ auf die Form bringen:

$$(4)\qquad A_\varkappa = \Phi_0 + l_1\Phi_1 + \cdots + l_\mu\Phi_\mu.$$

Da nun dasselbe für eine bestimmte Gruppenzahl r nur einen bestimmten Werth annehmen kann, so muss dies auch für die rechte Seite der Gleichung (4) der Fall sein. Dies ist aber, weil die Coefficienten $l_1, l_2, \ldots, l_\mu$ willkürlich sind, nur möglich, wenn

$$(5)\qquad l_1\Phi_1 + l_2\Phi_2 + \cdots + l_\mu\Phi_\mu \equiv 0$$

ist. Die Function (5) stellt somit eine $\mu - 1$-fach unendliche Schaar von gleichwerthigen Relationen

$$\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_\mu$$

dar. Dieselbe kann offenbar dazu dienen, die Gestalt der Function $A_\varkappa$ nach Belieben zu verändern.

Als Beispiel seien die Functionen von den Reihengewichten

$$p_1 = p_2 = 2$$

angeführt, die für 2 Gruppen gebildet werden mögen. Da das Gewicht derselben 4 ist, so müssen alle Producte verschwinden, in denen

3-förmige und 4-förmige Elementarfunctionen enthalten sind. Wir erhalten die Tabelle:

Tabelle I.

	$a_1^2 a_2^2$	$a_1^2 a_{22}$	$a_1 a_2 a_{12}$	$a_2^2 a_{11}$	a_{12}^2	$a_{11} a_{22}$
$\mathfrak{a}_1^2 \mathfrak{a}_2^2$	1					
$\mathfrak{a}_1^2 \mathfrak{a}_{22}$	1	-2				
$\mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2 \mathfrak{a}_{12}$	1		-1			
$\mathfrak{a}_2^2 \mathfrak{a}_{11}$	1			-2		
$\mathfrak{a}_{12}^2$	1		-2		1	
$\mathfrak{a}_{11} \mathfrak{a}_{22}$	1	-2		-2		4
$\mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_{122}$	1	-1	-1			
$\mathfrak{a}_2 \mathfrak{a}_{112}$	1		-1	-1		
$\mathfrak{a}_{1122}$	1	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

Da hierin die Zahl der Functionen $\mathfrak{A}$ diejenige der A um drei übersteigt, so muss jede der letzteren auf die Form gebracht werden können:

$$A = l_1 \Phi_1 + l_2 \Phi_2 + l_3 \Phi_3,$$

wo Φ_1, Φ_2, Φ_3 drei von einander unabhängige identische Relationen zwischen den einförmigen Functionen $\mathfrak{a}$ repräsentiren.

Führt man die Rechnung durch, so erhält man die folgende Tabelle, in welcher diese Relationen unten angefügt sind.

Tabelle II.

	$\mathfrak{a}_1^2 \mathfrak{a}_2^2$	$\mathfrak{a}_1^2 \mathfrak{a}_{22}$	$\mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2 \mathfrak{a}_{12}$	$\mathfrak{a}_2^2 \mathfrak{a}_{11}$	$\mathfrak{a}_{12}^2$	$\mathfrak{a}_{11} \mathfrak{a}_{22}$	$\mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_{122}$	$\mathfrak{a}_2 \mathfrak{a}_{112}$	$\mathfrak{a}_{1122}$
$a_1^2 a_2^2$	1								
$a_1^2 a_{22}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$							
$a_1 a_2 a_{12}$	1		-1						
$a_2^2 a_{11}$	$\frac{1}{2}$			$-\frac{1}{2}$					
a_{12}^2	1		-2		1				
$a_{11} a_{22}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$		$-\frac{1}{4}$		$\frac{1}{4}$			
Φ_1	1	-1	-2				2		
Φ_2	1		-2	-1				2	
Φ_3	1	-4	-4	-4	2	1	4	4	-6

§ 31.

Die Producte der Elementarfunctionen ausgedrückt durch die gleichwerthigen Producte der einförmigen Functionen.

Stellt man umgekehrt die Producte A durch die Producte $\mathfrak{A}$ der einförmigen Functionen dar, so erhalten wir die i_2 Gleichungen:

$$(6)\quad \begin{cases} A_1 = \alpha_1 \mathfrak{A}_1 + \beta_1 \mathfrak{A}_2 + \cdots + \tau_1 \mathfrak{A}_{i_1}, \\ A_2 = \alpha_2 \mathfrak{A}_1 + \beta_2 \mathfrak{A}_2 + \cdots + \tau_2 \mathfrak{A}_{i_1}, \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ A_{i_2} = \alpha_{i_2} \mathfrak{A}_1 + \beta_{i_2} \mathfrak{A}_2 + \cdots + \tau_{i_2} \mathfrak{A}_{i_1}, \end{cases}$$

aus denen die Functionen $\mathfrak{A}$, da $i_1 > i_2$ ist, durch die Producte A nicht unmittelbar ermittelt werden können.

Da aber eine solche Darstellung doch möglich sein muss, wie wir in Nr. 2 gesehen haben, so folgt auch hieraus, dass zwischen den Functionen $\mathfrak{A}$ eine Anzahl Relationen bestehen muss, die gleich oder grösser als $i_1 - i_2 = \mu$ ist. Sind diese bekannt, so lassen sich auch mit Hilfe derselben die Producte $\mathfrak{A}$ auf diesem Wege durch die A linear ausdrücken.

§ 32.

Die symmetrischen Functionen ausgedrückt durch Elementarfunctionen und umgekehrt.

Stellt man direct durch Multiplication die Producte $\mathfrak{A}$ durch die symmetrischen gleichwerthigen Functionen $S_1 S_2 \ldots S_k$ dar, so erhalten wir die weiteren Gleichungen:

$$(7)\quad \begin{cases} \mathfrak{A}_1 = \alpha_1 S_1 + \beta_1 S_2 + \cdots + \sigma_1 S_k, \\ \mathfrak{A}_2 = \alpha_2 S_1 + \beta_2 S_2 + \cdots + \sigma_2 S_k, \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ \mathfrak{A}_{i_1} = \alpha_{i_1} S_1 + \beta_{i_1} S_2 + \cdots + \sigma_{i_1} S_k. \end{cases}$$

In diesem Fall ist $k < i_1$, da alle r-förmigen, $r+1$-förmigen etc., symmetrischen Functionen für r Gruppen identisch verschwinden.

Bildet man daher die Summe

$$\Sigma \lambda_1 \mathfrak{A}_1 = \Sigma \lambda_1 \alpha_1 S_1 + \Sigma \lambda_1 \beta_1 S_2 + \cdots + \Sigma \lambda_1 \sigma_1 S_k,$$

so werden wir zur Ermittlung einer Function S_τ die k Gleichungen erhalten

$$\Sigma \lambda_1 \alpha_1 = 0,$$
$$\Sigma \lambda_1 \beta_1 = 0,$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\Sigma \lambda_1 \tau_1 = 1,$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\Sigma \lambda_1 \sigma_1 = 0,$$

zwischen den i Unbekannten $\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_i$.

Da $i > k$ ist, so werden wir wieder k derselben durch die übrigen $i - k = \mu$ linear ausdrücken und in Folge dessen die Function S_τ auf die Gestalt bringen können:

$$S_\tau = \Phi_0 + l_1 \Phi_1 + l_2 \Phi_2 + \cdots + l_\mu \Phi_\mu,$$

wo $\Phi_1, \Phi_2, \ldots \Phi_\mu$ wieder jene gleichwerthigen Relationen in Nr. 2 sind. Es leuchtet ein, dass dieselben zur Umgestaltung der Function Φ_0 dienen können.

Für das oben angegebene Beispiel

$$p_1 = 2, \quad p_2 = 2$$

erhalten wir für zwei Gruppen die weiteren Tabellen:

Tabelle III.

Σ	$x_1^2 y_1^2$	$x_1^2 y_1 y_2$	$y_1^2 x_1 x_2$	$x_1^2 y_2^2$	$x_1 y_1 x_2 y_2$
$\mathfrak{a}_1^2 \mathfrak{a}_2^2$	1	2	2	1	4
$\mathfrak{a}_1^2 \mathfrak{a}_{22}$	1		2	1	
$\mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2 \mathfrak{a}_{12}$	1	1	1		2
$\mathfrak{a}_2^2 \mathfrak{a}_{11}$	1	2		1	
$\mathfrak{a}_{12}^2$	1				2
$\mathfrak{a}_{11} \mathfrak{a}_{22}$	1			1	
$\mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_{122}$	1		1		
$\mathfrak{a}_2 \mathfrak{a}_{112}$	1	1			
$\mathfrak{a}_{1122}$	1				

Tabelle IV.

	$\mathfrak{a}_1^2\mathfrak{a}_2^2$	$\mathfrak{a}_1^2\mathfrak{a}_{22}$	$\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_{12}$	$\mathfrak{a}_2^2\mathfrak{a}_{11}$	$\mathfrak{a}_{12}^2$	$\mathfrak{a}_{11}\mathfrak{a}_{22}$	$\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_{122}$	$\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_{112}$	$\mathfrak{a}_{1122}$
$x_1^2y_1^2$									1
$x_1^2y_1y_2$								1	-1
$y_1^2x_1x_2$							1		-1
$x_1^2y_2^2$						1			-1
$x_1y_1x_2y_2$					1				-1
Φ_1				1		-1		-2	2
Φ_2			1		-1		-1	-1	2
Φ_3		1				-1	-2		2
Φ_4	1	-1	-4	-1	2	1	4	4	-6

§ 33.

Die Producte der Elementarfunctionen ausgedrückt durch die mehrförmigen Functionen und umgekehrt.

Drücken wir schliesslich die Producte A für r Gruppen linear durch die Functionen S aus, so erhalten wir i_2 Gleichungen:

$$(8)\qquad \begin{cases} A_1 = \alpha_1 S_1 + \beta_1 S_2 + \cdots + \sigma_1 S_k, \\ A_2 = \alpha_2 S_1 + \beta_2 S_2 + \cdots + \sigma_2 S_k, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ A_{i_2} = \alpha_{i_2} S_1 + \beta_{i_2} S_2 + \cdots + \sigma_{i_2} S_k, \end{cases}$$

wo $S_1, S_2, \ldots, S_k$ dieselben symmetrischen Functionen sind, wie in § 32.

Da bei unbegrenzter Gruppenzahl die Zahl der Functionen S gleich der Anzahl der Producte A ist und die ersteren also linear durch die letzteren ausgedrückt werden können, so müssen sich dieselben auch aus dem System (8) ermitteln lassen. Dies ist aber nur möglich, wenn

$$i_2 \geqq k$$

ist.

Wir erhalten somit den

Satz: *Die Anzahl aller gleichwerthigen symmetrischen Functionen ist gleich oder kleiner als die Anzahl aller mit denselben gleichwerthigen*

Producte von Elementarfunctionen, wenn die Anzahl der Gruppen, für welche dieselben gebildet sind, grösser (gleich) oder kleiner ist als das Gewicht dieser Functionen.

Nehmen wir nun an, es sei

$$i_2 = k + \mu,$$

so können wir auch in diesem Fall die Summe bilden

$$\Sigma\lambda_1 A_1 = S_1 \Sigma\lambda_1\alpha_1 + S_2\Sigma\lambda_1\beta_1 + \cdots$$

und werden zur Ermittlung irgend einer Function S ein System von i_2 linearen Gleichungen zwischen nur k Unbekannten erhalten. Wir können deshalb auch in diesem Fall wieder k derselben durch die $i_2 - k = \mu$ übrigen linear ausdrücken und deshalb auch jede der Functionen S auf die Form bringen:

$$S = \Psi_0 + l_1\Psi_1 + l_2\Psi_2 + \cdots + l_\mu\Psi_\mu,$$

eine Gleichung, die nur bestehen kann, wenn die Functionen

$$\Psi_1\Psi_2\ldots\Psi_\mu$$

identisch verschwindende Relationen zwischen den Elementarfunctionen der Gruppen

$$P_1 P_2 \ldots P_r$$

repräsentiren.

Wir erhalten auf diese Weise gleichwerthige Relationen von den Reihengewichten

$$p_1 p_2 \cdots p_r$$

der Functionen S und haben somit eine weitere Methode zur Darstellung der Relationen für eine bestimmte Gruppenzahl gewonnen.

Führen wir diese Betrachtungen praktisch an dem vorgeführten Beispiele durch, so erhalten wir die zwei weiteren Tabellen:

Tabelle V.

Σ	$x_1^2 y_1^2$	$x_1^2 y_1 y_2$	$y_1^2 x_1 x_2$	$x_1^2 y_2^2$	$x_1 y_1 x_2 y_2$
$a_1^2 a_2^2$	1	2	2	1	4
$a_1^2 a_{22}$		1			2
$a_1 a_2 a_{12}$		1	1	1	2
$a_2^2 a_{11}$			1		2
a_{12}^2				1	2
$a_{11} a_{22}$					1

Tabelle VI.

	$a_1^2 a_2^2$	$a_1^2 a_{22}$	$a_1 a_2 a_{12}$	$a_2^2 a_{11}$	a_{12}^2	$a_{11} a_{22}$
$\Sigma x_1^2 y_1^2$	1	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
$\Sigma x_1^2 y_1 y_2$		$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$
$\Sigma y_1^2 x_1 x_2$		$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$
$\Sigma x_1^2 y_1^2$		$-\frac{4}{3}$	$\frac{4}{3}$	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{10}{3}$
$\Sigma x_1 y_1 x_2 y_2$		$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$
II_{22}		1	-1	1	1	-4

VI. Abschnitt.

Die kanonischen Formen der r-förmigen symmetrischen Functionen.

§ 34.

Anwendung der Relationen zur Vereinfachung des Ausdrucks für eine r-förmige Function.

Ist

$$y = \Sigma x_1^{\alpha_1} y_1^{\beta_1} \cdots \times x_2^{\alpha_2} y_2^{\beta_2} \cdots \times \cdots \times x_r^{\alpha_r} y_r^{\beta_r} \cdots = \varphi(a)$$

eine r-förmige symmetrische Function von den Theilgewichten

$$q_i = \alpha_i + \beta_i + \cdots$$
$$(i = 1, 2, 3, \ldots, r)$$

und dem Totalgewicht

$$Q = \Sigma q_1,$$

so können in der allgemeinen Darstellung dieser Function alle möglichen Elementarfunctionen auftreten, deren Gewicht gleich oder kleiner als Q ist.

Für die Gruppenzahl r bestehen nun, wie wir wissen*), Relationen vom Gewicht $r + 2$, $r + 3$, …, $2r$. Bezeichnen wir von denselben alle diejenigen, deren Reihengewichte gleich oder kleiner als die Reihengewichte $p_1 p_2 p_3 \ldots p_r$ der Function J sind, mit

$$\varphi_1 \, \varphi_2 \, \varphi_3 \cdots \varphi_t$$

*) Siehe Math. Annalen, Bd. 43: Abhandlung II des Verfassers.

und multipliciren dieselben mit gewissen ganzen Functionen der Elementarfunctionen

$$\psi_1\, \psi_2\, \psi_3 \ldots \psi_i,$$

deren Reihengewichte die entsprechenden Reihengewichte von $\varphi_1\, \varphi_2 \ldots \varphi_i$ zu den Reihengewichten $p_1\, p_2 \ldots p_r$ der Function J ergänzen, so stellt die Summe

$$\Sigma\lambda_1\, \varphi_1\, \psi_1 = \lambda_1\, \varphi_1\, \psi_1 + \lambda_2\, \varphi_2\, \psi_2 + \cdots + \lambda_i\, \varphi_i\, \psi_i.$$

eine *mehrfach unendliche Schaar* von *gleichwerthigen Relationen von r Gruppen* dar, aus welcher durch Annahme bestimmter Werthe für die Parameter alle möglichen speciellen Functionen hergeleitet werden können.

Da die Summe $\Sigma\lambda_1\, \varphi_1\, \psi_1$ für r Gruppen identisch verschwindet, so gilt auch die Gleichung

$$J_r = \varphi(a) + \Sigma\lambda_1\, \varphi_1\, \psi_1.$$

Da ferner die r-förmige Function J für weniger als r Gruppen selbst identisch verschwindet, so muss dies auch für die rechte Seite der Gleichung

$$J = \varphi(a)$$

der Fall sein. Dies tritt nun selbstverständlich für alle Glieder von $\varphi(a)$ ein, welche r-förmige Elementarfunctionen enthalten. Bezeichnen wir die Gesammtheit derselben mit $\varphi_r(a)$ und die der übrigen mit $\varphi_{r-1}(a)$, so ist

$$\varphi(a) = \varphi_r(a) + \varphi_{r-1}(a).$$

Da für $r-1$ Gruppen die Function J sowie $\varphi_r(a)$ identisch verschwindet, so muss $\varphi_{r-1}(a)$ eine Relation für $r-1$ Gruppen sein. Da nun jede Relation von r Gruppen auch für jede Anzahl i von weniger Gruppen verschwindet, so lassen sich alle Relationen von $r-1$, $r-2$, $r-3, \ldots$ Gruppen aus denjenigen von r Gruppen herleiten. Setzen wir deshalb in $\Sigma\lambda_1\, \varphi_1\, \psi_1$ alle Glieder gleich Null, welche r-förmige Elementarfunctionen enthalten, so bleibt eine Schaar von Relationen für $r-1$ Gruppen übrig, in welchen sämmtliche speciellen gleichwerthigen Relationen für diese Anzahl von Gruppen enthalten sind. Insbesondere werden wir auch durch Annahme gewisser Werthe für die unbestimmten Coefficienten λ in $\Sigma\lambda_1\, \varphi_1\, \psi_1$ die Relation $\varphi_{r-1}(a)$ erhalten können.

Da die Coefficienten der gleichen Glieder der Functionen $\varphi_{r-1}(a)$ und $\Sigma\lambda_1\, \varphi_1\, \psi_1$ für r Gruppen identisch sind mit denen für $r-1$ Gruppen, so werden wir dieselben so bestimmen können, dass in

$$J = \varphi(a) + \Sigma\lambda_1\, \varphi_1\, \psi_1$$

sämmtliche Glieder verschwinden, welche keine r-förmigen Elementarfunctionen enthalten.

Von den Functionen $\varphi(a)$ und $\Sigma \lambda_1 \varphi_1 \psi_1$ bleiben alsdann nur noch Glieder übrig, in welchen r-förmige Elementarfunctionen auftreten. Die Function $\varphi(a)$ lässt sich somit mit Hilfe der Relationen auf die Form bringen

$$J = \pi(a_r b_r c_r \ldots),$$

wo in jedem Gliede r-förmige Elementarfunctionen neben den übrigen enthalten sind.

Es gilt deshalb der

Satz:

*Jede r-förmige symmetrische Function von r Gruppen, für welche gleichwerthige Relationen bestehen, lässt sich mit Hilfe derselben auf eine (kanonische) Form bringen, in welcher jedes Glied mindestens eine r-förmige Elementarfunction enthält.**)

Es leuchtet ein, dass eine derartige Form eine viel einfachere Gestalt besitzt als die Function $\varphi(a)$. Als Beispiel seien die Functionen angeführt:

$$\Sigma x_1 y_1 z_1 t_2 u_3 = \varphi(a),$$
$$\Sigma x_1 y_1 z_2 t_2 u_3 = \psi(a),$$

welche in der allgemeinen Darstellung $\varphi(a)$ bezw. $\psi(a)$ 33 bezw. 28 Glieder besitzen.

Sollen dieselben nur für drei Gruppen gebildet werden, so kann man sie mit den Relationen:

$$\Pi_1 = \Sigma t_1 u_1 x_2 y_3 z_4,$$
$$\Pi_2 = \Sigma x_1 y_1 z_2 t_3 u_4$$

combiniren

$$\Sigma x_1 y_1 z_1 t_2 u_3 = \varphi + \lambda_1 \Pi_1,$$
$$\Sigma x_1 y_1 z_2 t_2 u_3 = \psi + \mu_1 \Pi_1 + \mu_2 \Pi_2.$$

Man erhält dann mit

$$\lambda_1 = \mu_1 = \mu_2 = \frac{1}{12}$$

die einfachen Formen:

$$\Sigma x_1 y_1 z_1 t_2 u_3 = \tfrac{1}{3}\{(a_1 a_2 - a_{12}) a_{345} + (a_1 a_3 - a_{13}) a_{245} + (a_2 a_3 - a_{23}) a_{145} + (a_4 a_5 - a_{45}) a_{123}\}$$
$$- \tfrac{1}{6}\{(a_1 a_4 - a_{14}) a_{235} + (a_1 a_5 - a_{15}) a_{234} + (a_2 a_4 - a_{24}) a_{135} + (a_2 a_5 - a_{25}) a_{134} + (a_3 a_4 - a_{34}) a_{125} + (a_3 a_5 - a_{35}) a_{124}\}$$

$$\Sigma x_1 y_1 z_2 t_2 u_3 = \tfrac{1}{6}\{a_{14} a_{235} + a_{24} a_{135} + a_{25} a_{134} + a_{15} a_{234}\}$$
$$- \tfrac{1}{12}\{a_{23} a_{145} + a_{13} a_{245} + a_{12} a_{345} + a_{34} a_{125} + a_{35} a_{124} + a_{45} a_{123}\}.$$

---

*) Eine Ausnahme machen die r-förmigen Functionen vom Gewicht $r+1$, z. B. $\Sigma y_1^2 x_2 x_3 \ldots x r$, da für dieselben keine gleichwerthigen Relationen existiren, sowie alle diejenigen Functionen, welche sich linear durch dieselben darstellen lassen.

Wir sehen somit, dass gewisse r-förmige symmetrische Functionen mit Hilfe der Relationen auf eine einfache Form gebracht werden können, mit welcher sich viel leichter operiren lässt als mit der für eine unbegrenzte Anzahl von Gruppen geltenden allgemeinen Form derselben. Da man praktisch (in der Geometrie und in der Algebra) meistens doch nur mit einer endlichen Anzahl von Gruppen zu thun hat, so wollen wir die so vereinfachte Form einer r-förmigen symmetrischen Function als *kanonische* Form derselben bezeichnen und definiren:

Die kanonische Form einer r-förmigen symmetrischen Function ist eine solche (ganze) Function der Elementarfunctionen, in welcher die r-förmigen im höchstmöglichen Grad homogen auftreten.

Nach den vorstehenden Erörterungen lässt sich jede r-förmige symmetrische Function, für welche gleichwerthige Relationen existiren, auf eine Gestalt bringen, in welcher jedes Glied mindestens eine r-förmige Elementarfunction linear enthält.

Es lässt sich nun auch zeigen, in welchem Grad dieselben höchstens vorkommen können (aber nicht müssen).

Ist die r-förmige symmetrische Function von der Form:

$$J = \Sigma x_1^{q_1} y_2^{q_2} z_3^{q_3} \dots w_r^{q_r} = \varphi(a_r)$$

von den Theilgewichten $q_1 q_2 q_3 \dots q_r$, unter denen das Gewicht q_i der Reihe $t_1 t_2 \dots t_r$ das kleinste sein soll, so können in der kanonischen Form φ derselben alle möglichen Producte von r-förmigen Elementarfunctionen auftreten, deren Reihengewichte die Reihengewichte der Function J nicht überschreiten. Wenden wir auf

$$J = \varphi(a_r)$$

die Operation Δ_{t_1} des § 9 $q_i - 1$-fach an, so gehen die Functionen J und φ über in solche, welche linear sind hinsichtlich der Reihe $t_1 t_2 t_3 \dots t_r$. Da die erstere aber noch r-förmig ist, wenn auch ein Theilgewicht $q_i = 1$ geworden ist, so muss φ in eine Function ψ übergehen, welche linear ist hinsichtlich der r-förmigen Elementarfunctionen. Eine weitere Anwendung der Operation Δ_{t_1} bewirkt, dass die Function J in eine $(r-1)$-förmige Function übergeht, welche als solche keine kanonische Form mehr zulässt. In Folge dessen muss vor der letzten Anwendung von Δ_{t_1} in der Function ψ mindestens ein Glied vorhanden gewesen sein, das nur eine einzige r-förmige Elementarfunction enthielt, in der die Reihe $t_1 t_2 t_3 \dots t_r$ auftrat. Dieses Glied der Function ψ kann nur durch $(q_i - 1)$-malige Anwendung von Δ_{t_1} höchstenfalls aus einem Glied der Function φ hervorgegangen sein, welche q_i r-förmige Elementarfunctionen als Factoren enthielt, in denen die Reihe $t_1 t_2 \dots t_r$ je linear auftrat. Da über die Anzahl der

r-förmigen Elementarfunctionen in den andern Gliedern von φ nichts ausgesagt werden kann, so folgt:

Die kanonische Form einer r-förmigen symmetrischen Function von den Theilgewichten $q_1 q_2 q_3 \ldots q_r$, unter denen q_i das kleinste sein soll, kann die r-förmigen Elementarfunctionen höchstens im Grade q_i homogen enthalten.

Die r-förmigen Functionen von lauter gleichen Theilgewichten.

§ 35.

Die r-förmigen Functionen von den Theilgewichten $q = r$.

Ist

$$J_r = \Sigma x_1^{\alpha_1} y_1^{\beta_1} \cdots \times x_1^{\alpha_2} y_2^{\beta_2} \cdots \times \cdots \times x_r^{\alpha_r} y_r^{\beta_r} \cdots$$

eine r-förmige symmetrische Function von den Theilgewichten

$$q_1 = q_2 = \cdots = q_r = r,$$

so lässt sich jeder Theilfunction derselben, z. B. $x^{\alpha_i} y^{\beta_i} z^{\gamma_i} \ldots$ von den Reihengewichten $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \ldots$ eine bestimmte r-förmige Elementarfunction von denselben Reihengewichten, z. B. $a_{\alpha_i \beta_i \gamma_i \ldots}$ eindeutig zuordnen und umgekehrt. Demgemäss entspricht auch der symmetrischen Function J_r eindeutig das Product

$$a_{\alpha_1 \beta_1} \cdots \times a_{\alpha_2 \beta_2} \cdots \times a_{\alpha_3 \beta_3} \cdots \times \cdots \times a_{\alpha_r \beta_r} \cdots$$

von nur r-förmigen Elementarfunctionen.

Jeder andern mit J_r gleichwerthigen r-förmigen symmetrischen Function von den Theilgewichten r lässt sich ebenfalls ein solches Product von r-förmigen Elementarfunctionen zuweisen und umgekehrt.

Wir erhalten somit den

Satz: *Die Anzahl aller gleichwerthigen r-förmigen symmetrischen Functionen von lauter gleichen Theilgewichten r ist gleich der Anzahl aller mit denselben gleichwerthigen Producte von r-förmigen Elementarfunctionen.*

Bezeichnen wir diese Anzahl mit σ, die gleichwerthigen r-förmigen symmetrischen Functionen mit

$$S_1, S_2, S_3, \ldots, S_\sigma$$

und die entsprechenden Producte mit

$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_\sigma,$$

so können wir auf dem Wege einfacher Multiplication die Producte φ durch die Functionen S ausdrücken. Wir erhalten die σ Gleichungen:

$$\begin{cases} \varphi_1 = \alpha_1 S_1 + \beta_1 S_2 + \cdots + \sigma_1 S_\sigma, \\ \varphi_2 = \alpha_2 S_1 + \beta_2 S_2 + \cdots + \sigma_2 S_\sigma, \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \varphi_\sigma = \alpha_\sigma S_1 + \beta_\sigma S_2 + \cdots + \sigma_\sigma S_\sigma, \end{cases}$$

wo α, β, γ, ... litterale Zahlen sind, die sich bei der Multiplication ergeben.

Multiplicirt man diese Functionen der Reihe nach mit

$$\lambda_1\, \lambda_2 \ldots \lambda_\sigma$$

und addirt, so folgt:

$$\lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2 + \cdots + \lambda_\sigma \varphi_\sigma = \Sigma \lambda_1 \alpha_1 S_1 + \Sigma \lambda_1 \beta_1 S_2 + \cdots + \Sigma \lambda_1 \sigma_1 S_\sigma.$$

Um hieraus eine Function S, z. B. $S_\varkappa$ in Function der Producte φ zu erhalten, setze man den Coefficienten von $S_\varkappa$

$$\Sigma \lambda_1 \varkappa_1 = 1$$

und die Coefficienten aller übrigen Functionen S gleich Null. Man erhält auf diese Weise ein System von σ linearen Gleichungen

$$\Sigma \lambda_1 \alpha_1 = 0,\; \Sigma \lambda_1 \beta_1 = 0, \ldots, \Sigma \lambda_1 \varkappa_1 = 1, \ldots, \Sigma \lambda_1 \sigma_1 = 0,$$

aus welchem die Factoren λ eindeutig ermittelt werden können.

Wir erhalten somit den Satz:

Jede r-förmige symmetrische Function von gleichen Theilgewichten

$$q_1 = q_2 = \cdots = q_r = r$$

besitzt eine ganze homogene kanonische Form von nur r-förmigen Elementarfunctionen.

Sind die Theilfunctionen einer solchen symmetrischen Function einreihig, d. h. ist J_r von der Form

$$J_r = \Sigma x_1^r\, y_2^r\, z_3^r \ldots w_r^r = \alpha \varphi_1 + \beta \varphi_2 + \gamma \varphi_3 + \cdots,$$

so lässt sich hieraus durch Anwendung der Operation

$$\Delta_x^y = \sum \frac{\partial J}{\partial x_1} y_1 = \alpha \sum \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} y_1 + \beta \sum \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} y_1 + \cdots$$

jede weitere symmetrische Function vom Gewicht r^2 ausgedrückt durch eine solche kanonische Form herleiten.

Das folgende Beispiel, in welchem die dreiförmigen Functionen von den Theilgewichten

$$q_1 = q_2 = q_3 = 3$$

und den Reihengewichten

$$p_1 = p_2 = p_3 = 3$$

auf die kanonische Form gebracht sind, soll den obigen Satz illustriren.

	$\Sigma x_1^3 y_2^3 z_3^3$	$\Sigma x_1^3 y_2^2 z_2 y_3 z_3^2$	$\Sigma y_1^3 x_2^2 z_2 x_3 z_3^2$	$\Sigma z_1^3 x_2^2 y_2 x_3 y_3^2$	$\Sigma x_1 y_1 z_1 x_2 y_2 z_2 x_3 y_3 z_3$	$\Sigma x_1^2 y_1 x_2 z_2^2 y_3^2 z_3$	$\Sigma x_1^2 z_1 x_2 y_2^2 y_3 z_3^2$	$\Sigma x_1^2 y_1 y_2 z_2^2 x_3 y_3 z_3$	$\Sigma x_1^2 z_1 y_2^2 z_2 x_3 y_3 z_3$	$\Sigma x_1 y_1^2 x_2 z_2^2 x_3 y_3 z_3$
$a_{111}\,a_{222}\,a_{333}$					1					
$a_{111}\,a_{223}\,a_{233}$					3					1
$a_{222}\,a_{113}\,a_{133}$					3			1		
$a_{333}\,a_{112}\,a_{122}$					3				1	
a_{123}^3	1	3	3	3	12	3	3	6	6	6
$a_{112}\,a_{133}\,a_{223}$					3	1		1	1	1
$a_{113}\,a_{122}\,a_{233}$					3		1	1	1	1
$a_{123}\,a_{112}\,a_{233}$			1			1	1	2	2	2
$a_{123}\,a_{113}\,a_{223}$				1		1	1	2	2	2
$a_{123}\,a_{122}\,a_{133}$		1				1	1	2	2	2

	$a_{111}\,a_{222}\,a_{333}$	$a_{111}\,a_{223}\,a_{233}$	$a_{222}\,a_{113}\,a_{133}$	$a_{333}\,a_{112}\,a_{122}$	a_{123}^3	$a_{112}\,a_{133}\,a_{223}$	$a_{113}\,a_{122}\,a_{233}$	$a_{123}\,a_{112}\,a_{233}$	$a_{123}\,a_{113}\,a_{223}$	$a_{123}\,a_{122}\,a_{133}$
$\Sigma x_1^3 y_2^3 z_3^3$	-48				1	6	6	-3	-3	-3
$\Sigma x_1^3 y_2^2 z_2 y_3 z_3^2$	6					-1	-1			1
$\Sigma y_1^3 x_2^2 z_2 x_3 z_3^2$	6					-1	-1	1		
$\Sigma z_1^3 x_2^2 y_2 x_3 y_3^2$	6					-1	-1		1	
$\Sigma x_1 y_1 z_1 x_2 y_2 z_2 x_3 y_3 z_3$	1									
$\Sigma x_1^2 y_1 x_2 z_2^2 y_3^2 z_3$	6	-1	-1	-1		1				
$\Sigma x_1^2 z_1 x_2 y_2^2 y_3 z_3^2$	6	-1	-1	-1			-1			
$\Sigma x_1^2 y_1 y_2 z_2^2 x_3 y_3 z_3$	-3		1							
$\Sigma x_1^2 z_1 y_2^2 z_2 x_3 y_3 z_3$	-3			1						
$\Sigma x_1 y_1^2 x_2 z_2^2 x_3 y_3 z_3$	-3	1								

§ 36.

Die r-förmigen symmetrischen Functionen von den Theilgewichten

$$q_1 = q_2 = q_3 = \cdots = q_r \gtrless r.$$

Sind die Theilgewichte der r-förmigen symmetrischen Function

$$J = \Sigma x_1^{\alpha_1} y_1^{\beta_1} \cdots \times x_2^{\alpha_2} y_2^{\beta_2} \cdots \times \cdots \times x_r^{\alpha_r} y_r^{\beta_r} \cdots$$

wieder sämmtlich einander gleich, aber von r verschieden, so lässt sich einer bestimmten Theilfunction kein Product von r-förmigen Elementarfunctionen mehr eindeutig zuweisen und umgekehrt. Doch liegt auch für diesen Fall die Frage nahe: Lassen die r-förmigen symmetrischen Functionen von lauter gleichen Theilgewichten allgemein eine ganze kanonische Form von nur r-förmigen Elementarfunctionen zu?

Um dieselbe beantworten zu können, wenden wir uns zu den primitiven r-förmigen Functionen von gleichen Theilgewichten q. Diese lassen sich als die allgemeinsten Functionen dieser Art betrachten, da wir aus ihnen durch Coincidenz von Reihen alle wenigerreihigen Functionen herleiten können. Lässt eine solche eine kanonische Form irgend welcher Art zu, so folgt aus diesem Grunde, dass dasselbe auch für alle wenigerreihigen Functionen von denselben Theilgewichten der Fall sein muss.

Ist

(1) $$J = \Sigma x_1 y_1 \cdots \times z_2 t_2 \cdots \times \cdots \times v_r w_r$$

eine primitive r-förmige Function von den Theilgewichten

$$q_1 = q_2 = \cdots = q_r = r_1,$$

so enthält dieselbe $r \,.\, r_1$ verschiedene Reihen von Elementen. Die letzteren gestatten nun $\binom{r \cdot r_1}{r}$ verschiedene r-förmige primitive Elementarfunctionen zu bilden. Diese lassen sich wiederum zusammenstellen zu

$$\sigma = \frac{1}{r_1!} \frac{(r\,r_1)!}{(r!)^{r_1}}$$

verschiedenen primitiven Producten von je r_1 r-förmigen Elementarfunctionen. Wir erhalten somit den Satz:

Die Anzahl aller gleichwerthigen primitiven Producte von je r_1 r-förmigen Elementarfunctionen ist

(2) $$\sigma = \frac{1}{r_1!} \cdot \frac{(r\,r_1)!}{(r!)^{r_1}}.$$

Nun lässt sich jeder r-förmigen Function von den gleichen Theilgewichten r_1 ein Product von r r_1-förmigen Elementarfunctionen eindeutig zuweisen und umgekehrt. Somit ist die Anzahl dieser gleichwerthigen

Producte gleich der Anzahl aller gleichwerthigen r-förmigen symmetrischen Functionen. Die Anzahl der ersteren erhält man nun offenbar aus der Formel (2), wenn man die Zahlen r und r_1 vertauscht. Wir erhalten somit:

Die Anzahl aller gleichwerthigen primitiven r-förmigen Functionen von den Theilgewichten r_1 ist

$$\tau = \frac{1}{r!} \cdot \frac{(r r_1)!}{(r_1!)^r}.$$

Vergleichen wir die Zahlen σ und τ mit einander, so finden wir für

$$\begin{aligned} &1. \quad r = r_1 \ldots \sigma = \tau, \\ &2. \quad r > r_1 \ldots \sigma < \tau, \\ &3. \quad r < r_1 \ldots \sigma > \tau. \end{aligned}$$

Im ersten Fall ist der im vorigen Paragraphen aufgestellte und bewiesene Satz enthalten. Für die beiden andern Fälle aber gilt:

Die Anzahl aller gleichwerthigen Producte von r-förmigen Elementarfunctionen ist grösser bezw. kleiner als die Anzahl aller mit denselben gleichwerthigen r-förmigen symmetrischen Functionen von gleichen Theilgewichten r_1, je nachdem diese Zahl grösser oder kleiner als die Gruppenzahl r ist.

Nun lässt sich jedes Product von r-förmigen Elementarfunctionen durch blosse Multiplication als eine Summe von gleichwerthigen r-förmigen symmetrischen Functionen von gleichen Theilgewichten darstellen. Bezeichnen wir die ersteren mit

$$A_1, A_2, A_3, \ldots, A_\sigma,$$

die letzteren mit

$$S_1, S_2, S_3, \ldots, S_\tau,$$

so erhalten wir die Beziehungen:

$$\begin{cases} A_1 = \alpha_1 S_1 + \beta_1 S_2 + \cdots + \tau_1 S_\tau, \\ A_2 = \alpha_2 S_1 + \beta_2 S_2 + \cdots + \tau_2 S_\tau, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ A_\sigma = \alpha_\sigma S_1 + \beta_\sigma S_2 + \cdots + \tau_\sigma S_\tau. \end{cases}$$

Multipliciren wir dieselben mit den Factoren $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\sigma$ und addiren, so erhalten wir die Summe:

$$\Sigma \lambda_1 A_1 = S_1 \Sigma \lambda_1 \alpha_1 + S_2 \Sigma \lambda_1 \beta_1 + \cdots + S_\tau \Sigma \lambda_1 \tau_1.$$

Um hieraus eine Function $S_\varkappa$ zu ermitteln, setze man deren Coefficienten $\Sigma \lambda_1 \varkappa_1 = 1$ und diejenigen aller übrigen Functionen

$$\Sigma \lambda_1 \alpha_1 = 0, \; \Sigma \lambda_1 \beta_1 = 0, \text{ etc.}$$

Alsdann erhalten wir ein System von τ linearen Gleichungen

$$\Sigma\lambda_1\alpha_1 = 0,$$
$$\Sigma\lambda_1\beta_1 = 0,$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$\Sigma\lambda_1\varkappa_1 = 1,$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$\Sigma\lambda_1\tau_1 = 0,$$

zwischen σ Unbekannten $\lambda_1\,\lambda_2\,\ldots\,\lambda_\sigma$.

Die letzteren können nun ermittelt werden, sobald

$$\tau \gtreqless \sigma.$$

Für den Fall $\tau < \sigma$ ist die Bestimmung derselben offenbar nicht möglich und damit ist auch die Darstellung der Function $S_\varkappa$ durch r-förmige Elementarfunctionen ausgeschlossen.

Ist jedoch $\tau > \sigma$, so können wir σ der Unbekannten durch die übrigen $\tau - \sigma = \mu$ linear ausdrücken. Bezeichnen wir die letzteren mit $s_1, s_2, \ldots, s_\mu$, so lässt sich der Function $S_\varkappa$ die Gestalt geben:

$$S_\varkappa = \Phi_0 + s_1\Phi_1 + s_2\Phi_2 + \cdots + s_\mu\Phi_\mu.$$

Da nun die Function $S_\varkappa$ für jeden speciellen Werth der Elemente der r Gruppen $P_1\,P_2\,\ldots\,P_r$ einen bestimmten Werth annimmt, so muss dies auch für die rechte Seite der Fall sein. Dies ist aber, weil $s_1\,s_2\,\ldots\,s_\mu$ willkürliche Grössen sind, nur möglich, wenn

$$s_1\Phi_1 + s_2\Phi_2 + \cdots + s_\mu\Phi_\mu \equiv 0$$

eine $\mu - 1$-fach unendliche Schaar von gleichwerthigen Relationen

$$\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_\mu$$

repräsentirt, welche zu weiterer Umgestaltung der Function Φ_0 verwendet werden können.

Wir erhalten somit den

Satz: *Jede r-förmige symmetrische Function von lauter gleichen Theilgewichten $q_1 = q_2 = \cdots = q_r$ lässt sich als ganze Function von nur r-förmigen Elementarfunctionen darstellen und zwar auf unendlich viele Arten, wenn $q_i > r$ ist.*

§ 37.

Reduction der r-förmigen Functionen auf die kanonische Form.

In § 34 haben wir gesehen, dass gewisse r-förmige symmetrische Functionen eine bestimmte einfache Darstellungsweise zulassen, die wir als *kanonische Form* derselben bezeichnet haben. Wir wollen im folgenden eine Methode entwickeln, nach welcher dieselben auf die genannte Form gebracht werden können.

Ist

$$J_r = \Sigma x_1^{\alpha_1} y_1^{\beta_1} \cdots \times x_2^{\alpha_2} y_2^{\beta_2} \cdots \times \cdots \times x_r^{\alpha_r} y_r^{\beta_r} = \varphi(a)$$

eine r-förmige symmetrische Function von den Theilgewichten

$$q_1 = \alpha_1 + \beta_1 + \cdots,$$
$$q_2 = \alpha_2 + \beta_2 + \cdots,$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot,$$

unter denen

$$q_i = \alpha_i + \beta_i + \cdots$$

das kleinste sein soll, so können in der kanonischen Darstellung offenbar alle möglichen r-förmigen Elementarfunctionen vorkommen, deren Reihengewichte gleich oder kleiner als die entsprechenden Reihengewichte

$$p_1 p_2 p_3 \cdots p_r$$

der Function J sind. Ebenso werden auch alle möglichen Producte von r-förmigen Elementarfunctionen auftreten können, deren Reihengewichte zusammen die Reihengewichte von J_r nicht überschreiten.

Bilden wir daher alle möglichen Producte

$$\psi_1 \psi_2 \psi_3 \cdots \psi_r$$

dieser Art von r-förmigen Elementarfunctionen, so lässt sich zu jedem derselben noch eine Gruppe von Producten von Elementarfunctionen angeben, deren Reihengewichte die correspondirenden Reihengewichte von ψ zu den Reihengewichten $p_1 p_2 \cdots p_r$ ergänzen.

Bezeichnen wir diese bezw. mit

$$f_1, \ g_1, \ h_1, \cdots$$
$$f_2, \ g_2, \ h_2, \cdots$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$f_k, \ g_k, \ h_k, \cdots$$

so erhalten wir die mit der Function J_r gleichwerthigen Formen

$$\psi_1 f_1, \ \psi_1 g_1, \ \psi_1 h_1, \cdots$$
$$\psi_2 f_2. \ \psi_2 g_2, \ \psi_2 h_2, \cdots$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\psi_k f_k, \ \psi_k g_k, \ \psi_3 h_k, \cdots,$$

deren Anzahl s sein möge.

Bezeichnen wir dieselben mit

$$A_1, A_2, A_3, \ldots, A_s,$$

so lässt sich jede derselben offenbar durch einfache Multiplication als

eine Summe von r-förmigen mit J_r gleichwerthigen symmetrischen Functionen $S_1, S_2, S_3, \ldots$ darstellen, unter denen auch die Function J_r selbst auftreten wird.

Da jedes der Producte A q_i r-förmige Elementarfunctionen enthält, so leuchtet ein, dass auch die Theilgewichte dieser Functionen offenbar sämmtlich gleich oder grösser als q_i sein müssen.

Ist die Anzahl dieser Functionen gleich t, so erhalten wir dann die s Gleichungen:

$$(1)\qquad \begin{cases} A_1 = \alpha_1 S_1 + \beta_1 S_2 + \cdots + \sigma_1 S_t, \\ A_2 = \alpha_2 S_1 + \beta_2 S_2 + \cdots + \sigma_2 S_t, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ A_s = \alpha_s S_1 + \beta_s S_2 + \cdots + \sigma_s S_t, \end{cases}$$

wo

$$\alpha_i\, \beta_i\, \gamma_i \ldots \sigma_i \quad (i = 1, 2, 3, \ldots, s)$$

einfache Zahlen sind, die sich bei der Multiplication ergeben.

Ist nun

$$s = t,$$

so lässt sich hieraus jede der Functionen S direct durch die Producte A ausdrücken.

Wir erhalten

$$S_1 = \frac{(A_1\, \beta_2\, \gamma_3 \ldots \sigma_s)}{\Delta}, \qquad S_2 = \frac{(\alpha_1\, A_2\, \gamma_3 \ldots \sigma_s)}{\Delta}, \text{ etc.} \ldots$$

wo

$$\Delta = (\alpha_1\, \beta_2\, \gamma_3 \ldots \sigma_s)$$

ist.

Das folgende Beispiel wird das Verfahren erläutern:

Es sollen die dreiförmigen Functionen von den Reihengewichten

$$p_1 = 3, \; p_2 = 1, \; p_3 = 1$$

für drei Gruppen auf die kanonische Form gebracht werden.

Wir erhalten als Producte $\psi, f, g, \ldots$

ψ	f	g
a_{111}	$a_2 a_3$	a_{23}
a_{112}	$a_1 a_3$	a_{13}
a_{113}	$a_1 a_2$	a_{12}
a_{123}	a_1^2	a_{11}

und demnach für die Functionen A die Tabelle

			S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7	S_8
			$x_1^3 y_2 z_3$	$x_1^2 y_1 x_2 z_3$	$x_1^2 z_1 x_2 y_3$	$x_1 y_1 z_1 x_2 x_3$	$x_1^2 x_2 y_2 z_3$	$x_1^2 x_2 z_2 y_3$	$x_1 z_1 x_2 y_2 x_3$	$x_1^2 y_2 z_2 x_3$
A_1	a_{111}	$a_2 a_3$				1			1	
A_2		a_{23}							1	
A_3	a_{112}	$a_1 a_3$			1	1		1	1	1
A_4		a_{13}						1	1	1
A_5	a_{113}	$a_1 a_2$		1		1	1		1	1
A_6		a_{12}					1		1	1
A_7	a_{123}	a_1^2	1	1	1		2	2	2	
A_8		a_{11}					1	1	1	

Ermittelt man hieraus die Functionen S, so erhalten wir die weitere Tabelle:

	a_{111}		a_{112}		a_{113}		a_{123}	
	$a_2 a_3$	a_{23}	$a_1 a_3$	a_{13}	$a_1 a_2$	a_{12}	a_1^2	a_{11}
S_1	-2	-2	-1	$+1$	-1	1	1	-2
S_2	-1	1			1	-1		
S_3	-1	1	1	-1				
S_4	1	-1						
S_5		$-\frac{1}{2}$		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$
S_6		$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$
S_7		1						
S_8		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$		$-\frac{1}{2}$

Ist jedoch $t > s$, so lassen sich *nicht alle Functionen S durch die Producte A* ausdrücken. Multipliciren wir in diesem Fall die Gleichungen (1) mit den Factoren $\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_s$, und addiren, so folgt:

$$(2) \qquad \sum_1^s \lambda_1 A_1 = S_1 \Sigma \lambda_1 \alpha_1 + S_2 \Sigma \lambda_1 \beta_1 + \cdots + S_t \Sigma \lambda_1 \sigma_1 .$$

Soll nun eine Function S_x durch die Producte A ausgedrückt werden können, so müssen offenbar die t Gleichungen bestehen:

$$(3) \qquad \begin{cases} \Sigma \lambda_1 \alpha_1 = 0, \\ \Sigma \lambda_1 \beta_1 = 0, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \Sigma \lambda_1 x_1 = 1, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \Sigma \lambda_1 \sigma_1 = 0, \end{cases}$$

wo $\Sigma \lambda_1 x_1$ den Coefficienten von S_x in Gleichung (2) angiebt.

Da nun $t > s$ ist, so kann man aus s dieser Gleichungen die Factoren $\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_s$ ermitteln. Genügen nun die aus den s Gleichungen gefundenen Werthe derselben auch den $t - s$ übrigen Gleichungen, so ist *die Bestimmung der Function S_x als ganze Function der Producte A möglich.*

Wie wir früher (§ 34) schon gesagt haben, ist dies für alle Functionen S nicht der Fall; insbesondere auch für diejenigen nicht, welche entstanden sind durch Producte A, in denen $f, g, h, \ldots$ Elementarfunctionen sind.

Beispiel. Um die r-förmigen Functionen von den Reihengewichten

$$p_1 = r, \quad p_2 = 1, \quad p_3 = 1$$

auf die kanonische Form zu bringen, erhalten wir die Producte

ψ_1	f_1	g_1
$a_{r-2,1,1}$	a_1^2	a_{11}
$a_{r-1,1,0}$	$a_1 a_2$	a_{12}
$a_{r-1,0,1}$	$a_1 a_3$	a_{13}
$a_{r,0,0}$	$a_2 a_3$	a_{23}

und die

Tabelle I.

		S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7	S_8	S_9
		$x_1^3 x_2 \cdots y_{r-1} z_r$	$x_1^2 y_1 x_2 \ldots z_r$	$x_1^2 z_1 x_2 \ldots y_r$	$x_1 y_1 z_1 x_2 \ldots x_r$	$x_1^2 x_2^2 x_3 \cdots y_{r-1} z_r$	$x_1^2 x_2 y_2 x_3 \ldots z_r$	$x_1^2 x_2 z_2 x_3 \ldots y_r$	$x_1^2 y_2 z_2 x_3 \ldots x_r$	$x_1 y_1 x_2 z_2 x_3 \ldots x_r$
$a_{r-2,1,1}$	a_1^2	1	1	1		2	2	2		2
	a_{11}					1	1	1		1
$a_{r-1,0,1}$	$a_1 a_2$		1		1		1		1	1
	a_{12}						1		1	1
$a_{r-1,1,0}$	$a_1 a_3$			1	1			1	1	1
	a_{13}							1	1	1
$a_{r,0,0}$	$a_2 a_3$				1					1
	a_{23}									1

Multiplicirt man diese Gleichungen mit den Factoren

$$\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_8,$$

so erhält man als Coefficienten der Functionen S die 9 linearen Beziehungen:

1. $\lambda_1 =$
2. $\lambda_1 + \lambda_3 =$
3. $\lambda_1 + \lambda_5 =$
4. $\lambda_3 + \lambda_5 + \lambda_7 =$
5. $2\lambda_1 + \lambda_2 =$
6, $2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 =$
7. $2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_5 + \lambda_6 =$
8. $\lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5 + \lambda_6 =$
9. $2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5 + \lambda_6 + \lambda_7 + \lambda_8 =$

von denen die entsprechende von $S_\varkappa$ gleich 1 und alle übrigen gleich 0 zu setzen sind.

Ermittelt man in den hieraus sich ergebenden 9 Systemen von linearen Gleichungen die Functionen $\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_8$ aus je 8 derselben, so zeigt sich, dass dieselben nur für die Functionen S_1, S_2, S_3, S_4 und S_9 auch der 9ten Gleichung genügen. Die Functionen S_5, S_6, S_7 und S_8

können somit nicht allgemein durch die Producte A linear dargestellt werden.

Wir erhalten demnach für die ersteren die

Tabelle II.

	$a_{r-2,1,1}$		$a_{r-1,0,1}$		$a_{r-1,1,0}$		$a_{r,0,0}$	
	a_1^2	a_{11}	$a_1 a_2$	a_{12}	$a_1 a_3$	a_{13}	$a_2 a_3$	a_{23}
$\Sigma x_1^3 x_2 \ldots y_{r-1} z_r$	1	-2	-1	1	-1	1	2	-2
$x_1^2 y_1 x_2 \ldots z_r$			1	-1			-1	1
$x_1^2 z_1 x_2 \ldots y_r$					1	-1	-1	1
$x_1 y_1 z_1 x_2 \ldots x_r$							1	-1
$x_1 y_1 x_2 y_2 x_3 \ldots x_r$								1

Ist $s > t = t + \mu$, so lassen sich t von den Factoren λ durch die μ übrigen linear ausdrücken. Dadurch erhalten wir für S_x eine kanonische Darstellung

$$S_x = \Phi_0 + l_1 \Phi_1 + l_2 \Phi_2 + \cdots + l_\mu \Phi_\mu,$$

in welcher $l_1, l_2, \ldots, l_\mu$ willkürliche Zahlen sind. Da nun S_x für jeden speciellen Werth der Elemente der Gruppen einen bestimmten Werth annehmen muss, so kann dies nur der Fall sein, wenn

$$l_1 \Phi_1 + l_2 \Phi_2 + \cdots + l_\mu \Phi_\mu \equiv 0$$

eine $\mu - 1$-fach unendliche Schaar von gleichwerthigen Relationen

$$\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \ldots. \Phi_\mu$$

repräsentirt.

Da sich jedem der Producte

$$f, g, h, \ldots$$

von Elementarfunctionen eine bestimmte mit ihr gleichwerthige symmetrische Function eindeutig zuordnen lässt und umgekehrt, so werden wir auch an Stelle jener Producte diese Functionen setzen dürfen. Bezeichnen wir dieselben mit

$$\begin{array}{c} m_1\, n_1\, p_1 \ldots, \\ m_2\, n_2\, p_2 \ldots, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{array}$$

so erhalten wir auch an Stelle der Producte A die Producte

$$\begin{array}{c} m_1 \psi_1,\ n_1 \psi_1,\ p_1 \psi_1 \ldots, \\ m_2 \psi_2,\ n_2 \psi_2,\ p_2 \psi_2 \ldots, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{array}$$

die wir mit B bezeichnen wollen und deren Anzahl demnach auch gleich s ist.

Diese geben ausmultiplicirt offenbar die nämlichen symmetrischen Functionen

$$S_1\, S_2\, S_3 \ldots S_t$$

wie die Producte A.

Wir können somit auch die Functionen S auf dieselbe Weise durch die Producte B ausdrücken, wie dies für die Producte A der Fall war. Wir stellen dieselben in zwei weiteren Tabellen zusammen:

Tabelle III.

		S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7	S_8	S_9
$a_{r-2,1,1}$	$\Sigma x_1 x_2$					1	1	1		1
	Σx_1^2	1	1	1						
$a_{r-1,0,1}$	$\Sigma x_1 y_2$						1		1	1
	$\Sigma x_1 y_1$		1		1					
$a_{r-1,1,0}$	$\Sigma x_1 z_2$							1	1	1
	$\Sigma x_1 z_1$			1	1					
$a_{r,0,0}$	$\Sigma y_1 z_2$									1
	$\Sigma y_1 z_1$				1					

Tabelle IV.

	$a_{r-2,1,1}$		$a_{r-1,0,1}$		$a_{r-1,1,0}$		$a_{r,0,0}$	
	$\Sigma x_1 x_2$	Σx_1^2	$\Sigma x_1 y_2$	$\Sigma x_1 y_1$	$\Sigma x_1 z_2$	$\Sigma x_1 z_1$	$\Sigma y_1 z_2$	$\Sigma y_1 z_1$
S_1		1		-1		-1		2
S_2				1				-1
S_3						1		-1
S_4								1
S_9							1	

Da nun die Beziehung zwischen den Functionen $f, g, h, \ldots$ einerseits und den $m, n, p, \ldots$ andererseits eindeutig ist und umgekehrt, *so ist auch die Anzahl der Producte A gleich der Anzahl der Producte B.*

Da ferner die Functionen $f, g, h, \ldots$ sich durch Multiplication linear durch die Functionen $m, n, p, \ldots$ ausdrücken lassen, so können wir auch umgekehrt die A selbst linear durch die Functionen B ermitteln.

Es ist

$$\begin{aligned} A_1 &= \alpha_1 B_1 + \beta_1 B_2 + \cdots + \tau_1 B_s, \\ A_2 &= \alpha_2 B_1 + \beta_2 B_2 + \cdots + \tau_2 B_s, \\ &\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ &\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ A_s &= \alpha_s B_1 + \beta_s B_2 + \cdots + \tau_s B_s, \end{aligned}$$

woraus wir die Producte B in eindeutiger Weise linear durch die B erhalten können. Da die Darstellung der Functionen S durch die Functionen B sehr einfach ist (man hat nur das Product von zwei symmetrischen Functionen zu bilden), so wird man zunächst mit Vortheil die S durch die Producte B ausdrücken und diese nachträglich durch die A ersetzen, um die kanonische Form zu erhalten.

Urach, im October 1893.

Ueber die Reduction der binären quadratischen Formen.

Von

A. Hurwitz in Zürich.

§ 1.

Die Farey'schen Polygone.

Bezeichnen x, y, z homogene Dreieckscoordinaten, so durchläuft der Punkt

$$x : y : z = 1 : -\lambda : \lambda^2 \tag{1}$$

einen Kegelschnitt K, wenn λ die reellen Zahlen von $-\infty$ bis $+\infty$ annimmt. Jedem besonderen Werthe λ_0 von λ entspricht ein bestimmter Punkt dieses Kegelschnittes, und wir wollen diesen Punkt kurz als den „Punkt λ_0" bezeichnen. Der Einfachheit halber möge die Coordinatenbestimmung so getroffen werden, dass der Kegelschnitt K ein Kreis ist und dass die Punkte $0, 1, \infty$ mit den Ecken eines dem Kreise K einbeschriebenen regulären Dreiecks zusammenfallen. (Vgl. Fig. 1). Wir werden nun in diesem Paragraphen eine Reihe von Definitionen und Sätzen aufstellen, die sich auf diejenigen Punkte des Kreises K beziehen, welche rationalen Werthen von λ entsprechen.

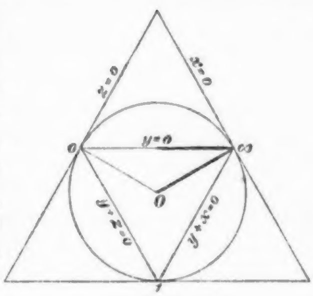


Fig. 1.

Definition 1. *Die Verbindungslinie zweier Punkte $\frac{r}{u}$ und $\frac{s}{v}$, wo r, u, s, v ganze Zahlen bezeichnen, soll eine „Elementarsehne" des Kreises K heissen, wenn $rv - su = \pm 1$ ist.*

Hiernach werden beispielsweise, da $0 = \frac{0}{1}$, $1 = \frac{1}{1}$, $\infty = \frac{1}{0}$ ist, die Sehnen

$$01,\ 1\infty,\ \infty 0$$

Elementarsehnen sein.

Definition 2. *Ein dem Kreise K einbeschriebenes Dreieck soll*

ein „Elementardreieck" heissen, wenn jede Seite des Dreiecks eine Elementarsehne ist.

Beispielsweise wird das Dreieck $0\,1\,\infty$ ein Elementardreieck sein.

Im Anschluss an diese Definition beweisen wir den

Satz 1. *Jede Elementarsehne ist Seite von zwei Elementardreiecken, die auf verschiedenen Seiten der Sehne liegen.*

Es sei σ eine Elementarsehne, $\frac{r}{u}$ und $\frac{s}{v}$ seien ihre Endpunkte, so ist

$$rv - su = \varepsilon = \pm 1.$$

Soll nun $\frac{p}{q}$ der dritte Eckpunkt eines Elementardreiecks sein, dessen beide andern Eckpunkte $\frac{r}{u}$ und $\frac{s}{v}$ sind, so muss

$$pv - qs = \varepsilon_1 = \pm 1,$$
$$pu - qr = \varepsilon_2 = \pm 1$$

sein. Hieraus folgt, durch Auflösung nach p und q,

$$\varepsilon p = \varepsilon_1 r - \varepsilon_2 s,$$
$$\varepsilon q = \varepsilon_1 u - \varepsilon_2 v,$$

also entweder $\frac{p}{q} = \frac{r+s}{u+v}$ oder $\frac{p}{q} = \frac{r-s}{u-v}$. Jeder dieser beiden Brüche liefert in Verbindung mit den Brüchen $\frac{r}{u}$ und $\frac{s}{v}$ auch thatsächlich ein Elementardreieck. Da ferner die Punkte $\frac{r}{u}$ und $\frac{s}{v}$ durch die Punkte $\frac{r+s}{u+v}$ und $\frac{r-s}{u-v}$ harmonisch getrennt werden, so liegen die beiden über der Sehne σ möglichen Elementardreiecke zu verschiedenen Seiten der Sehne σ. Damit ist der Satz 1 vollständig bewiesen. Beiläufig sei noch bemerkt, dass man jedes der beiden über der Sehne σ möglichen Elementardreiecke aus dem anderen durch eine einfache geometrische Construction ableiten kann, da die Verbindungslinie der Punkte $\frac{r+s}{u+v}$ und $\frac{r-s}{u-v}$ durch den Pol der Sehne σ geht. (Vgl. Fig. 2.)

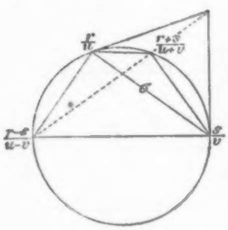


Fig. 2.

Es soll sich nun darum handeln, ein anschauliches Bild von der Gesammtheit aller Elementardreiecke zu gewinnen. Zu dem Ende stellen wir zunächst folgende neue Definition auf:

Definition 3. *Man betrachte alle rationalen Zahlen $\frac{r}{u}$, deren Zähler und Nenner absolut genommen die positive ganze Zahl n nicht überschreiten. Die entsprechenden Punkte $\frac{r}{u}$ des Kreises K bilden die*

Ecken eines dem Kreise einbeschriebenen convexen Polygones P_n, welches das n^{te} Farey'sche Polygon genannt werden soll.

So ist das erste Farey'sche Polygon P_1 das Viereck $\infty, -1, 0, 1$; das zweite Farey'sche Polygon P_2 das Achteck $\infty, -2, -1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1, 2$ u. s. w. (Vgl. Figur 3, in welcher die Seiten des Polygones P_2 stark ausgezogen sind.)

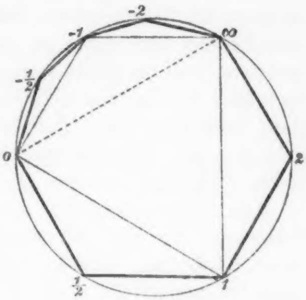


Fig. 3.

Wir ergänzen diese Definition noch dadurch, dass wir als „nulltes" Farey'sches Polygon P_0 das von den Punkten ∞, 0 gebildete Zweieck einführen. Es gilt dann allgemein der

Satz 2. *Die Parameter der aufeinanderfolgenden Ecken des n^{ten} Farey'schen Polygones P_n bilden die n^{te} Farey'sche Reihe.**)

Aus den Eigenschaften der Farey'schen Reihen geht nun hervor:

Satz 3. *Jede Seite eines Farey'schen Polygones ist eine Elementarsehne und umgekehrt: jede Elementarsehne ist Seite eines Farey'schen Polygones.*

Den zweiten Theil dieses Satzes können wir noch näher präcisiren. Nämlich:

Satz 4. *Wenn in der Reihe $P_0, P_1, P_2, \ldots$ das Polygon P_n das erste ist, unter dessen Ecken sich beide Endpunkte der Elementarsehne σ finden, so ist σ eine Seite des Polygones P_n.*

Hieran knüpfen wir den Beweis des folgenden Satzes:

Satz 5. *Das n^{te} Farey'sche Polygon* $(n > 0)$ *setzt sich gerade aus denjenigen Elementardreiecken zusammen, deren Eckpunkte sich unter den Ecken des n^{ten} Farey'schen Polygones befinden.*

Oder anders ausgedrückt:

Die Elementardreiecke, die sich aus den Ecken des n^{ten} Farey'schen Polygones bilden lassen, bedecken dieses Polygon einfach und lückenlos.

Für den Fall $n = 1$ ist dieser Satz offenbar richtig, da das Polygon P_1 sich aus den beiden über der Sehne $\infty 0$ möglichen Elementardreiecken $\infty, 0, 1$; $\infty, 0, -1$ zusammensetzt. Wir brauchen also nur zu zeigen, dass der Satz für das Polygon P_{n+1} gilt, wenn wir seine Gültigkeit für das Polygon P_n als schon bewiesen voraussetzen. Nun setzen sich die Elementardreiecke, welche aus den Ecken des $(n+1)^{ten}$ Polygones gebildet werden können, zusammen

*) Vergl. die Abhandlung des Verfassers: „Ueber die angenäherte Darstellung der Zahlen durch rationale Brüche" (diese Annalen Bd. 44, pag. 417).

1) aus denjenigen, bei welchen nur Ecken des n^{ten} Polygones zur Verwendung kommen und diese bedecken nach Voraussetzung das n^{te} Polygon einfach und lückenlos;

2) aus denjenigen, bei welchen auch Ecken des $(n+1)^{ten}$ Polygones, die nicht schon Ecken des n^{ten} Polygones sind, zur Verwendung gelangen. Ist C eine solche Ecke, so liegt dieselbe zwischen zwei aufeinanderfolgenden Ecken A und B des n^{ten} Polygones, mit welchen zusammen sie ein Elementardreieck CAB bestimmt (Satz 3). Da nun, nach Satz 4, CA und CB die einzigen Elementarsehnen sind, deren einer Endpunkt mit C, deren anderer Endpunkt mit einer andern Ecke des $(n+1)^{ten}$ Polygones zusammenfällt, so ist CAB das einzige Elementardreieck, welches C zur einen Ecke hat.

Die zweite Kategorie von Elementardreiecken besteht also aus Dreiecken, die sich auf gewisse Seiten (AB) des n^{ten} Polygones aufsetzen. Offenbar entsteht das $(n+1)^{te}$ Polygon, indem wir diese Dreiecke zum n^{ten} Polygone hinzufügen, woraus der zu beweisende Satz hervorgeht.

Aus dieser Betrachtung folgt zugleich der

Satz 6. *Ist in der Reihe der Farey'schen Polygone $P_1, P_2, \ldots$ das Polygon P_n das erste, unter dessen Ecken sich die drei Eckpunkte A, B, C irgend eines Elementardreiecks befinden, so sind diese Eckpunkte A, B, C aufeinanderfolgende Ecken des Polygones P_n.*

Lassen wir die ganze Zahl n über alle Grenzen wachsen, so nähert sich das Polygon P_n immer mehr dem Kreise K an. Aus dem Satz 5 ergiebt sich daher der

Satz 7. *Die Gesammtheit aller Elementardreiecke überdeckt das Innere des Kreises K einfach und lückenlos.*

Die von der Gesammtheit aller Elementardreiecke gebildete Figur stimmt im Wesentlichen mit derjenigen überein, die in den von Herrn Fricke herausgegebenen Vorlesungen Felix Klein's über elliptische Modulfunctionen*) mitgetheilt wird. Herr Klein hat diese Figur aus der der Theorie der Modulfunctionen zu Grunde liegenden Figur abgeleitet. Umgekehrt kann man die letztere und ihre Eigenschaften aus der ersteren ableiten.

§ 2.

Geometrische Darstellung der binären quadratischen Formen.

Wir ordnen nun der binären quadratischen Form

$$f \equiv (a, b, c) \equiv ax^2 + 2bxy + cy^2 \tag{1}$$

denjenigen Punkt zu, dessen homogene Coordinaten $a : b : c$ sind.

---

*) Leipzig 1890, Bd. I, S. 239. Vergl. auch die Bemerkungen am Schlusse der vorliegenden Arbeit.

Es entspricht dann jeder Form ein bestimmter Punkt. Umgekehrt entsprechen irgend einem Punkte (a, b, c) die unendlich vielen Formen

$$\varrho a x^2 + 2\varrho b x y + \varrho c y^2, \tag{2}$$

wo ϱ jeden beliebigen reellen Werth erhalten kann.

Wenn die Determinante D der Form (a, b, c):

$$D = b^2 - ac \tag{3}$$

verschwindet, so können wir λ so bestimmen, dass

$$a : b : c = 1 : -\lambda : \lambda^2 \tag{4}$$

ist. Es entspricht also einer Form mit verschwindender Determinante ein Punkt λ des Kreises K.

Umgekehrt entsprechen nach (2) dem Punkte λ des Kreises K die Formen

$$\varrho x^2 - 2\varrho\lambda x y + \varrho\lambda^2 y^2 = \varrho(x - \lambda y)^2. \tag{5}$$

Man zeigt ferner leicht, dass eine Form f, durch einen Punkt im Innern oder ausserhalb des Kreises K geometrisch dargestellt wird, je nachdem ihre Determinante D negativ oder positiv ist.

Dies vorausgeschickt, betrachten wir eine beliebige lineare Transformation

$$(S) \quad \begin{cases} x = \alpha x' + \beta y', \\ y = \gamma x' + \delta y'. \end{cases} \tag{6}$$

Durch dieselbe geht die Form (1) in die Form

$$fS \equiv f' \equiv a' x'^2 + 2b' x' y' + c' y'^2 \tag{7}$$

über, wo

$$\begin{cases} a' = a\alpha^2 + 2b\alpha\gamma + c\gamma^2, \\ b' = a\alpha\beta + b(\alpha\delta + \beta\gamma) + c\gamma\delta, \\ c' = a\beta^2 + 2b\beta\delta + c\delta^2 \end{cases} \tag{8}$$

ist. Es wird demnach durch die Transformation S jedem Punkte (a, b, c) ein bestimmter Punkt (a', b', c') zugeordnet, und ein Blick auf die Gleichungen (8) lehrt, dass die durch diese Zuordnung vermittelte Umformung der Ebene eine Collineation ist. Wir wollen diese, der Transformation S entsprechende Collineation ebenfalls mit S bezeichnen. Bei der Collineation S geht der Kreis K in sich über. In der That werden die Formen (5), welche dem Punkte λ des Kreises K entsprechen, durch die Transformation S in die Formen

$$\varrho[\alpha x' + \beta y' - \lambda(\gamma x' + \delta y')]^2 = \varrho(\alpha - \gamma\lambda)^2 \left(x' - \frac{\delta\lambda - \beta}{-\gamma\lambda + \alpha} y'\right)^2$$

übergeführt. Dem Punkte λ des Kreises K entspricht also vermöge der Collineation S der Punkt λ' des Kreises K, wo

$$(9)\quad \begin{cases} \lambda' = \dfrac{\delta\lambda - \beta}{-\gamma\lambda + \alpha}, \\ \lambda \;= \dfrac{\alpha\lambda' + \beta}{\gamma\lambda' + \delta} \end{cases}$$

ist. Die Peripherie des Kreises K wird also durch die Collineation S projectiv auf sich selber bezogen. Schneidet irgend eine Gerade g den Kreis K in den Punkten λ_1 und λ_2 und sind λ_1' und λ_2' die diesen Punkten bezüglich entsprechenden Punkte, so wird in der Collineation S der Geraden g die Verbindungsgerade g' der Punkte λ_1' und λ_2' entsprechen. Hiernach leuchtet ein, dass die Collineation S durch die projective Beziehung des Kreises K auf sich selber schon vollständig bestimmt ist. Und dieser Umstand bringt es mit sich, dass wir die Transformationstheorie der binären quadratischen Formen auf das Studium der projectiven Beziehungen des Kreises K auf sich selber (also auf das Studium der Formen mit verschwindender Determinante) werden gründen können.*)

Durch die projective Beziehung (9) sind die Coefficienten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, der Transformation S nur ihren Verhältnissen nach bestimmt. Wir wollen aber zwei Transformationen

$$S = \begin{pmatrix} \alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad S' = \begin{pmatrix} \alpha', & \beta' \\ \gamma', & \delta' \end{pmatrix}$$

als nicht verschieden ansehen; wenn

$$\alpha : \beta : \gamma : \delta = \alpha' : \beta' : \gamma' : \delta'$$

ist, und diese Festsetzung hat zur Folge, dass die projectivische Beziehung (9) die Transformation S vollständig bestimmt.

Fügen wir hier noch eine Bemerkung hinzu, die sich auf das Vorzeichen der Determinante $\alpha\delta - \beta\gamma$ der Transformation S bezieht! Wenn λ von $-\infty$ bis $+\infty$ wächst, so wird der Punkt λ gerade die Peripherie des Kreises K beschreiben. Den Sinn, in welchem dies geschieht, wollen wir den *positiven* Durchlaufungssinn des Kreises K nennen. Wenn nun der Punkt λ den Kreis K im positiven Sinne durchläuft, so wird der nach (9) entsprechende Punkt λ' den Kreis K gleichzeitig durchlaufen, und zwar ebenfalls im positiven Sinne, wenn $\alpha\delta - \beta\gamma$ positiv ist, dagegen im entgegengesetzten (negativen) Sinne, wenn $\alpha\delta - \beta\gamma$ negativ ist.

Zur Erleichterung der Ausdrucksweise werden wir übrigens weiterhin, sofern kein Missverständniss zu befürchten ist, sagen „der Punkt (a, b, c) oder allgemeiner irgend eine Figur F gehe durch die Trans-

*) In gleicher Weise wird man der Transformationstheorie der cubischen Formen die projectivischen Beziehungen einer Raumcurve 3. Ordnung auf sich selber u. s. w. zu Grunde legen können. Vergl. übrigens die allgemeinen Ausführungen am Schlusse der Arbeit.

formation S in den Punkt (a', b', c') bez. in die Figur F' über", wenn die Collineation S den Punkt (a, b, c) bez. die Figur F in den Punkt (a', b', c') bez. die Figur F' überführt.

§ 3.

Die ganzzahligen linearen Transformationen der Determinante 1.

Wir verstehen von jetzt ab unter einer Transformation S stets eine solche, deren Coefficienten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ganze Zahlen der Determinante

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1$$

sind. Durch eine Transformation S gehen die Endpunkte $\frac{r}{u}, \frac{s}{v}$ einer Elementarsehne nach (9) in die Punkte $\frac{-\beta u + \delta r}{\alpha u - \gamma r}$ bez. $\frac{-\beta v + \delta s}{\alpha v - \gamma s}$ über. Die letzteren bilden wieder die Endpunkte einer Elementarsehne; denn es ist

$$(\alpha u - \gamma r)(-\beta v + \delta s) - (\alpha v - \gamma s)(-\beta u + \delta r)$$
$$= (\alpha\delta - \beta\gamma)(us - vr) = \pm 1.$$

Somit besteht der

Satz 8. *Durch eine Transformation S geht jede Elementarsehne wieder in eine Elementarsehne über.*

Und hieraus folgt unmittelbar der

Satz 9. *Durch eine Transformation S geht jedes Elementardreieck wieder in ein Elementardreieck über.*

An diesen Satz knüpft sich sofort die Frage: Giebt es Transformationen S, die das Dreieck Δ in das Dreieck Δ' überführen, wo Δ und Δ' irgend zwei Elementardreiecke bezeichnen?

Wir betrachten hier zunächst den Fall, wo Δ' das Dreieck $0 1 \infty$ ist. Die Ecken des Dreiecks Δ seien die Punkte p, q, r, so sind

$$p = \frac{\beta}{\delta}, \quad q = \frac{\beta + \alpha}{\gamma + \delta}, \quad r = \frac{\alpha}{\gamma}$$

drei aufeinanderfolgende Glieder einer Farey'schen Reihe (Satz 6).

Eine Transformation S, welche Δ in das Dreieck $0 1 \infty$ überführt, muss nun die Punkte p, q, r in irgend einer Reihenfolge in die Punkte $0, 1, \infty$ überführen. Da aber bei jeder Transformation S der positive Durchlaufungssinn des Kreises K wieder in den positiven Durchlaufungssinn übergeht, so kommen nur die drei Zuordnungen

$$\begin{pmatrix} p, & q, & r \\ 0, & 1, & \infty \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} q, & r, & p \\ 0, & 1, & \infty \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} r, & p, & q \\ 0, & 1, & \infty \end{pmatrix}$$

in Betracht. Diesen drei Zuordnungen entsprechend erhalten wir die Transformationen

(10) $S_1 = \begin{pmatrix} \alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta \end{pmatrix}$, $S_2 = \begin{pmatrix} -\beta, & \alpha+\beta \\ -\delta, & \gamma+\delta \end{pmatrix}$, $S_3 = \begin{pmatrix} \alpha+\beta, & -\alpha \\ \gamma+\delta, & -\gamma \end{pmatrix}$,

welche das Dreieck Δ in das Dreieck 01∞ überführen. Da jede dieser Transformationen eine andere Ecke des Dreiecks Δ in den Punkt ∞ überführt, so können wir den Satz aussprechen:

Satz 10. *Jedes Elementardreieck Δ lässt sich durch eine einzige Transformation S so in das Dreieck 01∞ überführen, dass eine bestimmte der Ecken des Elementardreiecks in den Punkt ∞ übergeht.*

Den drei Ecken eines Elementardreiecks entsprechend giebt es so drei Transformationen (10), die dasselbe in das Dreieck 01∞ überführen.

Sind nun Δ und Δ' irgend zwei Elementardreiecke, S' eine der drei Transformationen, die Δ' in das Dreieck 01∞ überführen, und bezeichnet S eine Transformation, durch die Δ in Δ' übergeht, so ist klar, dass durch die zusammengesetzte Transformation SS' das Dreieck Δ in das Dreieck 01∞ übergeht. Daher ist entweder $SS' = S_1$ oder $SS' = S_2$ oder $SS' = S_3$. Hieraus folgt, dass es drei Transformationen, nämlich

$$S_1(S')^{-1},\ S_2(S')^{-1},\ S_3(S')^{-1}$$

giebt, die das Dreieck Δ in das Dreieck Δ' überführen.

Specialisiren wir den Satz 10 auf den Fall, wo das Dreieck Δ mit dem Dreieck 01∞ zusammenfällt, also $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$, $\delta = 1$ ist, so erhalten wir das Resultat:

Satz 11. *Das Elementardreieck 01∞ geht durch die Transformationen*

$$(11) \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0, & -1 \\ 1, & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1, & -1 \\ 1, & 0 \end{pmatrix}$$

und nur durch diese in sich über.

Die diesen Transformationen (11) entsprechenden Collineationen haben eine einfache geometrische Bedeutung. Offenbar sind dieselben diejenigen Drehungen der Ebene um den Mittelpunkt O des Kreises K, bei welchen das Dreieck 01∞ mit sich zur Deckung kommt.

Was die Elementarsehnen angeht, so wird jede solche Sehne σ durch zwei Transformationen S in die Sehne 0∞ (und durch ebensoviele Transformationen in jede andere Elementarsehne) übergehen. Denn die Sehne σ ist Seite von zwei Elementardreiecken und jedes der letzteren lässt sich durch eine einzige Transformation so in das Dreieck 01∞ überführen, dass σ in die Seite 0∞ übergeht.

Jede Elementarsehne σ geht durch eine einzige von der Identität verschiedene Transformation in sich über, nämlich durch eine der drei Transformationen, welche das eine der beiden über σ möglichen Elementardreiecke in das andere überführen. Für die Elementarsehne 0∞ insbesondere ist die betreffende Transformation diejenige, welche

die Punkte $0, 1, \infty$ bez. in $\infty, -1, 0$ überführt, also, wie eine leichte Rechnung zeigt, die Transformation

$$\begin{pmatrix} 0, & -1 \\ 1, & 0 \end{pmatrix}.$$

Punkte der Sehne 0∞, die durch diese Transformation einander zugewiesen werden, sind Spiegelpunkte von einander bezüglich des Durchmessers $O1$.

§ 4.

Reduction der quadratischen Formen mit negativer Determinante.

Jede quadratische Form, deren Determinante negativ ist, wird durch einen Punkt im Innern des Kreises K dargestellt. Wir setzen nun in Bezug auf diese Formen folgende Definition fest:

Definition 4. *Eine Form* (a, b, c) *von negativer Determinante heisst „reducirt", wenn der ihr entsprechende Punkt* (a, b, c) *im Innern oder auf dem Rande des Dreiecks* 01∞ *liegt.*

Da die Elementardreiecke das Innere des Kreises K lückenlos bedecken, so wird der einer beliebigen Form negativer Determinante entsprechende Punkt im Innern oder auf dem Rande irgend eines Elementardreiecks Δ liegen. Jede der drei Transformationen S, durch die das Dreieck Δ in das Dreieck 01∞ übergeht, führt offenbar die betreffende Form in eine reducirte Form über. Es gilt daher der

Satz 12. *Jede Form negativer Determinante ist einer reducirten Form äquivalent.*

Ist (a, b, c) eine reducirte Form, deren repräsentirender Punkt im Innern (nicht auf dem Rande) des Dreiecks 01∞ liegt, so wird dieselbe durch die und nur durch die Transformationen S wieder in eine reducirte Form übergehen, welche das Dreieck 01∞ in sich überführen.

Unter Rücksicht auf den Satz 11 folgt hieraus:

Satz 13. *Die reducirten Formen, deren repräsentirende Punkte im Innern (nicht auf dem Rande) des Dreiecks* 01∞ *liegen, ordnen sich in Tripel unter einander äquivalenter, wie*

$$(a, b, c), \quad \big(c, -(b+c), a+2b+c\big), \quad \big(a+2b+c, -(a+b), a\big).$$

Zwei solche reducirte Formen sind nur dann äquivalent, wenn sie demselben Tripel angehören.

Die drei Formen eines solchen Tripels sind von einander verschieden, mit Ausnahme des Falles

$$a = -2b = c,$$

in welchem die drei Formen unter einander identisch werden. Der

Repräsentant der Formen, für welche $a = -2b = c$ ist, ist der Mittelpunkt O des Kreises K, was unmittelbar aus der geometrischen Bedeutung der Transformationen (11) einleuchtet.

Ist (a, b, c) eine reducirte Form, deren Repräsentant auf einer Seite, etwa auf der Seite 0∞ des Dreiecks 01∞ liegt, so geht dieselbe durch die Transformationen (11) in äquivalente Formen über, deren Repräsentanten auf den Seiten 01 bez. 1∞ liegen. Ferner wird die Transformation S die Form (a, b, c) dann und nur dann in eine Form, deren Repräsentant ebenfalls auf der Seite 0∞ liegt, überführen, wenn die Transformation S die Sehne 0∞ fest lässt, wenn also S entweder die identische oder die Transformation $\begin{pmatrix} 0, & -1 \\ 1, & 0 \end{pmatrix}$ ist. Aus diesen Bemerkungen ergiebt sich der

Satz 14. *Die reducirten Formen, deren repräsentirende Punkte auf den Seiten des Dreiecks* 01∞ *liegen, gruppiren sich zu je sechs unter einander äquivalenten, wie*

$$(a,\ 0,\ c),\quad (c,\ -c,\ a+c),\quad (a+c,\ -a,\ a),$$
$$(c,\ 0,\ a),\quad (a,\ -a,\ a+c),\quad (a+c,\ -c,\ c).$$

Zwei solche reducirte Formen sind nur dann äquivalent, wenn sie einer derartigen Gruppe von sechs Formen angehören.

Die sechs Formen sind, wie am einfachsten aus der geometrischen Gruppirung der entsprechenden Punkte hervorgeht, stets von einander verschieden, mit einziger Ausnahme des Falles, wo die Repräsentanten der Formen mit den Mitten der Seiten des Dreiecks 01∞ zusammenfallen. Dann reduciren sich die sechs Formen auf nur drei, nämlich

$$(a,\ 0,\ a),\quad (a,\ -a,\ 2a),\quad (2a,\ -a,\ a).$$

Betrachtet man a, b, c als laufende Coordinaten, so sind die Gleichungen der Seiten 0∞, $\infty 1$, 10 des Dreiecks 01∞ bezüglich

$$b = 0,\quad a + b = 0,\quad c + b = 0, \tag{12}$$

und hieraus folgt:

Satz 15. *Die Form* (a, b, c) *negativer Determinante ist eine reducirte Form, wenn die nicht verschwindenden unter den Zahlen* $-b$, $a+b$, $c+b$ *gleiches Vorzeichen haben.*

Die Vorzeichen der Verhältnisse $\frac{-b}{a+b}$, $\frac{-b}{c+b}$, $\frac{a+b}{c+b}$ sind nämlich im Innern des Dreiecks 01∞ constant und ändern sich beim Ueberschreiten der Seiten des Dreiecks. Indem man diese Verhältnisse für den Mittelpunkt O des Kreises K, dessen Coordinaten

$$a : b : c = 2 : -1 : 2$$

sind, berechnet, erkennt man, dass die Verhältnisse im Innern des Dreiecks positiv sind.

Die in diesem Paragraphen entwickelten Sätze enthalten die vollständige Theorie der Reduction quadratischer Formen von negativer Determinante. Wir fügen nur noch zwei Bemerkungen hinzu:

Erstens: Ist irgend eine Form gegeben, so hat man, um dieselbe zu reduciren, dasjenige Elementardreieck aufzusuchen, in welches der die Form repräsentirende Punkt fällt. Wie dieses auf Grund eines einfachen Algorithmus geschieht, wollen wir im nächsten Paragraphen zeigen.

Zweitens: Will man die Definition der reducirten Formen so stellen, dass jede Form ausnahmslos einer und nur einer reducirten Form äquivalent ist, so erzielt man dies offenbar dadurch, dass man eine Form reducirt nennt, wenn ihr Repräsentant dem Dreieck $O\,O\,\infty$ angehört, wobei nur die stark ausgezeichnete Hälfte des Randes des Dreiecks zu diesem zu rechnen ist. (Vgl. Fig. 1.)

§ 5.

Algorithmus zur Reduction einer Form von negativer Determinante.

Um das Elementardreieck zu bestimmen, in dessen Innern oder auf dessen Rand der Punkt (a, b, c) liegt, welcher die Form negativer Determinante

$$f = ax^2 + 2bxy + cy^2 \tag{13}$$

repräsentirt, suchen wir in der Reihe der Farey'schen Polygone $P_0, P_1, P_2, \ldots$ das erste auf, in welches der Punkt (a, b, c) fällt. Ist P_n irgend ein Farey'sches Polygon, so setzt sich das Innere des Kreises K zusammen aus dem Polygone P_n und den Kreissegmenten, die über den Seiten des Polygones P_n liegen. Liegt nun der Punkt (a, b, c) ausserhalb (auch nicht auf dem Rande) des Polygones P_n, so muss sich derselbe in einem dieser Kreissegmente befinden. Sind die Punkte p und r die Endpunkte der Seite des Polygones P_n, welche das betreffende Kreissegment begrenzt, so sollen die Brüche p und r ein *„Näherungspaar"* des Punktes (a, b, c) oder der Form (a, b, c) heissen.

Den Polygonen $P_0, P_1, P_2, \ldots$ entspricht so je ein Näherungspaar des Punktes (a, b, c) und zwar so lange, bis wir an ein Polygon gelangen, auf dessen Rand oder in dessen Inneres der Punkt (a, b, c) fällt. Wir setzen voraus, dass die Brüche p und r in derselben Form geschrieben werden, in welcher sie als aufeinanderfolgende Glieder der Farey'schen Reihe erscheinen.*) Insbesondere ist zu beachten, dass

*) In jeder Farey'schen Reihe ist $\frac{-1}{0}$ das erste, $\frac{1}{0}$ das letzte Glied; alle anderen Glieder werden als reducirte Brüche mit positivem Nenner geschrieben.

das aus dem Polygone P_0 (dem Zweieck 0∞) entnommene Näherungspaar

$$p = \frac{0}{1},\quad r = \frac{1}{0} \quad \text{oder} \quad p = \frac{-1}{0},\quad q = \frac{0}{1}$$

ist, je nachdem der Punkt (a, b, c) sich mit dem Punkte 1 des Kreises K oder mit dem Punkte -1 des Kreises K auf derselben Seite der Geraden 0∞ befindet.

Zur Bestimmung der Näherungspaare eines Punktes (a, b, c) dienen folgende Betrachtungen. Es sei

$$(14) \qquad p = \frac{\xi_2}{\eta_2},\quad r = \frac{\xi_1}{\eta_1}$$

ein Näherungspaar. In der ersten Farey'schen Reihe, in welcher p und r nicht mehr aufeinanderfolgende Glieder sind, tritt der Bruch

$$(15) \qquad q = \frac{\xi_3}{\eta_3}, \quad \text{wo} \quad \xi_3 = \xi_1 + \xi_2,\quad \eta_3 = \eta_1 + \eta_2,$$

zwischen p und r. Liegt der Punkt (a, b, c) im Innern des Dreiecks pqr oder auf einer der beiden Seiten pq, qr, so ist (p, r) das letzte überhaupt existirende Näherungspaar. Liegt der Punkt (a, b, c) in dem von pq begrenzten Kreissegment, so bilden die Brüche p, q, liegt er in dem von qr begrenzten Kreissegment, die Brüche q, r das auf (p, r) folgende Näherungspaar. Nun gehen durch die Transformation

$$(16) \qquad S = \begin{pmatrix} \xi_1 & \xi_2 \\ \eta_1 & \eta_2 \end{pmatrix}$$

die Punkte p, q, r in die Punkte $0, 1, \infty$ bez. über. Durch dieselbe Transformation gehe die Form (a, b, c) in die Form (a', b', c') über. Dann wird der Punkt $(a', b',, c')$ gerade so zu dem Dreieck 01∞ liegen, wie der Punkt (a, b, c) zu dem Dreieck pqr. Es folgt also:

1) Liegt der Punkt (a', b', c') im Dreieck 01∞ oder auf einer der Seiten 01, 1∞, was der Fall ist, wenn die Quotienten

$$\frac{b'}{a'+b'},\quad \frac{b'}{c'+b'}$$

beide negativ sind oder einer von ihnen unendlich ist, so ist p, r das letzte existirende Näherungspaar. Zugleich geht die Form (a, b, c) durch die Transformation S in die reducirte Form (a', b', c') über.

2) Liegt der Punkt (a', b', c') in dem von 01 begrenzten Kreissegment, was der Fall ist, wenn $\frac{b'}{c'+b'}$ positiv ist, so ist (p, q) das auf (p, r) folgende Näherungspaar.

3) Liegt der Punkt (a', b', c') in dem von 1∞ begrenzten Kreissegment, was der Fall ist, wenn $\frac{b'}{a'+b'}$ positiv ist, so ist (q, r) das auf (p, r) folgende Näherungspaar.

Was die Werthe von a', b', c', $a'+b'$, $c'+b'$ angeht, so erhält man dieselben auf folgende Weise: Man setze

$$(17)\quad f_i = a\xi_i^2 + 2b\xi_i\eta_i + c\eta_i^2,\quad f_{ik} = a\xi_i\xi_k + b(\xi_i\eta_k + \xi_k\eta_i) + c\eta_i\eta_k$$
$$(i, k = 1, 2, 3)$$

und stelle diese Werthe mit r und p in dieser Folge zusammen:

$$(18)\qquad r = \frac{\xi_1}{\eta_1},\quad p = \frac{\xi_2}{\eta_2},\ f_1,\ f_{12},\ f_2,\ f_{13},\ f_{23},\ f_3.$$

Es bestehen dann die Gleichungen:

$$(19)\qquad f_{13} = f_1 + f_{12},\quad f_{23} = f_2 + f_{12},\quad f_3 = f_{13} + f_{23},$$

so dass man durch einfache Additionen die Werthe f_{13}, f_{23}, f_3 aus f_1, f_{12}, f_2 erhält. Da nun offenbar

$$a' = f_1,\quad b' = f_{12},\quad c' = f_2$$

ist, so hat man

$$a' + b' = f_{13},\quad c' + b' = f_{23}.$$

Es ist daher p, r das letzte Näherungspaar $\Big($und (a, b, c) geht durch $\begin{pmatrix}\xi_1 & \xi_2\\ \eta_1 & \eta_2\end{pmatrix}$ in die reducirte Form (f_1, f_{12}, f_2) über$\Big)$, wenn die Werthe f_{13}, f_{23} entgegengesetztes Zeichen haben, wie f_{12}, oder wenn einer dieser Werthe verschwindet. Andernfalls folgt auf das Paar $\frac{\xi_1}{\eta_1}, \frac{\xi_2}{\eta_2}$ das Paar $\frac{\xi_3}{\eta_3}, \frac{\xi_2}{\eta_2}$ oder das Paar $\frac{\xi_1}{\eta_1}, \frac{\xi_3}{\eta_3}$, je nachdem f_{12} und f_{23} oder f_{12} und f_{13} gleiche Zeichen haben.

Ausgehend von dem ersten Näherungspaar

$$\frac{1}{0}, \frac{0}{1}, \text{ dem die Werthe } f_1 = a,\quad f_{12} = \ \ b,\quad f_2 = c,$$

bez.

$$\frac{0}{1}, \frac{-1}{0}, \text{ dem die Werthe } f_1 = c,\quad f_{12} = -b,\quad f_2 = a$$

entsprechen, kann man hiernach successive alle Näherungspaare durch einfache Additionen finden und erhält mit dem letzten Näherungspaare eine Transformation, welche die Form (a, b, c) in eine reducirte überführt. Was das erste Näherungspaar angeht, so ist dasselbe $\frac{0}{1}, \frac{-1}{0}$ oder $\frac{1}{0}, \frac{0}{1}$, je nachdem $\frac{b}{a+b}, \frac{b}{c+b}$ beide positiv sind oder nicht.

Beispiel 1.

Die Form (78, — 53, 37) zu reduciren.

Man erhält folgende Tabelle:

r	p	f_1	f_{12}	f_2	f_{13}	f_{23}	f_3
$\frac{1}{0}$	$\frac{0}{1}$	78	— 53	37	25	— 16	9
$\frac{1}{1}$	$\frac{0}{1}$	9	— 16	37	— 7	21	14
$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$	9	— 7	14	2	7	9

Die gegebene Form geht also durch die Transformation $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ in die reducirte Form (9, — 7, 14) über.

Beispiel 2.

Die Form (41, 35, 30) zu reduciren.

Man erhält in diesem Falle folgende Tabelle:

r	p	f_1	f_{12}	f_2	f_{13}	f_{23}	f_3
$\frac{0}{1}$	$\frac{-1}{0}$	30	— 35	41	— 5	6	1
$\frac{0}{1}$	$\frac{-1}{1}$	30	— 5	1	25	— 4	21
$\frac{-1}{2}$	$\frac{-1}{1}$	21	— 4	1	17	— 3	14
$\frac{-2}{3}$	$\frac{-1}{1}$	14	— 3	1	11	— 2	9
$\frac{-3}{4}$	$\frac{-1}{1}$	9	— 2	1	7	— 1	6
$\frac{-4}{5}$	$\frac{-1}{1}$	6	— 1	1	5	0	5

Die gegebene Form geht also durch die Transformation $\begin{pmatrix} -4 & -1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$ in die reducirte Form (6, —1, 1) über.

Die dem letzten Näherungspaare entsprechenden Werthe f_1, f_{12}, f_2, f_{13}, f_{23}, f_3 liefern übrigens, wie aus den Sätzen 13 und 14 folgt, unmittelbar alle reducirten Formen, denen die ursprünglich gegebene Form (a, b, c) äquivalent ist. Diese reducirten Formen sind nämlich (f_1, f_{12}, f_2), $(f_2, -f_{23}, f_3)$, $(f_3, -f_{13}, f_1)$, zu denen noch die durch

Vertauschung der äusseren Coefficienten entstehenden Formen hinzutreten, falls eine der drei Zahlen f_{12}, f_{13}, f_{23} verschwindet. So sind z. B. die der Form (78, — 53, 37) äquivalenten reducirten Formen die folgenden:

$$(9, -7, 14)\ (14, -7, 9)\ (9, -2, 9),$$

und die der Form (41, 35, 30) äquivalenten reducirten Formen lauten:

$$(6, -1, 1),\ (1, 0, 5),\ (5, -5, 6),$$
$$(1, -1, 6),\ (5, 0, 1),\ (6, -5, 5).$$

§ 6.

Reduction der quadratischen Formen mit positiver Determinante.

Eine Form (a, b, c), deren Determinante $D = b^2 - ac$ positiv ist, wird durch einen Punkt ausserhalb des Kreises K repräsentirt. Wir wollen indessen, da sich dieses als zweckmässig erweist, an Stelle dieses Punktes seine Polare in Bezug auf den Kreis K als Repräsentanten der Form betrachten.

Die Gleichung dieser Polare lautet

$$az - 2by + cx = 0, \tag{20}$$

wo x, y, z die laufenden Coordinaten bezeichnen. Die Parameter der Durchschnittspunkte der Geraden (20) mit dem Kreise K sind die Wurzeln der Gleichung

$$a\lambda^2 + 2b\lambda + c = 0 \tag{21}$$

und haben also die Werthe:

$$\lambda_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{a}, \quad \lambda_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{a}. \tag{22}$$

Das Zeichen $\sqrt{D}$ soll hier den positiven Werth der Quadratwurzel bedeuten und die Wurzel λ_1 möge als die „erste", die Wurzel λ_2 als die „zweite" Wurzel der Form (a, b, c) bezeichnet werden.

Geht die Form (a, b, c) durch eine Transformation S in die Form (a', b', c') über, so geht bei der entsprechenden Collineation S die Gerade $\lambda_1 \lambda_2$, welche die Form (a, b, c) repräsentirt, in die Gerade $\lambda_1' \lambda_2'$ über, welche die Form (a', b', c') repräsentirt. Und zwar zeigt eine kurze Rechnung*), dass sich die ersten Wurzeln und die zweiten Wurzeln entsprechen, d. h. dass bei der Collineation S der Punkt λ_1 des Kreises K in den Punkt λ_1', der Punkt λ_2 in den Punkt λ_2' übergeht.

---

*) Vgl. Dirichlet, Vorlesungen über Zahlentheorie, herausgegeben von R. Dedekind, 4. Auflage, (Braunschweig 1894) 4. Abschnitt, § 73.

Wir bemerken noch, dass wir, um triviale Ausnahmen zu vermeiden, nur Formen betrachten wollen, deren Wurzeln λ_1, λ_2 irrational sind.

Dies vorausgeschickt, definiren wir die reducirten Formen so:

Definition 5. *Eine Form* (a, b, c) *von positiver Determinante heisst reducirt, wenn ihre erste Wurzel* λ_1 *positiv, ihre zweite Wurzel* λ_2 *negativ ist.*

Für eine reducirte Form liegen die Punkte λ_1 und λ_2 des Kreises K auf verschiedenen Seiten der Elementarsehne 0∞, nämlich λ_1 auf derjenigen Seite, auf welcher der Punkt $+1$ und λ_2 auf derjenigen Seite, auf welcher der Punkt -1 liegt. Die der Form entsprechende Gerade $\lambda_1\lambda_2$ schneidet also die Elementarsehne 0∞.

Aus den Gleichungen

$$\lambda_1 - \lambda_2 = \frac{2\sqrt{D}}{a}, \quad \lambda_1\lambda_2 = \frac{c}{a}$$

liest man unmittelbar den Satz ab:

Satz 16. *Eine Form* (a, b, c) *von positiver Determinante ist dann und nur dann reducirt, wenn ihr erster Coefficient* a *positiv, ihr letzter Coefficient* c *negativ ist.*

Bezeichnet jetzt (a, b, c) eine beliebige Form positiver Determinante und ist pr eine Elementarsehne, welche die der Form entsprechende Gerade $\lambda_1\lambda_2$ trifft, so giebt es zwei Transformationen S, welche pr in die Elementarsehne 0∞ überführen. Offenbar geht durch die eine dieser beiden Transformationen die Form (a, b, c) in eine reducirte Form über. Da aber die Gerade $\lambda_1\lambda_2$ nothwendig gewisse Elementardreiecke durchschneidet (denn diese erfüllen das Innere des Kreises K lückenlos), so giebt es stets auch Elementarsehnen pr, welche die Gerade $\lambda_1\lambda_2$ treffen. Es folgt also:

Satz 17. *Jede Form* (a, b, c) *positiver Determinante ist einer reducirten Form äquivalent. Und zwar entspricht jeder Elementarsehne, welche die die Form repräsentirende Gerade* $\lambda_1\lambda_2$ *trifft, eine ganz bestimmte Transformation* S, *welche die Form in eine reducirte Form überführt.*

Bezeichnen wir mit

$$p = \frac{\xi_2}{\eta_2}, \quad r = \frac{\xi_1}{\eta_1} \tag{23}$$

die Parameter der Endpunkte einer $\lambda_1\lambda_2$ treffenden Elementarsehne, so dass $\frac{\xi_2}{\eta_2}$, $\frac{\xi_1}{\eta_1}$ zwei aufeinander folgende Glieder einer Farey'schen Reihe sind, so werden

$$S_1 = \begin{pmatrix} \xi_1 & \xi_2 \\ \eta_1 & \eta_2 \end{pmatrix}, \quad S_2 = \begin{pmatrix} -\xi_2, & \xi_1 \\ -\eta_2, & \eta_1 \end{pmatrix} \tag{24}$$

die beiden Transformationen sein, die pr in die Elementarsehne 0∞ überführen. Wenn wir ferner für die Form positiver Determinante

$$f = ax^2 + 2bxy + cy^2 \tag{25}$$

dieselben Bezeichnungen beibehalten, die wir in § 5 durch die Gleichungen (17) für Formen negativer Determinante eingeführt haben, so geht die Form (a, b, c) durch die Transformationen (24) in die Formen (f_1, f_{12}, f_2) bez. $(f_2, -f_{12}, f_1)$ über. Von diesen beiden Formen ist die erste oder die zweite reducirt, je nachdem von den beiden Zahlen f_1, f_2 die erste oder die zweite positiv ist.

Es ist nun zweckmässig, folgende Festsetzung zu treffen:

Definition 6. *Ist (A, B, C) eine Form positiver Determinante, deren äussere Coefficienten A, C entgegengesetzte Vorzeichen haben, so soll $(A, B, C)_\varrho$ die Form (A, B, C) oder die Form $(C, -B, A)$ bedeuten, je nachdem A oder C positiv ist.*

Wir können dann folgenden Satz aussprechen:

Satz 18. *Die der Form (25) äquivalente reducirte Form, welche der durch die Parameter (23) bestimmten Elementarsehne entspricht, ist die Form $(f_1, f_{12}, f_2)_\varrho$. Die entsprechende Transformation ist die Transformation S_1 oder S_2, je nachdem f_1 oder f_2 positiv ist.*

§ 7.

Die Ketten reducirter Formen.

Wir wollen nun zunächst die Gesammtheit der Elementarsehnen näher betrachten, welche die einer Form (a, b, c) positiver Determinante entsprechende Gerade $\lambda_1\lambda_2$ treffen. Zu dem Ende sei Δ irgend ein Elementardreieck, welches von der Geraden $\lambda_1\lambda_2$ durchschnitten wird; σ und σ' seien die Seiten des Dreiecks Δ, welche von der Geraden $\lambda_1\lambda_2$ getroffen werden. Und zwar möge ein Punkt, der die Gerade $\lambda_1\lambda_2$ in der Richtung von λ_2 nach λ_1 durchläuft, durch die Seite σ in das Dreieck Δ eintreten, durch die Seite σ' austreten. Die beiden Seiten σ und σ' sind Elementarsehnen, welche die Gerade $\lambda_1\lambda_2$ treffen. Wir wollen dieselben als „Nachbarsehnen" (bezüglich der Form (a, b, c)) bezeichnen und des Näheren σ' die „rechte" Nachbarsehne von σ und σ die „linke" Nachbarsehne von σ' nennen. Da jede Elementarsehne Seite von zwei Elementardreiecken ist, die zu verschiedenen Seiten der Elementarsehne liegen, so folgt sofort:

Satz 19. *Jede die Gerade $\lambda_1\lambda_2$ treffende Elementarsehne besitzt eine einzige rechte und eine einzige linke Nachbarsehne.*

Indem wir jetzt mit σ_0 irgend eine Elementarsehne bezeichnen, welche die Gerade $\lambda_1\lambda_2$ trifft, können wir, von σ_0 ausgehend, eine nach rechts und links unbegrenzte Reihe von Elementarsehnen

(26) $$\ldots, \sigma_{-2}, \sigma_{-1}, \sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \ldots$$

bilden, von denen jede die Gerade $\lambda_1 \lambda_2$ trifft und die rechte Nachbarsehne der vorhergehenden und die linke Nachbarsehne der folgenden ist.*) Da die Stücke der Geraden $\lambda_1 \lambda_2$, die von aufeinander folgenden Sehnen der Reihe (26) abgeschnitten werden, sich aneinander legend die ganze Gerade $\lambda_1 \lambda_2$ ausfüllen, so ist klar, dass *jede* $\lambda_1 \lambda_2$ treffende Elementarsehne in der Reihe (26) ihren Platz findet. Jeder einzelnen Elementarsehne σ_i entspricht nun eine bestimmte Transformation S_i, welche die Form (a, b, c) in eine reducirte Form φ_i überführt. Der Reihe (26) entsprechend erhalten wir also eine Reihe von Transformationen

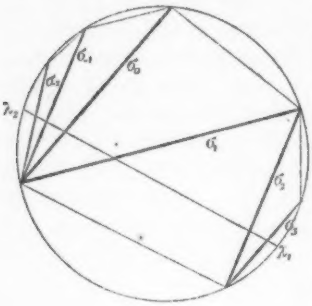


Fig. 4.

(27) $$\ldots, S_{-2}, S_{-1}, S_0, S_1, S_2, \ldots,$$

die, auf die Form f angewandt, die Reihe der f äquivalenten reducirten Formen

(28) $$\ldots \varphi_{-2}, \varphi_{-1}, \varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots$$

ergeben.

Definition 7. *Die Formenreihe* (28) *soll die zur Form f gehörige „Kette reducirter Formen" heissen.*

Man beachte, dass durch die Form f die zugehörige Kette nur in Bezug auf die *Aufeinanderfolge* ihrer Glieder bestimmt ist. Diejenige Elementarsehne nämlich, die wir mit σ_0 bezeichneten, haben wir willkürlich aus der Gesammtheit derjenigen, welche die Gerade $\lambda_1 \lambda_2$ treffen, ausgewählt. Hätten wir nun diejenige Elementarsehne mit σ_0 bezeichnet, die in der Reihe (26) den Index n trägt, so ist klar, dass wir an Stelle der Kette (28) die folgende

(28′) $$\ldots \varphi_{n-2}, \varphi_{n-1}, \varphi_n, \varphi_{n+1}, \varphi_{n+2}, \ldots$$

erhalten hätten, die aus der Kette (28) durch eine Verschiebung aller Glieder hervorgeht.

Wir werden nun die Kette (28′) als nicht verschieden von der Kette (28) ansehen, also zwei Ketten als identisch betrachten, wenn die eine aus der anderen durch eine blosse Verschiebung der Glieder hervorgeht. Dann leuchtet ein, dass durch eine Form f die zugehörige Kette reducirter Formen vollständig bestimmt ist.

Wir beweisen nun den folgenden Satz, welcher die Theorie der Reduction quadratischer Formen von positiver Determinante zum Abschluss bringt:

*) Vgl. Fig. 4.

Satz 20. *Zwei Formen von positiver Determinante sind stets und nur dann äquivalent, wenn zu der einen Form dieselbe Kette reducirter Formen gehört, wie zu der anderen Form.*

Es sei f irgend eine Form positiver Determinante, die durch die Transformation S in die Form f' übergehe, so dass

(29) $$fS = f'$$

ist. Die zu der Form f' gehörigen Reihen von Elementarsehnen, Transformationen und reducirten Formen mögen bezüglich mit

(30) $$\ldots\ \sigma'_{-2},\ \sigma'_{-1},\ \sigma'_0,\ \sigma'_1,\ \sigma'_2,\ \ldots$$

(31) $$\ldots\ S'_{-2},\ S'_{-1},\ S'_0,\ S'_1,\ S'_2,\ \ldots$$

(32) $$\ldots\ \varphi'_{-2},\ \varphi'_{-1},\ \varphi'_0,\ \varphi'_1,\ \varphi'_2,\ \ldots$$

bezeichnet werden. Da nun durch die Transformation S die Gerade $\lambda_1\lambda_2$, welche die Form f repräsentirt, in die Gerade $\lambda_1'\lambda_2'$ übergeht, die die Form f' repräsentirt, so wird die Reihe der Elementarsehnen (26) durch die Transformation S in die Reihe der Elementarsehnen (30) übergehen. Nehmen wir an, dass σ_0 in σ'_n übergeht, so wird σ_1' in σ_{n+1}, σ_2' in σ'_{n+2} u. s. w., allgemein

$$\sigma_i \text{ in } \sigma'_{n+i} \quad (i = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots)$$

übergehen. Die Transformation $S^{-1}S_i$ führt die Sehne σ'_{n+i} in die Elementarsehne 0∞ über, und man schliesst daraus sofort, dass

(33) $$S'_{n+i} = S^{-1}S_i, \quad \text{und} \quad S = S_i(S'_{n+i})^{-1} \quad (i = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ldots)$$

ist. Nun geht die Form φ'_{n+i} durch die Transformation S'_{n+i} aus der Form f' hervor. Es ist also

$$\varphi'_{n+i} = f'\,S'_{n+i} = fS\,.\,S^{-1}S_i = fS_i = \varphi_i \quad (i = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ldots).$$

Damit sind wir zu folgendem Resultate gelangt:

Satz 21. *Geht die Form f durch die Transformation S in f' über und sind* (28) *und* (32) *die zu den Formen f und f' gehörigen Ketten reducirter Formen, sowie* (27) *und* (31) *die bez. entsprechenden Reihen von Transformationen, so ist, für jeden Index i,*

(34) $$\varphi'_{n+i} = \varphi_i, \quad S = S_i(S'_{n+i})^{-1},$$

unter n eine feste ganze Zahl verstanden.

Die Zahl n ist, nach Fixirung der Ketten (28), (32), durch die Transformation S eindeutig bestimmt. Denn aus

$$S = S_i(S'_{n+i})^{-1} = S_i(S'_{m+i})^{-1} \quad \text{folgt} \quad S'_{n+i} = S'_{m+i}$$

und daher $n = m$, weil die Transformationen (31) sämmtlich von einander verschieden sind, da jede eine andere Elementarsehne in die Sehne 0∞ überführt.

Betrachten wir jetzt irgend zwei Formen f und f' von positiver Determinante, und nehmen wir an, dass die zu ihnen gehörenden Ketten (28) bez. (32) irgend ein Glied gemeinsam haben, dass etwa

$$\varphi_0 = \varphi'_n$$

sei, so folgt, aus

$$fS_0 = \varphi_0, \quad f'S'_n = \varphi'_n,$$

dass f durch die Transformation

$$S = S_0 (S'_n)^{-1}$$

in f' übergeht. Der Satz 21 lässt sich hiernach so umkehren:

Satz 22. *Wenn die zu zwei Formen f und f' gehörenden Ketten* (28) *bez.* (32) *irgend ein Glied gemeinsam haben, wenn etwa $\varphi_0 = \varphi'_n$ ist, so geht die Form f durch die Transformation $S_0(S'_n)^{-1} = S$ in die Form f' über. Zugleich ist dann* (*nach Satz* 21) *für jeden Index i*

$$\varphi_i = \varphi'_{n+i} \quad \text{und} \quad S = S_i (S'_{n+i})^{-1}.$$

Aus den Sätzen 21 und 22 geht der Satz 20 unmittelbar als Corollar hervor.

§ 8.

Transformation einer Form positiver Determinante in sich.

Wenden wir die Sätze 21 und 22 auf den Fall an, wo die Form f' mit der Form f identisch ist, so erhalten wir folgende Methode zur Bestimmung aller Transformationen S, welche die beliebige Form f positiver Determinante in sich überführen.

Man nehme aus der zu f gehörigen Kette reducirter Formen (28) irgend eine Form, etwa φ_0 und suche alle Formen der Kette, die mit φ_0 identisch sind. Ist φ_n eine solche Form, also $\varphi_n = \varphi_0$, so ist $S = S_0 S_n^{-1}$ eine f in sich selbst überführende Transformation. Zugleich ist dann für jeden Index i die Form φ_{n+i} mit φ_i identisch. Bezeichnet also $|n|$ den numerischen Werth von n, so besteht die Kette (28) aus der periodischen Wiederholung der $|n|$ Formen

$$\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{|n|-1}.$$

Durch bekannte einfache Schlüsse folgert man hieraus:

Satz 23. *Die Form f besitzt stets und nur dann Transformationen in sich, die von der identischen Transformation verschieden sind, wenn in der zu f gehörenden Kette* (28) *reducirter Formen ein und dieselbe Form mehrfach auftritt. Ist dann in der Reihe $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots$ die Form φ_m die erste, welche mit φ_0 identisch ist, so besteht die Kette* (28) *aus der periodischen Wiederholung der m Formen*

$$\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{m-1}.$$

Die Transformation $S = S_0 S_m^{-1}$ führt f in sich über und jede andere Transformation, die ebenfalls f in sich überführt, ist eine Potenz der Transformation S.

Dieser Satz findet unmittelbare Anwendung auf den Fall, wo die Coefficienten a, b, c der Form f ganze Zahlen sind. Denn für eine

reducirte Form (A, B, C) der Determinante $B^2 - AC = b^2 - ac = D$ ist der Coefficient A positiv, der Coefficient C negativ. Es giebt also, da

$$B^2 + A \cdot (-C) = D$$

sein muss, nur eine endliche Anzahl solcher reducirter Formen, und in der zu f gehörenden Kette (28) muss also nothwendig ein- und dieselbe Form mehrfach auftreten. Jede ganzzahlige Form positiver Determinante besitzt also von der Identität vesschiedene Transformationen in sich, die auf Grund des Satzes (23) bestimmt werden können. Umgekehrt zeigt man leicht, dass jede Form, die eine Transformation in sich besitzt, eine ganzzahlige Form ist, oder doch in eine solche durch Division mit einem ihren Coefficienten eventuell gemeinsamen Factor übergeht.*)

§ 9.

Algorithmus zur Reduction einer Form von positiver Determinante.

Es sei

(35) $$f = ax^2 + 2bxy + cy^2$$

irgend eine Form positiver Determinante, λ_1 und λ_2 ihre beiden Wurzeln. Wir entnehmen aus jeder Farey'schen Reihe (mit der „nullten" beginnend) die beiden aufeinander folgenden Glieder, zwischen welchen λ_1 liegt. Auf diese Weise erhalten wir die Paare von Näherungsbrüchen der Wurzel λ_1, die wir mit

(36) $$\pi_0, \pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_{n-1}, \pi_n^{(1)}, \pi_{n+1}^{(1)}, \ldots$$

bezeichnen.**) Indem wir annehmen, dass das Paar $\pi_n^{(1)}$ aus der ersten Farey'schen Reihe stammt, welche ein zwischen die beiden Wurzeln λ_1 und λ_2 fallendes Glied enthält, werden die aus den vorhergehenden Reihen stammenden Paare zugleich Näherungspaare der Wurzel λ_2 sein. Die Reihe der Näherungspaare der Wurzel λ_2 bezeichnen wir mit

(37) $$\pi_0, \pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_{n-1}, \pi_n^{(2)}, \pi_{n+1}^{(2)}, \ldots.$$

Jedes in den Reihen (36) und (37) auftretende Paar besteht aus zwei Brüchen

(38) $$p = \frac{\xi_2}{\eta_2}, \quad r = \frac{\xi_1}{\eta_1},$$

*) Vgl. Dirichlet, Vorlesungen über Zahlentheorie, Abschnitt IV, wo sich die hierhergehörige Litteratur (pag. 200) findet. Vgl. auch die weiter unten erwähnten Stellen in Klein-Fricke's Vorlesungen über elliptische Modulfunctionen.

**) Man sehe die oben citirte Abhandlung des Verfassers über die angenäherte Darstellung der Zahlen durch rationale Brüche.

die zwei aufeinander folgende Glieder einer Farey'schen Reihe bilden. Indem wir

(39) $$\xi_3 = \xi_1 + \xi_2, \quad \eta_3 = \eta_1 + \eta_2, \quad q = \frac{\xi_3}{\eta_3}$$

setzen und die Bezeichnungen von § 5 beibehalten, ordnen wir den Brüchen

$$r = \frac{\xi_1}{\eta_1}, \quad p = \frac{\xi_2}{\eta_2}$$

die Zahlen

(40) $$f_1, f_{12}, f_2, f_{13}, f_{23}, f_3$$

zu, von denen die drei letzten aus den drei ersten sich vermöge der Gleichungen

(41) $$f_{13} = f_1 + f_{12}, \quad f_{23} = f_2 + f_{12}, \quad f_3 = f_{13} + f_{23}$$

ableiten lassen.

Wir wollen nun zunächst zeigen, wie man aus irgend einem Paare (38) der Reihen (36) und (37) das nächstfolgende Paar der betreffenden Reihe finden kann, welches entweder das Paar pq oder das Paar qr sein wird.

Die Punkte p, q, r des Kreises K gehen durch die Transformation $\begin{pmatrix} \xi_1 & \xi_2 \\ \eta_1 & \eta_2 \end{pmatrix}$ in die Punkte 0, 1, ∞ bez. über. Durch dieselbe Transformation geht die Form f in die Form

$$f_1 x^2 + 2 f_{12} x y + f_2 y^2,$$

also die Punkte λ_1 und λ_2 in die Punkte λ_1' bez. λ_2' über, wo λ_1', λ_2' die Wurzeln der Gleichung

(42) $$f_1 \lambda'^2 + 2 f_{12} \lambda' + f_2 = 0$$

bezeichnen. Die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass das Paar (p, r) sich unter den Paaren $\pi_0, \pi_1, \ldots \pi_{n-1}$ findet, ist nun die, dass die Punkte λ_1 und λ_2 beide zwischen p und r, d. h. auf dem Bogen pqr des Kreises K liegen, also λ_1' und λ_2' auf dem Bogen 01∞. Diese Bedingung ist damit gleichbedeutend, dass λ_1' und λ_2' positiv sind, oder, was offenbar auf dasselbe hinauskommt, dass f_1 und f_2 unter einander gleiches, aber entgegengesetztes Vorzeichen wie f_{12} besitzen.

Die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass das Paar (p, r) sich unter den übrigen Paaren der Reihen (36) und (37) findet ist die, dass p und r die Punkte λ_1 und λ_2 trennen, dass also die Elementarsehne pr die Gerade $\lambda_1 \lambda_2$ trifft. Diese Bedingung ist damit gleichbedeutend, dass λ_1' und λ_2' entgegengesetztes Vorzeichen oder, was auf dasselbe hinauskommt, dass f_1 und f_2 entgegengesetztes Vorzeichen besitzen. Hieraus schliessen wir:

1) Ist (p, r) eines der ersten n Paare, die den Reihen (36) und (37) gemeinsam sind, so dass f_1 und f_2 dasselbe, aber entgegengesetztes Vorzeichen wie f_{12} haben, so unterscheiden wir zwei Fälle:

a) f_3 hat dasselbe Vorzeichen wie f_1 und f_2. Dann folgt auf das Paar (p, r) in beiden Reihen das Paar (p, q), wenn f_{23} das Vorzeichen von f_{12} hat, dagegen das Paar (q, r), wenn f_{13} das Vorzeichen von f_{12} hat.

b) f_3 hat entgegengesetztes Vorzeichen wie f_1 und f_2. Dann ist (p, r) das letzte gemeinsame Paar π_{n-1} und es folgt auf dieses Paar das Paar (q, r) in derjenigen Reihe, welche der grösseren der Wurzeln λ_1, λ_2 entspricht, dagegen das Paar (p, q) in der der kleineren Wurzel entsprechenden Reihe.

Aus der Gleichung $\lambda_1 - \lambda_2 = \frac{2\sqrt{D}}{a}$ folgt beiläufig, dass λ_1 oder λ_2 die grössere Wurzel ist, je nachdem a positiv oder negativ ist.

2) Ist (p, r) irgend ein anderes Paar aus den Reihen (36) und (37), so sind f_1 und f_2 von entgegengesetztem Zeichen. Es folgt dann auf das Paar (p, r) in der betreffenden Reihe das Paar (p, q), wenn f_3 und f_2, dagegen das Paar (q, r), wenn f_1 und f_3 entgegengesetztes Zeichen haben.

Hiernach kann man, ausgehend von dem ersten Paare, successive alle Paare der Reihen (36) und (37), sowie die jedem Paare zugeordneten Zahlen (40) leicht bestimmen. Damit ist dann aber auch die Reduction der Form f vollständig durchgeführt. Denn ist (p, r) irgend eines der Paare

$$\pi_n^{(1)},\ \pi_{n+1}^{(1)},\ \ldots,\ \pi_n^{(2)},\ \pi_{n+1}^{(2)},\ \ldots$$

so trifft die entsprechende Elementarsehne pr die Gerade $\lambda_1 \lambda_2$ und dieser Elementarsehne entspricht die f äquivalente reducirte Form $(f_1, f_{12}, f_2)_\varrho$. (Vgl. Satz 18.) Die Elementarsehnen, welche den Paaren

$$\ldots,\ \pi_{n+1}^{(2)},\ \pi_n^{(2)},\ \pi_n^{(1)},\ \pi_{n+1}^{(1)},\ \ldots$$

entsprechen, stimmen aber offenbar mit der Reihe der Elementarsehnen (26) überein, so dass man unmittelbar die ganze Kette reducirter Formen erhält, die zu f gehört. Dabei ist nur zu beachten, dass für den Fall $n = 0$, in welchem die beiden Reihen (36) und (37) keine gemeinsamen Anfangsglieder haben, den beiden Paaren $\pi_0^{(1)}$ und $\pi_0^{(2)}$, von denen das eine aus den Brüchen $\frac{-1}{0}$, $\frac{0}{1}$, das andere aus den Brüchen $\frac{0}{1}$, $\frac{1}{0}$ besteht, dieselbe Elementarsehne 0∞ entspricht.

Ein paar Beispiele mögen den Algorithmus zur Bestimmung der Reihen (36) und (37), nebst den jedem Paare der Reihen zugeordneten Zahlen (40) erläutern.

1. Beispiel.

$$f = 62x^2 - 2 \cdot 95xy + 145y^2 \equiv (62, -95, 145).$$

Man erhält die folgende Tabelle:

Erste Wurzel.

	$\frac{\xi_1}{\eta_1}$	$\frac{\xi_2}{\eta_2}$	f_1	f_{12}	f_2	f_{13}	f_{23}	f_3
π_0	$\frac{1}{0}$	$\frac{0}{1}$	62	− 95	145	− 33	50	17
π_1	$\frac{1}{0}$	$\frac{1}{1}$	62	− 33	17	29	− 16	13
π_2	$\frac{2}{1}$	$\frac{1}{1}$	13	− 16	17	− 3	1	− 2
$\pi_3^{(1)}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{3}{2}$	13	− 3	− 2	10	− 5	5
$\pi_4^{(1)}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{3}{2}$	5	− 5	− 2	0	− 7	− 7
$\pi_5^{(1)}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{8}{5}$	5	0	− 7	5	− 7	− 2
$\pi_6^{(1)}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{13}{8}$	5	5	− 2	10	3	13
$\pi_7^{(1)}$	$\frac{18}{11}$	$\frac{13}{8}$	13	3	− 2	16	1	17
$\pi_8^{(1)}$	$\frac{31}{19}$	$\frac{13}{8}$	17	1	− 2	18	− 1	17
$\pi_9^{(1)}$	$\frac{44}{27}$	$\frac{13}{8}$	17	− 1	− 2	16	− 3	13
$\pi_{10}^{(1)}$	$\frac{57}{35}$	$\frac{13}{8}$	13	− 3	− 2			

Zweite Wurzel.

	$\frac{\xi_1}{\eta_1}$	$\frac{\xi_2}{\eta_2}$	f_1	f_{12}	f_2	f_{13}	f_{23}	f_3
$\pi_3^{(2)}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{1}$	− 2	1	17	− 1	18	17
$\pi_4^{(2)}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{3}$	− 2	− 1	17	− 3	16	13
$\pi_5^{(2)}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{7}{5}$	− 2	− 3	13	− 5	10	5
$\pi_6^{(2)}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{10}{7}$	− 2	− 5	5	− 7	0	− 7
$\pi_7^{(2)}$	$\frac{13}{9}$	$\frac{10}{7}$	− 7	0	5	− 7	5	− 2
$\pi_8^{(2)}$	$\frac{23}{16}$	$\frac{10}{7}$	− 2	5	5	3	10	13
$\pi_9^{(2)}$	$\frac{23}{16}$	$\frac{33}{23}$	− 2	3	13	1	16	17
$\pi_{10}^{(2)}$	$\frac{23}{16}$	$\frac{56}{39}$	− 2	1	17			

Die zu der Form f gehörige Kette reducirter Formen entsteht aus der periodischen Wiederholung der Formen: $(13, -3, -2)$, $(5, -5, -2)$, $(5, 0, -7)$, $(5, 5, -2)$, $(13, 3, -2)$, $(17, 1, -2)$, $(17, -1, -2)$.

2. Beispiel,

$$f = 7x^2 - 8xy - 3y^2 \equiv (7, -4, -3).$$

2. Beispiel,

$$f = 7x^2 - 8xy - 3y^2 \equiv (7, -4, -3).$$

Erste Wurzel. | Zweite Wurzel.

	$\frac{\xi_1}{\eta_1}$	$\frac{\xi_2}{\eta_2}$	f_1	f_{12}	f_2	f_{13}	f_{23}	f_3		$\frac{\xi_1}{\eta_1}$	$\frac{\xi_2}{\eta_2}$	f_1	f_{12}	f_2	f_{13}	f_{23}	f_3
$\pi_0^{(1)}$	$\frac{1}{0}$	$\frac{0}{1}$	7	−4	−3	3	−7	−4	$\pi_0^{(2)}$	$\frac{0}{1}$	$\frac{-1}{0}$	−3	4	7	1	11	12
$\pi_1^{(1)}$	$\frac{1}{0}$	$\frac{1}{1}$	7	3	−4	10	−1	9	$\pi_1^{(2)}$	$\frac{0}{1}$	$\frac{-1}{1}$	−3	1	12	−2	13	11
$\pi_2^{(1)}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{1}{1}$	9	−1	−4	8	−5	3	$\pi_2^{(2)}$	$\frac{0}{1}$	$\frac{-1}{2}$	−3	−2	11	−5	9	4
$\pi_3^{(1)}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{1}$	3	−5	−4	−2	−9	−11	$\pi_3^{(2)}$	$\frac{0}{1}$	$\frac{-1}{3}$	−3	−5	4	−8	−1	−9
$\pi_4^{(1)}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{3}$	3	−2	−11	1	−13	−12	$\pi_4^{(2)}$	$\frac{-1}{4}$	$\frac{-1}{3}$	−9	−1	4	−10	3	−7
$\pi_5^{(1)}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{7}{5}$	3	1	−12	4	−11	−7	$\pi_5^{(2)}$	$\frac{-2}{7}$	$\frac{-1}{3}$	−7	3	4	−4	7	3
$\pi_6^{(1)}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{10}{7}$	3	4	−7	7	−3	4	$\pi_6^{(2)}$	$\frac{-2}{7}$	$\frac{-3}{10}$	−7	−4	3	−11	−1	−12
$\pi_7^{(1)}$	$\frac{13}{9}$	$\frac{10}{7}$	4	−3	−7	1	−10	−9	$\pi_7^{(2)}$	$\frac{-5}{17}$	$\frac{-3}{10}$	−12	−1	3	−13	2	−11
$\pi_8^{(1)}$	$\frac{13}{9}$	$\frac{23}{16}$	4	1	−9	5	−8	−3	$\pi_8^{(2)}$	$\frac{-8}{27}$	$\frac{-3}{10}$	−11	2	3	−9	5	−4
$\pi_9^{(1)}$	$\frac{13}{9}$	$\frac{36}{25}$	4	5	−3	9	2	11	$\pi_9^{(2)}$	$\frac{-11}{37}$	$\frac{-3}{10}$	−4	5	3	1	8	9
$\pi_{10}^{(1)}$	$\frac{49}{34}$	$\frac{36}{25}$	11	2	−3	13	−1	12	$\pi_{10}^{(2)}$	$\frac{-11}{37}$	$\frac{-14}{47}$	−4	1	9	−3	10	7
$\pi_{11}^{(1)}$	$\frac{85}{59}$	$\frac{36}{25}$	12	−1	−3	11	−4	7	$\pi_{11}^{(2)}$	$\frac{-11}{37}$	$\frac{-25}{84}$	−4	−3	7	−7	4	−3
$\pi_{12}^{(1)}$	$\frac{121}{84}$	$\frac{36}{25}$	7	−4	−3				$\pi_{12}^{(2)}$	$\frac{-36}{121}$	$\frac{-25}{84}$	−3	4	7			

Die zu der Form f gehörige Kette reducirter Formen entsteht aus der periodischen Wiederholung der Formen: $(7,-4,-3), (7,3,-4), (9,-1,-4), (3,-5,-4), (3,-2,-11), (3,1,-12), (3,4,-7), (4,-3,-7), (4,1,-9), (4,5,-3), (11,2,-3), (12,-1,-3)$.

§ 10.

Die Charakteristiken quadratischer Irrationalitäten.

Auf Grund der Betrachtungen des vorigen Paragraphen ist es leicht die Charakteristiken der Wurzeln λ_1 und λ_2 einer quadratischen Form (35) zu bestimmen*). Wir nehmen der Einfachheit halber an, dass der erste Coefficient a der Form f positiv sei. Dann sind die den Paaren $\pi_0, \pi_1, \ldots, \pi_{n-1}$ entsprechenden Zahlen f_{12} negativ. Die Zahlen f_1, welche den Paaren $\pi_n^{(1)}, \pi_{n+1}^{(1)}, \ldots$ entsprechen, sind positiv, diejenigen, welche den Paaren $\pi_n^{(2)}, \pi_{n+1}^{(2)}, \ldots$ entsprechen, negativ. Von den beiden Wurzeln λ_1, λ_2 ist ferner die erste die grössere.

Es sei nun (p, r) irgend ein Paar, welches in einer der Reihen (36), (37) auftritt. Dann ist das folgende Paar (p, q) oder das Paar (q, r), je nachdem q grösser oder kleiner ist als λ_1 bez. λ_2. Im ersten Falle entspricht dem Bruche q das Vorzeichen $+$, im zweiten Falle das Vorzeichen $-$ in der Charakteristik von λ_1 bez. λ_2. Aus den Gesetzen, nach welchen aus dem Paare (p, r) das folgende Paar gefunden wird, geht nun hervor:

1) Ist (p, r) eines der Paare $\pi_0, \pi_1, \ldots, \pi_{n-2}$, so tritt der erste oder der zweite Fall ein, je nachdem f_{13} positiv oder negativ ist.

2) Ist (p, r) das Paar π_{n-1}, so tritt der erste oder der zweite Fall ein, je nachdem es sich um die Reihe (37), welche der zweiten Wurzel λ_2, oder um die Reihe (36) handelt, welche der ersten Wurzel λ_1 entspricht.

3) Ist (p, r) eines der Paare $\pi_n^{(1)}, \pi_{n+1}^{(1)}, \ldots$, so tritt der erste oder der zweite Fall ein, je nachdem f_3 positiv oder negativ ist.

4) Ist (p, r) eines der Paare $\pi_n^{(2)}, \pi_{n+1}^{(2)}, \ldots$, so tritt der erste oder der zweite Fall ein, je nachdem f_3 negativ oder positiv ist.

Bezeichnen daher $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-2}$ die Vorzeichen der Zahlen f_{13}, die den Paaren $\pi_0, \pi_1, \ldots, \pi_{n-2}$ bezüglich entsprechen, ferner $\varepsilon_\varkappa^{(1)}$ bez. $-\varepsilon_\varkappa^{(2)}$ das Vorzeichen der Zahl f_3, die dem Paare $\pi_\varkappa^{(1)}$ bez. $\pi_\varkappa^{(2)}$ entspricht, so ist

$$(43) \qquad \cdot\,\cdot\;\varepsilon_0\,\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_{n-2}\,\eta\;\varepsilon_n^{(1)}\,\varepsilon_{n+1}^{(1)}\,\varepsilon_{n+2}^{(1)} \ldots \qquad (\eta = -)$$

die Charakteristik von λ_1, und

$$(44) \qquad \cdot\,\cdot\;\varepsilon_0\,\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_{n-2}\,\varepsilon\;\varepsilon_n^{(2)}\,\varepsilon_{n+1}^{(2)}\,\varepsilon_{n+2}^{(2)} \ldots \qquad (\varepsilon = +)$$

die Charakteristik von λ_2, wobei die beiden ersten Glieder in jeder Charakteristik durch Punkte angedeutet sind. Was diese beiden ersten

*) Für diesen Paragraphen sehe man wieder die Abhandlung des Verfassers „über die angenäherte Darstellung der Zahlen durch rationale Brüche“.

Glieder angeht, so sind dieselben für den Fall, dass gemeinsame Paare nicht auftreten, also $n = 0$ ist, $\varepsilon\eta$ für die Charakteristik von λ_1 und $\eta\varepsilon$ für die Charakteristik von λ_2.

Treten gemeinsame Paare $\pi_0, \pi_1, \ldots$ auf, so sind die beiden ersten Glieder in beiden Charakteristiken $\varepsilon\eta$ oder $\eta\varepsilon$, je nachdem π_0 aus den Brüchen $\frac{1}{0}, \frac{0}{1}$ oder aus den Brüchen $\frac{0}{1}, \frac{-1}{0}$ besteht. Dabei bedeutet ε das Vorzeichen $+$, η das Vorzeichen $-$.

Beispielsweise sind die Charakteristiken der ersten und zweiten Wurzel der Form (62, — 95, 145) bezüglich

$$\varepsilon\eta\ \eta\varepsilon\ \eta\ \varepsilon\eta\eta\varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon\ \varepsilon\ \eta\eta\ \varepsilon\varepsilon\varepsilon\varepsilon \cdots = \varepsilon\eta^2\,\varepsilon\,\eta\,\varepsilon\eta^2\,\varepsilon^5\eta^2\varepsilon^5 \cdots,$$

$$\varepsilon\eta\ \eta\varepsilon\ \varepsilon\ \eta\eta\eta\varepsilon\varepsilon\varepsilon\eta\ \eta\ \eta\eta\eta\varepsilon\varepsilon\eta\eta \cdots = \varepsilon\eta^2\varepsilon^2\eta^3\varepsilon^2\eta^5\,\varepsilon^2\eta^5 \cdots,$$

Für die Wurzeln der Form (7, — 4, — 3) lauten die Charakteristiken bezüglich

$$\varepsilon\eta\ \eta\ \varepsilon\ \ \varepsilon\ \eta\eta\eta\ \varepsilon\ \eta\eta\ \varepsilon\ \varepsilon\ \varepsilon \cdots = \varepsilon\eta^2\varepsilon^2\eta^3\varepsilon\eta^2\varepsilon^3\eta\,\varepsilon^2\eta^3 \cdots,$$

$$\eta\varepsilon\ \eta\eta\ \eta\ \varepsilon\ \varepsilon\ \eta\ \varepsilon\ \varepsilon\ \varepsilon\ \eta\eta\ \varepsilon \cdots = \eta\,\varepsilon\,\eta^3\varepsilon^2\eta\,\varepsilon^3\eta^2\,\varepsilon\,\eta^3\varepsilon^2 \cdots.$$

Handelt es sich, wie in diesen Beispielen, um eine Form mit ganzzahligen Coefficienten, so bilden die den Paaren $\pi_n^{(1)}, \pi_{n+1}^{(1)}, \ldots$ und ebenso die den Paaren $\pi_n^{(2)}, \pi_{n+1}^{(2)}, \ldots$ entsprechenden Zahlen f_3 eine periodische Reihe, und die Charakteristiken von λ_1 und λ_2 werden daher periodisch.

Um die hierbei stattfindenden Umstände näher zu bestimmen, betrachten wir zuerst den Fall, wo gemeinsame Paare $\pi_0, \pi_1, \ldots$ nicht auftreten. Dieser Fall, der durch das zweite Beispiel erläutert wird, findet statt, wenn die Form f eine reducirte Form ist. Jedem Zahlenpaar (p, r), welches in der Reihe (36) oder (37) auftritt, entspricht die reducirte Form $(f_1, f_{12}, f_2)_\varrho$, und der dem Zahlenpaare entsprechende Werth von f_3 ist gleich $f_{13} + f_{23} = f_1 + 2f_{12} + f_2$.

Indem wir annehmen, dass die Formenperiode aus m Gliedern bestehe, bezeichnen wir die reducirten Formen, welche den Paaren $\pi_0^{(1)}, \pi_1^{(1)}, \ldots, \pi_{m-1}^{(1)}$ entsprechen, bezüglich mit

(45) $$(a_0, b_0, c_0), (a_1, b_1, c_1), \ldots, (a_{m-1}, b_{m-1}, c_{m-1}).$$

Den Paaren $\pi_{m-1}^{(2)}, \pi_{m-2}^{(2)}, \ldots, \pi_0^{(2)}$ entsprechen dann bez. die reducirten Formen

(46) $$(a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2), \ldots, (a_m, b_m, c_m) \equiv (a_0, b_0, c_0).$$

Ferner sind die Zahlen f_3, welche den ersten Paaren entsprechen, bez.

(47) $$a_0 + 2b_0 + c_0,\ a_1 + 2b_1 + c_1, \ldots, a_{m-1} + 2b_{m-1} + c_{m-1},$$

die Zahlen f_3, welche den zweiten Paaren entsprechen, bez.

(48) $$a_1 - 2b_1 + c_1,\ a_2 - 2b_2 + c_2, \ldots, a_m - 2b_m + c_m.$$

Nun zeigt man aber leicht, dass die Zahlen (47) der Reihe nach dieselben Vorzeichen haben, wie die Zahlen (48). In der That, die auf (a_i, b_i, c_i) folgende Form $(a_{i+1}, b_{i+1}, c_{i+1})$ ist durch die Gleichungen

$$a_{i+1} = a_i,\quad b_{i+1} = a_i + b_i,\quad c_{i+1} = a_i + 2b_i + c_i$$

oder durch die Gleichungen

$$a_{i+1} = a_i + 2b_i + c_i,\quad b_{i+1} = b_i + c_i,\quad c_{i+1} = c_i$$

bestimmt, je nachdem $a_i + 2b_i + c_i$ negativ oder positiv ist. Im ersten Falle ist aber $a_{i+1} - 2b_{i+1} + c_{i+1} = c_i$, also negativ, im zweiten Falle ist $a_{i+1} - 2b_{i+1} + c_{i+1} = a_i$, also positiv, w. z. b. w.

Die Charakteristiken von λ_1 und λ_2 haben daher die Gestalt

$$\varepsilon\,\eta \mid \varepsilon_0^{(1)}\,\varepsilon_1^{(1)} \ldots \varepsilon_{m-1}^{(1)} \mid \varepsilon_0^{(1)}\,\varepsilon_1^{(1)} \ldots \varepsilon_{m-1}^{(1)} \mid \ldots,$$

bez.

$$\eta\,\varepsilon \mid \varepsilon_0^{(2)}\,\varepsilon_1^{(2)} \ldots \varepsilon_{m-1}^{(2)} \mid \varepsilon_0^{(2)}\,\varepsilon_1^{(2)} \ldots \varepsilon_{m-1}^{(2)} \mid \ldots,$$

wobei

$$\varepsilon_0^{(2)} = -\,\varepsilon_{m-1}^{(1)},\ \varepsilon_1^{(2)} = -\,\varepsilon_{m-2}^{(1)}, \ldots, \varepsilon_{m-1}^{(2)} = -\,\varepsilon_0^{(1)}$$

ist. Indem wir der Einfachheit halber die Bezeichnung dahin abändern, dass wir $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m$ an Stelle von $\varepsilon_0^{(1)}, \varepsilon_1^{(1)}, \ldots, \varepsilon_{m-1}^{(1)}$ bez. schreiben, indem wir ferner berücksichtigen, dass die Charakteristik von $-\lambda_2$ aus der von λ_2 hervorgeht, wenn man in dieser alle Vorzeichen umkehrt, können wir den Satz aussprechen:

Satz 24. *Für eine Form (a, b, c) deren erster Coefficient a positiv, deren letzter Coefficient c negativ ist, haben die Charakteristiken der ersten (positiven) Wurzel und der negativ genommenen zweiten (negativen) Wurzel die Gestalt*

$$\varepsilon\,\eta\,\eta_1\,\eta_2 \ldots \eta_m\,\eta_1\,\eta_2 \ldots \eta_m \ldots$$

bezüglich

$$\varepsilon\,\eta\,\eta_m\,\eta_{m-1} \ldots \eta_1\,\eta_m\,\eta_{m-1} \ldots \eta_1 \ldots.$$

Wir betrachten nun zweitens den Fall, wo gemeinsame Paare in den Reihen (36) und (37) auftreten. Dieser Fall tritt ein, wenn λ_1 und λ_2 dasselbe Vorzeichen haben, also die äusseren Coefficienten a, c der Form beide positiv sind. Es sei wieder m die Anzahl der Glieder der Formenperiode. Dann haben die Charakteristiken von λ_1 und λ_2 die Gestalt

$$\ldots \varepsilon_0\,\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_{n-2}\,\eta \mid \varepsilon_n^{(1)}\,\varepsilon_{n+1}^{(1)} \ldots \varepsilon_{n+m-1}^{(1)} \mid \varepsilon_n^{(1)}\,\varepsilon_{n+1}^{(1)} \ldots \varepsilon_{n+m-1}^{(1)} \mid \ldots,$$

bezüglich

$$\ldots \varepsilon_0\,\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_{n-2}\,\varepsilon \mid \varepsilon_n^{(2)}\,\varepsilon_{n+1}^{(2)} \ldots \varepsilon_{n+m-1}^{(2)} \mid \varepsilon_n^{(2)}\,\varepsilon_{n+1}^{(2)} \ldots \varepsilon_{n+m-1}^{(2)} \mid \ldots,$$

wo die beiden ersten durch Punkte angedeuteten Glieder in beiden Charakteristiken $\varepsilon\eta$ oder $\eta\varepsilon$ sind, je nachdem λ_1 und λ_2 positiv oder negativ sind. Nun zeigt man wieder leicht durch die Betrachtung der reducirten Formen, die den Paaren $\pi_n^{(1)}, \ldots, \pi_{n+m-1}^{(1)}$ und $\pi_n^{(2)}, \ldots, \pi_{n+m-1}^{(2)}$ entsprechen, dass

$$\varepsilon_n^{(2)} = -\varepsilon_{n+m-2}^{(1)},\ \varepsilon_{n+1}^{(2)} = -\varepsilon_{n+m-3}^{(1)}, \ldots, \varepsilon_{n+m-2}^{(2)} = -\varepsilon_n^{(1)},\ \varepsilon_{n+m-1}^{(2)} = -\varepsilon_{n+m-1}^{(1)}$$

ist. Indem wir von der Charakteristik von λ_2 wieder zu der von $-\lambda_2$ übergehen und zugleich für die in den Charakteristiken auftretenden Vorzeichen andere Bezeichnungen einführen, erhalten wir den

Satz 25. *Für eine Form (a, b, c), deren äussere Coefficienten a und c positiv sind, haben die Charakteristiken der ersten Wurzel und der negativ genommenen zweiten Wurzel die Gestalt*

$$\varepsilon_0\, \varepsilon_1\, \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_{n+1}\, \eta\, \eta_1 \quad \eta_2 \quad \ldots \eta_{m-1}\, \eta_m\, \eta_1 \quad \eta_2 \quad \ldots \eta_{m-1}\, \eta_m \ldots$$

bezüglich

$$\varepsilon_0'\, \varepsilon_1'\, \varepsilon_2' \ldots \varepsilon_{n+1}'\, \eta\, \eta_{m-1}\, \eta_{m-2} \ldots \eta_1 \quad \eta_m\, \eta_{m-1}\, \eta_{m-2} \ldots \eta_1 \quad \eta_m \ldots,$$

wo

$$\varepsilon_\varkappa' = -\varepsilon_\varkappa \quad (\varkappa = 0, 1, 2, \ldots, n+1)$$

ist.

Von der Charakteristik einer Grösse geht man leicht zu der Kettenbruchentwicklung derselben über. Und so enthalten insbesondere die Sätze 24 und 25 das bekannte Theorem, dass die natürlichen Kettenbruchentwicklungen der beiden Wurzeln einer ganzzahligen quadratischen Gleichung periodisch sind, und dass die Periode in der Entwicklung der einen Wurzel dieselben Zahlen jedoch in umgekehrter Reihenfolge enthält, wie die Periode in der Entwicklung der anderen Wurzel.

Es mögen hier noch einige Bemerkungen über die im Vorstehenden entwickelte Theorie, über ihre Beziehungen zu älteren Untersuchungen und über ihre Verallgemeinerungen folgen.

In letzter Instanz liegt unserer Theorie die Untersuchung der ganzzahligen Formen mit verschwindender Determinante zu Grunde. Indem wir nämlich die Formen durch die Punkte einer Ebene repräsentirten, wurden die ganzzahligen Formen mit verschwindender Determinante durch diejenigen Punkte eines Kegelschnittes (des Kreises K) dargestellt, welche rationalen Parametern entsprechen, und die Betrachtung dieser Punkte, mit welcher unsere Untersuchung sogleich anhebt, bildet den Angelpunkt der Theorie. Bei der erwähnten geometrischen Repräsentation stellen sich die unimodularen ganzzahligen linearen Transformationen der quadratischen Formen als eine

Gruppe von Collineationen dar, der gegenüber jenes System von Punkten des Kegelschnitts mit rationalen Parametern invariant ist. Betrachtet man die Gerade, welche irgend zwei Punkte dieses Systemes, deren Parameter in reducirter Form $\frac{r}{u}$ und $\frac{s}{v}$ seien, verbindet, so ist der absolute Werth der Determinante $rv - su$ rücksichtlich unsere Gruppe von Collineationen eine Invariante jener Geraden. Man gelangt so naturgemäss zu dem Begriff der Elementarsehnen: es sind das diejenigen Geraden, deren Invariante den kleinstmöglichen Werth 1 besitzt. Indem wir uns nun die Gesammtheit aller Elementarsehnen construiren, erhalten wir eine Figur, die uns die Gruppirung aller Punkte der Ebene gegenüber den Collineationen der Gruppe übersehen lässt und uns damit die Mittel an die Hand giebt, die Theorie der Reduction der quadratischen Formen zu begründen.

Dabei ist besonders hervorzuheben, dass sich die wesentlichen Eigenschaften dieser Figur aus dem Begriff der Elementarsehne auf die leichteste und ungezwungenste Weise ergeben.

Schon oben haben wir erwähnt, dass die in Rede stehende „Elementarsehnenfigur“ von Herrn Klein aus jener „Modulfigur“ (wie wir sie kurz nennen wollen) abgeleitet worden ist, welche der Theorie der Modulfunctionen zu Grunde liegt und die aus einem gewissen System von Kreisbogendreiecken besteht, welche die eine Hälfte der complexen Zahlenebene einfach und lückenlos bedecken. In abstracto kann man die beiden Figuren geradezu als identisch ansehen, insofern sie verschiedene geometrische Einkleidungen derselben analytischen Ideenbildung sind*). Der Gedanke nun, die Theorie der Reduction binärer quadratischer Formen auf die Modulfigur zu gründen, wurde von Herrn Klein schon 1879 in einer Vorlesung, welcher der Verfasser

*) Die geometrische Einkleidung ist hier, wie in allen ähnlichen Fällen, einerseits an sich ganz unwesentlich (so werthvoll sie für die Ideenbildung und für die Abkürzung der Ausdrucksweise auch sein mag), andererseits ist sie natürlich auf die verschiedensten Weisen möglich. Für welche Art der Einkleidung man sich entscheiden will, wird man immer von Zweckmässigkeitsgründen abhängen lassen. So wird man in der Theorie der Modulfunctionen der Modulfigur den Vorzug geben, während in der Theorie der Reduction der quadratischen Formen die Elementarsehnenfigur als die angemessenere erscheint. Vielleicht ist es übrigens zweckmässig, die letztere Figur auch denjenigen functionentheoretischen Untersuchungen zu Grunde zu legen, die sich auf die von Dirichlet, Kronecker, Weber und anderen betrachteten Reihen der Gestalt $\sum_a \frac{1}{a^s}$ (und ähnliche) beziehen, wo sich die Summe auf die ersten Coefficienten aller Formen einer Classe positiver Formen erstreckt.

Bemerkt sei übrigens noch, dass man, um volle Uebereinstimmung zwischen beiden Figuren zu erzielen, die Elementarsehnenfigur durch Aufnahme aller Geraden ergänzen muss, deren Invariante gleich 2 ist.

damals als Studirender beiwohnte, ausführlich erörtert. Andererseits war auch der Zusammenhang der Modulfigur mit der Theorie der Reduction quadratischer Formen negativer Determinante in Herrn Dedekind's Abhandlung über die Theorie der elliptischen Modulfunctionen (Crelle's Journal Bd. 83, 1877) klar hervorgetreten und Stephen Smith hatte in einer Arbeit „Sur les équations modulaires" (Atti della Accademia Reale di Lincei, Bd. I. 1877) die Figur für Formen positiver Determinante verwendet. In seiner Abhandlung „Grundlagen einer independenten Theorie der elliptischen Modulfunctionen und Theorie der Multiplicatorgleichungen erster Stufe" (Diese Annalen Bd. 18, pag. 528) hat der Verfasser sodann die wesentlichen Eigenschaften der Modulfigur auf directem Wege bewiesen, wodurch auch für die Anwendung der Figur auf die Reduction der quadratischen Formen eine feste Grundlage gegeben war. Ist die dort gegebene Darstellung an sich auch ausreichend, so leidet sie doch an dem Mangel, dass sie keine Ableitung der Figur giebt, sondern die wesentlichen Elemente der Figur wie etwas Gegebenes annimmt. In dieser Hinsicht hat jene Darstellung durch Herrn Fricke eine Ergänzung erfahren, und zwar auf Grund einer Idee, die derselbe auch in vielen analogen Fällen mit glücklichem Erfolge angewandt hat*). Die Idee besteht darin, die Gruppe der ganzzahligen linearen Transformationen

$$x' = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta} \; (\alpha\delta - \beta\gamma = 1)$$

durch Hinzufügung der Transformation $x' = -\bar{x}$ zu erweitern. Dabei bedeuten x und x' complexe Variable und $\bar{x}$ die zu x conjugirt complexe Grösse. In der erweiterten Gruppe giebt es nun gewisse Transformationen (Spiegelungen), welche ganze Linien (Gerade oder Kreise) Punkt für Punkt fest lassen und diese Linien geben unmittelbar die Begrenzungen der Gebiete ab, welche die Modulfigur bilden.

Was nun die Stellung der vorliegenden Arbeit zu den soeben besprochenen Untersuchungen angeht, so ist erstens zu bemerken, dass wir eine Ableitung der Modulfigur und ihrer Eigenschaften gegeben haben, die auf einem durchaus neuen Principe beruht. Sodann haben wir zweitens die Theorie der Reduction der quadratischen Formen auf Grund der Figur nach der zahlentheoretischen Seite hin vollständig durchgeführt. Hierzu war die Verwendung der Theorie der Farey'schen Reihen unumgänglich. Wollte man auf die zahlentheoretische Durchführung verzichten und sich mit einer Skizzirung im Allgemeinen

*) Vergl. Klein-Fricke, Elliptische Modulfunctionen, Bd. I, pag. 223ff., Fricke „Ueber eine besondere Classe discontinuirlicher Gruppen reeller linearer Substitutionen", diese Annalen Bd. 38, pag. 50 und 461. Man sehe auch die Abhandlungen von Bianchi: „Sui gruppi di sostituzioni lineari", diese Annalen Bd. 40 und Bd. 42.

begnügen, so würde man mit weit geringeren Mitteln ausreichen, wie dies aus einer Note zu ersehen ist, die der Verfasser dem mathematischen Congress in Chicago vorgelegt hat.

Das Princip, welches wir in der vorliegenden Arbeit auf die binären quadratischen Formen mit reellen Coefficienten angewandt haben, nämlich: die „ausgearteten" Formen zu untersuchen und von diesen den Rückschluss auf die allgemeinen Formen zu machen, lässt sich mit Erfolg auf Formen mit beliebig vielen Unbestimmten, sei es, dass man die Coefficienten der Formen reell oder complex annimmt, ausdehnen. Es möge genügen, dieses an einigen Beispielen näher darzulegen. Im Falle der binären Formen mit complexen Coefficienten (der Dirichlet'schen und Hermite'schen Formen) führt unser Princip zu folgender Betrachtung. Man denke sich die complexen Zahlen in bekannter Weise durch die Punkte einer Kugel dargestellt. Die einzelne complexe Zahl möge zur Abkürzung der „Parameter" des entsprechenden Kugelpunktes heissen und letzterer ebenso bezeichnet werden wie sein Parameter. Die unimodularen Transformationen $\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$, wo α, β, γ, δ complexe ganze Zahlen sind, stellen dann eine Gruppe von Collineationen des Raumes dar, welche die Kugel fest lassen und insbesondere das System der Punkte mit (complex) rationalen Parametern in sich überführen. Es überträgt sich nun ohne Weiteres der Begriff der Elementarsehne: eine Elementarsehne ist die Verbindungsgerade zweier Punkte $\frac{r}{u}$, $\frac{s}{v}$ der Kugel, wo r, s, u, v complexe ganze Zahlen bezeichnen, die der Bedingung $rv - su = \varepsilon$ genügen, unter ε eine Einheit, also einen der Werthe ± 1, $\pm i$ verstanden. Man fasse nun die Gesammtheit der im Inneren der Kugel ausgespannten unendlich vielen Elementarsehnen ins Auge. Betrachtet man eine Gerade, welche die Kugel schneidet, so wird man untersuchen können, wie sich diese Gerade durch die Gesammtheit der Elementarsehnen hindurchzieht. Diese Untersuchung ergiebt die Theorie der Reduction der Dirichlet'schen Formen, welche wie leicht zu sehen durch die die Kugel treffenden Geraden dargestellt werden. Man erhält ferner die Theorie der Reduction der definiten und indefiniten Hermite'schen Formen, indem man untersucht, wie sich ein im Innern der Kugel liegender Punkt bez. eine die Kugel schneidende Ebene zu der Gesammtheit der Elementarsehnen verhält.

Die hier in ihren Grundzügen skizzirte Theorie der Dirichlet'schen und Hermite'schen Formen steht zu der von Herrn Bianchi gegebenen*)

---

*) „Geometrische Darstellung der Gruppen linearer Substitutionen mit ganzen complexen Coefficienten nebst Anwendungen auf die Zahlentheorie". Diese Annalen Bd. 38, pag. 313.

in derselben Beziehung, wie die in der vorliegenden Arbeit entwickelte Theorie der binären quadratischen Formen mit reellen Coefficienten zu der älteren, oben besprochenen Theorie, die sich auf die Modulfigur stützt. Auch für die Dirichlet'schen und Hermite'schen Formen gewährt unsere Theorie den Vortheil, unmittelbar die zahlentheoretische Durchführung zu ermöglichen, wobei dann auch ihr Zusammenhang mit den Untersuchungen hervortreten wird, die der Verfasser über die Entwicklung complexer Grössen in Kettenbrüche angestellt hat. (Acta matematica Bd. 11.) Alles dies hofft der Verfasser in einer Abhandlung, die sich an die vorliegende anschliessen soll, ausführlich darlegen zu können.

Es braucht kaum bemerkt zu werden, dass unser Princip auch auf andere neuerdings von den Herrn Fricke und Bianchi untersuchten Gruppen und zugehörigen Formen (vgl. das obige Citat) Anwendung findet.

Wir betrachten zweitens die quadratischen Formen mit reellen Coefficienten und n Unbestimmten $u, v, w, \ldots$. Der Einfachheit halber sei $n = 3$. Deutet man dann die Coefficienten der einzelnen Form als homogene Coordinaten, so werden die Formen durch die Punkte eines linearen Raumes von 5 Dimensionen dargestellt. In diesem Raume betrachte man insbesondere das Gebilde, welches den Formen entspricht, die sich auf ein volles Quadrat $(xu + yv + zw)^2$ reduciren. Dieses Gebilde ist eine rationale zweistufige quadratische Mannigfaltigkeit, da die Coordinaten eines Punktes des Gebildes den Quadraten und Producten der drei Veränderlichen x, y, z proportional sind. Der einzelne Punkt ist durch die Verhältnisse $x : y : z$ festgelegt und das Gebilde vertritt die Rolle des Kegelschnittes K in der Theorie der binären Formen. Auf dem Gebilde hat man nun weiter diejenigen Punkte $x : y : z$ ins Auge zu fassen, für welche x, y, z ganze Zahlen (ohne einen allen gemeinsamen Theiler) sind. Drei derartige Punkte x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; x_3, y_3, z_3, bestimmen eine Ebene (einen linearen Raum von zwei Dimensionen), welche eine „Elementarebene" heissen möge, wenn die Determinante $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$ gleich ± 1 ist.

Auf das Studium der Gesammtheit der Elementarebenen, die das Analogon der Elementarsehnen bilden, lässt sich dann die Theorie der ternären quadratischen Formen gründen, wie der Verfasser an einem anderen Orte zu zeigen gedenkt.

Zürich, den 28. Januar 1894.

On the theory of Riemann's Integrals.

By

H. F. Baker, Cambridge (Engl.).

On the fundamental integral functions.

The Riemann surface considered is represented by an equation of the form

$$f(s, z) = s^n + s^{n-1}(z, 1)_{\mu_1} + s^{n-2}(z, 1)_{\mu_2} + \cdots + (z, 1)_{\mu_n} = 0,$$

wherein s is an integral function of z, that is, does not become infinite except where z is infinite. At any value of z, $z = a$, I conceive the surface as consisting of $\varkappa$ branchings — superposed, the number of sheets that wind at these windingpoints being respectively

$$w_1 + 1,\ w_2 + 1, \ldots, w_\varkappa + 1$$

so that

$$w_1 + w_2 + \cdots + w_\varkappa + \varkappa = n,$$

and the number of branch points thus arising is $n - \varkappa$. The most ordinary case is when $\varkappa = n$ and

$$w_1 = w_2 = \cdots = w_\varkappa = 0.$$

The ordinary „Verzweigungspunkt" arises when

$$\varkappa = n - 1,\ w_1 = 0 = w_2 = \cdots = w_i - 1 = \cdots = w_n.$$

The case of a „sich aufhebender Verzweigungspunkt", at which two sheets just touch (as having the same value for z and s) without further connection, arises when

$$\varkappa = n,\ w_1 = w_2 = \cdots = w_n = 0$$

and is not distinguished in this description from an ordinary point.

A point on the surface which gives rise to a cusp (Rückkehrpunkt) on the corresponding plane curve $f(y, x) = 0$, is one at which two sheets not only wind but also touch as at a „sich aufhebender Verzweigungspunkt". This is given in the description here by

$$\varkappa = n - 1, \; w_1 = 0 = \cdots = w_i - 1 - \cdots = w_n$$

and is not distinguished from an ordinary branch point.

These examples will make the description clear. I say that each of the $\varkappa$ windings given by

$$w_1 + 1, \; w_2 + 1, \ldots, w_\varkappa + 1$$

constitutes a '*place*'. At these places dz is infinitesimal respectively of the orders

$$w_1, \; w_2, \; \ldots, \; w_\varkappa$$

namely, if in the neighbourhood of these places we write

$$z - a = t_1^{w_1+1}, \; t_3^{w_2+1}, \; \ldots, \; t_\varkappa^{w_\varkappa+1}$$

$t_1, t_2, \ldots, t_\varkappa$ will be infinitesimal of the first order.

Similarly we describe the character of the surface at $z = \infty$ by saying that at $z = \infty$ we may write

$$z = t_1^{-(w_1+1)}, \; \ldots, \; t_\varkappa^{-(w_\varkappa+1)}.$$

Kronecker (Crelle 91) shews that every integral algebraic function on the surface can be written in the form

$$(z, 1)_{\lambda_0} + (z, 1)_{\lambda_1} g_1 + \cdots + (z, 1)_{\lambda_{n-1}} g_{n-1},$$

where

$$g_i = \frac{s^i + s^{i-1}(z, 1)_{\nu_1} + \cdots}{(z, 1)^{\varrho_i}}$$

is an integral function.

Consider now any integral function g. Let its orders of infinity in the $\varkappa$ places at $z = \infty$ be

$$r_1, \; r_2, \; \ldots, \; r_\varkappa.$$

Let $L\left(\frac{r_i}{w_i+1}\right)$ denote the integer actually less than the number $\frac{r_i}{w_i+1}$, whether this number $\frac{r_i}{w_i+1}$ be integral or not, and let $L\left(\frac{r}{w+1}\right)$ denote the greatest one of the integers

$$L\left(\frac{r_1}{w_1+1}\right), \; L\left(\frac{r_2}{w_2+1}\right), \; \ldots, \; L\left(\frac{r_\varkappa}{w_\varkappa+1}\right).$$

I call $L\left(\frac{r}{w+1}\right)$ the *rank* of the integral function g.

Then we have the

Proposition. The sum of the ranks of the Kronecker functions

$$g_1, \; g_2, \; \ldots, \; g_{n-1}$$

is in all cases p, the „Geschlecht" of the surface.

For, consider an integral algebraic function which is to be infinite at the $\varkappa$ places at $z = \infty$ respectively to orders

$$m(w_1 + 1),\ m(w_2 + 1),\ \ldots,\ m(w_\varkappa + 1)$$

or as near below these as may be possible: m being a large enough integer to allow our regarding these

$$m(w_1 + 1),\ m(w_2 + 1),\ \ldots$$

places as independent.

The form of the function is necessarily

$$(z, 1)_\lambda + g_1(z, 1)_\mu + g_2(z, 1)_\nu + \cdots$$

where

g_1 is such as to be infinite at $z = \infty$ respectively to orders $r_1, r_2, \ldots, r_\varkappa$,
g_2 is such as to be infinite at $z = \infty$ respectively to orders $t_1, t_2, \ldots, t_\varkappa$

and so on.

Hence considering first the place $z = \infty$ where z is infinite of order $w_1 + 1$

$$\lambda(w_1 + 1) \overline{\gtrless} m(w_1 + 1),\quad \mu(w_0 + 1) + r_1 \overline{\gtrless} m(w_1 + 1),$$
$$\nu(w_1 + 1) + t_1 \overline{\gtrless} m(w_1 + 1),\ \ldots.$$

Considering next the place $z = \infty$ where z is infinite of order $w_2 + 1$

$$\lambda(w_2 + 1) \overline{\gtrless} m(w_2 + 1),\quad \mu(w_2 + 1) + r_2 \overline{\gtrless} m(w_2 + 1),$$
$$\nu(w_2 + 1) + t_2 \overline{\gtrless} m(w_2 + 1),\ \ldots$$

and so on: there being $\varkappa$ such rows of conditions.

The first column of these conditions gives $\lambda = m$, shewing that such a function as postulated is certainly possible. The second column gives

$$\mu \overline{\gtrless} m - \frac{r_i}{w_i + 1} \overline{\gtrless} m - 1 - L\left(\frac{r_i}{w_i + 1}\right) \quad \text{for} \quad i = 1, 2, 3, \ldots, n,$$

and gives therefore, in the sense defined above,

$$\mu = m - 1 - L\left(\frac{r}{w + 1}\right) = m - 1 - \text{rank of function } g_1$$

so

$$\nu = m - 1 - L\left(\frac{t}{w + 1}\right) = m - 1 - \text{rank of function } g_2$$

Hence the number of arbitrary coefficients in our function, being

$$(\lambda + 1) + (\mu + 1) + (\nu + 1) + \cdots$$

is

$$1 + nm - \left\{L\left(\frac{r}{w + 1}\right) + L\left(\frac{t}{w + 1}\right) + \cdots\right\}.$$

But, by the Riemann-Roch-Satz, since m is suffieiently large, the

number of these arbitrary coefficients should be $1 + Q - p$, where Q is the number of infinities of the function, viz

$$Q + m(w_1 + 1 + w_2 + 1 + \cdots) = mn.$$

Hence

$$p = L\left(\frac{r}{w+1}\right) + L\left(\frac{t}{w+1}\right) + \cdots$$

as stated. (Cf. also Abel. Oeuvres comp. 1881, p. 173. Equation 80).

Of the expression of algebraic functions which are infinite only at an arbitrary place.

Consider the places $z = a$, the surface being here characterised by

$$w_1 + 1, \ldots, w_x + 1.$$

Let g be an integral function and r the least integer such that $\frac{g}{(z-u)^{r+1}}$ is not infinite at $z = \infty$. For this, if the orders of infinity of g be, in the x places $z = \infty$, respectively

$$r_1, r_2, \ldots, r_x,$$

$$(r+1)(w_i+1) \overline{\gtrless} r_i, \quad \text{viz } r \overline{\gtrless} \frac{r_i}{w_i+1} - 1, \quad \text{viz } r \overline{\gtrless} L\left(\frac{r_i}{w_i+1}\right)$$

$$\text{for} \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Hence

$$r = L\left(\frac{r}{w+1}\right)\cdot$$

viz = rank of function g.

If then K be an algebraic function only infinite at $z = a$ and such that $K(z-a)^{m+1}$ is just *not* infinite at $z = a$ and is therefore an integral function, we must have

(1) $K(z-a)^{m+1} = (z-a, 1)_{\lambda_0} + (z-a, 1)_{\lambda_1} g_1 + (z-a, 1)_{\lambda_2} g_2 + \cdots$
$\cdots + (z-a, 1)_{\lambda_{n-1}} g_{n-1}.$

Put

$$z - a = \frac{1}{\zeta} \quad \text{and} \quad h_i = \frac{g_i}{(z-a)^{\tau_i+1}},$$

where τ_i is the rank of g_i.

Then

(2) $K = (1, \zeta)_{\lambda_0} \zeta^{m+1-\lambda_0} + (1, \zeta)_{\lambda_1} \zeta^{m-\tau_1-\lambda_1} h_1 + (1, \zeta)_{\lambda_2} \zeta^{m-\tau_2-\lambda_2} h_2 + \cdots.$

But the equation (1) gives, since K is not infinite at $z = \infty$ and contains therefore in its expression, as I assume, no terms which become infinite at $z = \infty$,

$$\lambda_0 \overline{\lessgtr} m + 1, \quad \lambda_1(w_i + 1) + r_i \overline{\lessgtr} (m+1)(w_i + 1),$$
$$\lambda_2(w_i + 1) + t_i \overline{\lessgtr} (m+1)(w_i + 1), \ldots$$

where $r_1, r_2, \ldots, r_\varkappa$ are the orders of infinity of g_1 at $z=\infty$, $t_1, \ldots, t_\varkappa$ are the orders of infinity of g_2 at $z=\infty$ etc.

Hence

$$\frac{r_i}{w_i+1} \overline{\overline{<}}\, m+1-\lambda_1, \quad L\left(\frac{r_i}{w_i+1}\right) \overline{\overline{<}}\, m-\lambda_1, \quad m-\tau_1-\lambda_1 \overline{\overline{>}}\, 0,$$

$$\frac{t_i}{w_i+1} \overline{\overline{<}}\, m+1-\lambda_2, \quad L\left(\frac{t_i}{w_i+1}\right) \overline{\overline{<}}\, m-\lambda_2, \quad m-\tau-\lambda_2 \overline{\overline{>}}\, 0$$

etc.

Hence we have the

Proposition. An algebraic function which is only infinite at $z=a$ can be written

$$K=(1,\zeta)_{\mu_0}+(1,\zeta)_{\mu_1}h_1+(1,\zeta)_{\mu_2}h_2+\cdots+(1,\zeta)_{\mu_{n-1}}h_{n-1}$$

where

$$\zeta=\frac{1}{z-a}, \quad h_i=\frac{g_i}{(z-a)^{\tau_i+1}},$$

and $\mu_0, \ldots, \mu_{n-1}$ are all ≥ 0.

It is easy to see that the ranks of $h_1, h_2, \ldots, h_{n-1}$, considered as functions of ζ are respectively the same as those of $g_1, g_2, \ldots, g_{n-1}$.

Of the expression of integrals of the first, second and third kinds — and of the form of adjoint curves in general.

We introduce in what follows certain forms*) $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}$, writing

$$g_i(s,z)=\frac{s^i+s^{i-1}(z,1)_{\mu_1}+\cdots}{D_i},$$

where D_i is an integral polynomial in z. The function φ_i is of the form

$$\varphi_i(s,z)=[s^{n-1-i}+s^{n-2-i}(z,1)_{\nu_1}+\cdots]D_i.$$

The exact expressions for $\varphi_0(s,z)$, $\varphi_1(s,z)$, ... may be defined by the *identity*

$$\text{(A)}\quad \varphi_0(s',z)+\varphi_1(s',z)g_1(s,z)+\varphi_2(s',z)g_2(s,z)+\cdots+\varphi_{n-1}(s',z)g_{n-1}(s,z)$$
$$=\frac{f(s',z)-f(s,z)}{s'-s}$$
$$=s'^{n-1}+s'^{n-2}\chi_1(s,z)+s'^{n-3}\chi_2(s,z)+\cdots+\chi_{n-1}(s,z)$$
$$=s^{n-1}+s^{n-2}\chi_1(s',z)+s^{n-3}\chi_2(s',z)+\cdots+\chi_{n-1}(s',z),$$

where writing

$$f(s,z)=s^n+Q_1 . s^{n-1}+Q_2 . s^{n-2}+\cdots+Q_n,$$

the forms χ_1, χ_2. etc. are those given by

*) Cf. Dedekind & Weber. Crelle 92. (Theor. d. Algeb. Fctnen. e. Var.) where the same forms are introduced and called „die zu g complementäre Basis“. Also Hensel. Crelle 109.

$$\chi_1(s, z) = s + Q_1, \quad \chi_2(s, z) = s^2 + sQ_1 + Q_2, \ldots,$$
$$\chi_{n-1}(s, z) = s^{n-1} + s^{n-2}Q_1 + \cdots + Q_{n-1}.$$

By equating the coefficients of the same powers of s on the two sides of equation (A) we obtain the explicit forms of the functions

$$\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}.$$

For *instance*, if

$$g_1(s, z) = \frac{\chi_1(s, z)}{D_1}, \; g_2(s, z) = \frac{\chi_2(s, z)}{D_2}, \; \cdots, \; g_{n-1}(s, z) = \frac{\chi_{n-1}(s, z)}{D_{n-1}},$$

and this is a case of common occurrence, then

$$\varphi_0(s, z) = s^{n-1}, \; \varphi_1(s, z) = D_1 s^{n-2}, \ldots, \varphi_{n-1}(s, z) = D_{n-1},$$

while in general if the equations giving $s, s^2, \ldots, s^{n-1}$ in terms of $g_1, g_2, \ldots, g_{n-1}$, be

$$\begin{aligned}
1 &= 1, \\
s &= a_{1,0} + a_{1,1} \cdot g_1, \\
s^2 &= a_{2,0} + a_{2,1} \cdot g_1 + a_{2,2} \cdot g_2, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
s^{n-1} &= a_{n-1,0} + a_{n-1,1} g_1 + a_{n-1,2} g_2 + \cdots + a_{n-1,n-1} g_{n-1},
\end{aligned}$$

where

$$a_{1,0}, a_{1,1}, a_{2,0}, a_{2,1}, \ldots$$

are integral polynomials in z, then

$$\begin{aligned}
\varphi_0 &= \chi_{n-1} + a_{1,0}\chi_{n-2} + \cdots + a_{n-2,0}\,\chi_1 + a_{n-1,0}, \\
\varphi_1 &= \qquad\quad a_{1,1}\chi_{n-2} + \cdots + a_{n-2,1}\,\chi_1 + a_{n-1,1}, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\varphi_{n-2} &= \qquad\qquad\qquad\qquad a_{n-2,n-2}\chi_1 + a_{n-1,n-2}, \\
\varphi_{n-1} &= \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad a_{n-1,n-1},
\end{aligned}$$

namely, if we write

$$(1, s, s^2, \ldots, s^{n-1}) = \Omega(1, g_1, g_2, \ldots, g_{n-1})$$

where Ω in a matrix whose determinant is

$$a_{1,1}\, a_{2,2} \ldots a_{n-1,n-1} = D_1 D_2 D_3 \ldots D_{n-1},$$

then

$$(\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}) = \overline{\Omega}(\chi_{n-1}, \chi_{n-2}, \ldots, \chi_1, 1),$$

where $\overline{\Omega}$ is the matrix determined from Ω by changing its rows into columns — is what we call the '*transposed*' of Ω.

If (Q) denote the matrix

$$\left(\begin{array}{ccccc}
Q_{n-1} & Q_{n-2} & \ldots & Q_1 & 1 \\
Q_{n-2} & Q_{n-3} & \ldots & 1 & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
Q_1 & 1 & 0 \ldots & & \\
1 & 0 & \ldots & &
\end{array}\right)$$

whose determinant is ± 1, then

$$(\chi_{n-1}, \chi_{n-2}, \ldots, \chi_1, 1) = (Q)(1, s, s^2, \ldots, s^{n-1})$$

and we may write

(B) $$(\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}) = \overline{\Omega}(Q)\,\Omega(1, g_1, g_2, \ldots, g_{n-1}).$$

The definition (A) leads to other forms for

$$\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}$$

in general — thus. —

Let

$$s_1, s_2, \ldots, s_{n-1}, s_n$$

denote the values of s arising from $f(s, z) = 0$ for any value of z. Denote $\varphi_0(s_i, z)$, $g(s_i, z)$ by $\varphi_0^{(i)}$, $g^{(i)}$ etc.

Then

$$\varphi_0^{(1)} + \varphi_1^{(1)} g_1^{(1)} + \varphi_1^{(1)} g_2^{(1)} + \cdots + \varphi_{n-1}^{(1)} g_{n-1}^{(1)} = f'(s_1) = \left[\frac{\partial f(s, z)}{\partial s}\right]_{s=s_1},$$

$$\varphi_0^{(1)} + \varphi_1^{(1)} g_1^{(i)} + \varphi_2^{(1)} g_2^{(i)} + \cdots + \varphi_{n-1}^{(1)} g_{n-1}^{(i)} = 0, \qquad (i = 2, 3, \ldots, n).$$

Hence if

$$c_0\varphi_0^{(1)} + c_1\varphi_1^{(1)} + c_2\varphi_2^{(1)} + \cdots + c_{n-1}\varphi_{n-1}^{(1)} = \varphi^{(1)},$$

$$\begin{vmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & \ldots & c_{n-1} & \varphi^{(1)} \\ 1 & g_1^{(1)} & g_2^{(1)} & \ldots & g_{n-1}^{(1)} & f'(s_1) \\ . & . & . & . & . & . \\ 1 & g_1^{(i)} & g_2^{(i)} & \ldots & g_{n-1}^{(i)} & 0 \\ . & . & . & . & . & . \end{vmatrix} = 0$$

namely

(C) $$\frac{\varphi^{(1)}}{f'(s_1)} \begin{vmatrix} 1 & g_1^{(1)} & g_2^{(1)} & \ldots & g_{n-1}^{(1)} \\ 1 & g_1^{(2)} & g_2^{(2)} & \ldots & g_{n-1}^{(2)} \\ . & . & . & . & . \\ 1 & g_1^{(n)} & g_2^{(n)} & \ldots & g_{n-1}^{(n)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & \ldots & c_{n-1} \\ 1 & g_1^{(2)} & \ldots & g_{n-1}^{(2)} \\ . & . & . & . \\ 1 & g_1^{(n)} & \ldots & g_{n-1}^{(n)} \end{vmatrix}.$$

It is in this form we shall use the functions $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}$ — limiting ourselves then in the firt instance to values of z where

$$s_1, s_2, \ldots, s_{n-1}, s_n$$

are different. We remark that by multiplying both sides of equation (C) by the determinant which occurs on the left, we obtain

$$\frac{\varphi_0}{f'(s)}, \frac{\varphi_1}{f'(s)}, \ldots, \frac{\varphi_{n-1}}{f'(s)},$$

expressed as rational functions of s and z, and in a form identical with those called by Hensel (Crelle 109) $\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2, \ldots, \bar{\xi}_n$.

Let now $P^{x}_{z_1, z_2}$ be an integral of the third kind, infinite only at two places where

$$z = z_1, \quad z = z_2$$

and in fact like $\int^{z_1}_{z_2} \frac{dt}{t}$, so that $\frac{dP}{dz}$ is an algebraic function, infinite like $\frac{1}{z - z_1}$ at the first, and like $-\frac{1}{z - z_2}$ at the second place — infinite moreover at every winding-place of the surface, as for instance where $z = a$, but such that $(z - a)\frac{dP}{dz}$ is there zero of the first order. Thus if

$$\alpha = (z - a_1)(z - a_2) \ldots,$$

be the integral polynomial in z which vanishes at all the finite branch points of the surface, it being supposed in the first instance that neither z_1 or z_2 are branch points, and g be any integral algebraic function, then

$$\left(g\,\alpha(z - z_1)(z - z_2)\frac{dP}{dz}\right)_1$$

$$+ \left(g\,\alpha(z - z_1)(z - z_2)\frac{dP}{dz}\right)_2 + \cdots + \left(g\,\alpha(z - z_1)(z - z_2)\frac{dP}{dz}\right)_n,$$

where the suffixes indicate the values of the function in the n sheets of the surface for any value of z, is a symmetrical function of these n values, and is therefore a rational function of z alone, is moreover only infinite for $z = \infty$, and vanishes for all values of z which make $\alpha = 0$, and is thus of the form αJ, where J is an integral polynomial in z. Dividing then the equation by α, writing

$$\frac{J}{(z - z_1)(z - z_2)} = \frac{\lambda_1(z - z_2) - \lambda_2(z - z_1) + (z - z_1)(z - z_2)K}{(z - z_1)(z - z_2)},$$

λ_1, λ_2 being constants and K a polynomial in z,

and remembering that

$$(z - z_1)\frac{dP}{dz} = 1$$

at the infinity where $z = z_1$, and

$$(z - z_2)\frac{dP}{dz} = -1$$

at the other infinity, we see that

$$\left(g\frac{dP}{dz}\right)_1 + \left(g\frac{dP}{dz}\right)_2 + \cdots + \left(g\frac{dP}{dz}\right)_n = \frac{g(s_1, z_1)}{z - z_1} - \frac{g(s_2, z_2)}{z - z_2} + (z, 1)^{\mu - 1},$$

where (s_1, z_1), (s_2, z_2) are the two infinities of $P^{x}_{z_1, z_2}$.

Further if τ be the rank of the integral function g, so that $\frac{g}{z^{\tau+1}}$ is just *not* infinite in any sheet at $z=\infty$, this equation gives

$$\left(\frac{g}{z^{\tau+1}}\frac{dP}{dz}\right)_1+\left(\frac{g}{z^{\tau+1}}\frac{dP}{dz}\right)_2+\cdots+\left(\frac{g}{z^{\tau+1}}\frac{dP}{dz}\right)_n$$
$$=\frac{g(s_1,z_1)}{z^{\tau+1}(z-z_1)}-\frac{g(s_2,z_2)}{z^{\tau+1}(z-z_2)}+\frac{(z,1)^{\mu-1}}{z^{\tau+1}}.$$

Now at a place $z=\infty$ where z is infinite of order $w+1$, say $z=t^{-(w+1)}$

$$\frac{dP}{dz}=-\frac{t^{w+2}}{w+1}\frac{dP}{dt}$$

is zero to order $w+2$.

Hence

$$(\tau+1-\overline{\mu-1})(w+1)\overline{\gtrless}\,w+2,$$
$$\tau-\mu+2\overline{\gtrless}\,1+\frac{1}{w+1},$$
$$\mu\overline{\overline{\lessgtr}}\,\tau+1-\frac{1}{w+1}.$$

Hence μ is at most equal to the rank τ of the function g.

In particular

$$\left(\frac{dP}{dz}\right)_1+\left(\frac{dP}{dz}\right)_2+\cdots+\left(\frac{dP}{dz}\right)_n=\frac{1}{z-z_1}-\frac{1}{z-z_2}$$
$$g_1^{(1)}\left(\frac{dP}{dz}\right)_1+g_1^{(2)}\left(\frac{dP}{dz}\right)_2+\cdots+g_1^{(n)}\left(\frac{dP}{dz}\right)_n=\frac{g_1(s_1,z_1)}{z-z_1}-\frac{g_1(s_2,z_2)}{z-z_2}+(z,1)^{\tau_1'-1}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$g_{n-1}^{(1)}\left(\frac{dP}{dz}\right)_1+g_{n-1}^{(2)}\left(\frac{dP}{dz}\right)_2+\cdots+g_{n-1}^{(n)}\left(\frac{dP}{dz}\right)_n=\frac{g_{n-1}(s_1,z_1)}{z-z_1}-\frac{g_{n-1}(s_2,z_2)}{z-z_2}+(z,1)^{\tau_{n-1}'-1},$$

where $\tau_1', \tau_2', \ldots, \tau_{n-1}'$ are respectively not greater than the ranks $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_{n-1}$. Solving these equations for $\left(\frac{dP}{dz}\right)_i$, and then removing the suffix, we have, in accordance with the definitions (C),

$$f'(s)\frac{dP}{dz}=(z,1)^{\tau'-1}\varphi_1+(z,1)^{\tau_2'-1}\varphi_2+\cdots+(z,1)^{\tau_{n-1}'-1}\varphi_{n-1}$$
$$+\frac{\varphi_0+\varphi_1 g_1(s_1,z_1)+\cdots+\varphi_{n-1}g_{n-1}(s_1,z_1)}{z-z_1}$$
$$-\frac{\varphi_0+\varphi_1 g_1(s_2,z_2)+\cdots+\varphi_{n-1}g_{n-1}(s_2,z_2)}{z-z_2}$$

where φ_i stands for $\varphi_i(s,z)$.

In this 'necessary' form of $\frac{dP}{dz}$ there enter at the most

$$\tau_1+\tau_2+\cdots+\tau_{n-1}+1$$

arbitrary homogeneous coefficients: namely, in accordance with what was proved, at most $p+1$. But we know that the most general form of $\frac{dP}{dz}$ involves such $p+1$ terms, being in fact

$$\lambda_1 \frac{dv_1}{dz} + \lambda_2 \frac{dv_2}{dz} + \cdots + \lambda_p \frac{dv_p}{dz} + \left(\frac{dP}{dz}\right)_0$$

where $v_1, v_2, \ldots$ are the normal integrals of the first kind and $\left(\frac{dP}{dz}\right)_0$ a special form of $\frac{dP}{dz}$.

Hence we can infer

(1) The most general form of integral of the first kind is

$$\int^z \frac{dz}{f'(s)}\left[(z, 1)^{\tau'-1}\varphi_1(s, z) + (z, 1)^{\tau_2'-1}\varphi_2(s, z) + \cdots \right.$$
$$\left. + (z, 1)^{\tau'_{n-1}-1}\varphi_{n-1}(s, z)\right]$$

where $\tau_i' \leqq \tau_i$, and the coefficients in $(z, 1)^{\tau_i'-1}$ are arbitrary.

(2) A special and actual form of integral of the third kind logarithmically infinite like $\log t_1 - \log t_2$, where at the first place

$$z - z_1 = t_1^{w_1+1},$$

and at the second

$$z - z_2 = t_2^{w_2+1},$$

is

$$\int^z \frac{dz}{f'(s)}\left[\frac{\varphi_0(s, z) + \varphi_1(s, z)g_1(s_1, z_1) + \cdots + \varphi_{n-1}(s, z)\, g_{n-1}(s_1, z_1)}{z - z_1}\right.$$
$$\left. - \frac{\varphi_0(s, z) + \varphi_1(s, z)g_1(s_2, z_2) + \cdots + \varphi_{n-1}(s, z)\, g_{n-1}(s_2, z_2)}{z - z_2}\right]$$

or

$$\int^z \frac{dz}{f'(s)} \int_{z_2}^{z_1} d\zeta \, \frac{d}{d\zeta}\left[\frac{\varphi_0(s, z) + \varphi_1(s, z)g_1(\sigma, \zeta) + \cdots + \varphi_{n-1}(s, z)\, g_{n-1}(\sigma, \zeta)}{z - \zeta}\right].$$

We can prove in quite a similar way that one form of an integral of the second kind which is once algebraically infinite at an *ordinary* place where $z = \zeta$ like $\frac{1}{\zeta - z}$ is given by

$$Z_\zeta^{z,c} = \int_c^z \frac{dz}{f'(s)} \frac{d}{d\zeta}\left[\frac{\varphi_0(s, z) + \varphi_1(s, z)g_1(\sigma, \zeta) + \cdots + \varphi_{n-1}(s, z)g_{n-1}(\sigma, \zeta)}{z - \zeta}\right],$$

and we can quite easily modify these forms to the case when ζ is a branch point.

Remarks and Examples.

A comparison of the methods and results of this note, which was suggested to me by Hensel's paper, Crelle 109, with his papers (Crelle 109, 111), where the integral of the third kind, though probably in contemplation, is not mentioned, will shew to what extent I am indebted to him. It appears to me that without an exact specification of the forms of $g_1, g_2, \ldots, g_{n-1}$, his paper (wherein, however, the results of Riemann's theory are not assumed) does not prove that in

$$\frac{dv}{dz} = (z, 1)^{\tau'-1}\varphi_1 + \cdots + (z, 1)^{\tau'_{n-1}-1}\varphi_{n-1}$$

all the coefficients in $(z, 1)^{\tau'_i-1}$ may be taken to be arbitrary: though it proves that this is a 'necessary' form of $\frac{dv}{dz}$. For it is not shewn that the equations which he obtains

$$u_1 a_{i1} + u_2 a_{i2} + \cdots + u_n a_{in} = P\bar{u}_i$$

lead necessarily to integral polynomials $u_1, \ldots, u_n$ for every integral form of $\bar{u}_i$. The *proof* here given that

$$\tau_1 + \tau_2 + \cdots + \tau_{n-1} = p,$$

an equation taken by him as definition of p, is designed to fill this Lücke, as I conceive it to be. Moreover his use of dimensions, founded on the *form* of algebraic functions, is apt perhaps to lead to misconception. — In illustration of this point consider the case

$$\begin{aligned} f(s, z) &= s^3 + s^2(z, 1)_2 + sz(z, 1)_1 + Az^2 = 0 \\ &= s^3 + \quad s^2 Q_1 \quad + \quad s Q_2 \quad + Q_3 = 0 \end{aligned}$$

say. Since, by writing $y = \frac{z}{s}$, the equation becomes

$$z + y(z, 1)_2 + y^2(z, 1)_1 + Ay^3 = 0,$$

we see that a fundamental set of integral functions is $1, y, y^2$ and for the original curve, is, therefore

$$1, \frac{z}{s}, \frac{z^2}{s^2},$$

where

$$\frac{z}{s} = -\frac{s^2 + sQ_1 + Q_2}{Az} = -\frac{\chi_2(s, z)}{Az} = -\frac{g_2(s, z)}{A}$$

say

$$\frac{z^2}{s^2} = -\frac{z}{s}\frac{(z, 1)_1}{A} - (s + Q_1) = g_2\frac{(z, 1)_1}{A^2} = \chi_1(s, z).$$

Hence we may take as a fundamental set

$$1, g_1, g_2,$$

where

$$g_1 = \chi_1(s, z), \qquad g_2 = \frac{\chi_2(s, z)}{z}$$

and hence, from

$$\varphi_0' + \varphi_1' g_1 + \varphi_2' g_2 = s'^2 + s'\chi_1 + \chi_2$$

obtain

$$\varphi_0 = s^2, \quad \varphi_1 = s, \quad \varphi_2 = z.$$

Writing now in

$$f(s, z), \quad s = \frac{\eta}{\zeta^2}, \quad z = \frac{1}{\zeta},$$

so that

$$f(s, z) = \zeta^{-6}[\eta^3 + \eta^2(1, \zeta)_2 + \eta\zeta^2(1, \zeta)_1 + A\zeta^4] = \zeta^{-6}F(\eta, \zeta)$$

say,

$$g_1 = \zeta^{-2}[\eta + (1, \zeta)_2],$$

$$g_2 = \zeta^{-3}[\eta^2 + \eta(1, \zeta)_2 + \zeta^2(1, \zeta)_1]$$

have associated with them the indices 2 and 3 respectively, while

$$\frac{\varphi_0}{f'(s)} = \frac{s^2}{3s^2 + 2sQ_1 + Q_2} = \frac{\eta^2}{3\eta^2 + 2\eta(1, \zeta)_2 + \zeta^2(1, \zeta)_1},$$

$$\frac{\varphi_1}{f'(s)} = \frac{s}{f'(s)} = \frac{\eta\zeta^2}{3\eta^2 + 2\eta(1, \zeta)_2 + \zeta^2(1, \zeta)_1},$$

$$\frac{\varphi_2}{f'(s)} = \frac{z}{f'(s)} = \frac{\zeta^3}{3\eta^2 + 2\eta(1, \zeta)_2 + \zeta^2(1, \zeta)_1}$$

have, in accordance with Hensel's work, associated respectively with them the indices

$$0, \quad -2, \quad -3,$$

say

$$0, \quad -\mu_1, \quad -\mu_2.$$

Apparently then in accordance with his work the general integral of the first kind is

$$(z, 1)^0 \frac{\varphi_1}{f'(s)} + (z, 1)^1 \frac{\varphi_2}{f'(s)}$$

and

$$p = \mu_1 + \mu_2 - 3 + 1 = 3.$$

As a fact $p = 1$: and Hensel's results are based on the hypothesis that

$$F'(\eta) = \frac{\partial}{\partial\eta} F(\eta, \zeta)$$

does not vanish for $\zeta = 0$, as is the case in this example. — But it is not I think convenient to make this hypothesis — which would exclude from the direct application of the theory that most important case when the surface is given in Weierstrass's normal form in which all the sheets wind at $z = \infty$. In this example it is easy to prove that $\int \frac{\varphi_1}{f'(s)} dz$ is finite at every place $z = \infty$, but $\int \frac{\varphi_2}{f'(s)} dz$ is logarithmically infinite in two sheets at $z = \infty$. And this is included in the forms we have given: for it can be immediately shewn by

considering $F(\eta, \zeta)$ and $F'(\eta)$ at $\zeta = 0$ that g_1 is of rank unity and g_2 of rank zero, and the only finite integral is therefore $\int \frac{\varphi_1}{f'(s)} dz$.

Of course these remarks are not intended to detract from the very great interest attaching to the results given by Hensel.

I give as a further example of the formula here obtained for the integral of the third kind, the application to the hyperelliptic case

$$s^2 - (z, 1)_{2p+2} = 0.$$

Here

$$g_1 = s,$$

$$\varphi_0 = s, \quad \varphi_1 = 1,$$

and the integral of the third kind is therefore

$$\int^{z} \frac{dz}{s} \left(\frac{s + \sigma_1}{z - \zeta_1} - \frac{s + \sigma_2}{z - \zeta_2}\right).$$

I proceed to verify

(1) That this form*) is obtainable when the integral of the third kind is built after the rules given in Clebsch and Gordan, Abel. Fctnen., see for example. Noether, Math. Ann. 37, 434.

(2) That for $p = 2$ this is equivalent to the covariant form given by Klein (e. g. Math. Ann. 32, 352).

(1) The straight line passing through the points of discontinuity

$$(s, z) = (\sigma_1, \zeta_1), \quad (s, z) = (\sigma_2, \zeta_2)$$

being written in the form

$$Az + \frac{s}{f_0(\zeta_1 - \zeta_2)} + C,$$

where

$$(z, 1)_{2p+2} = f(z) = f_0 z^{2p+2} + f_1 z^{2p+1} + \cdots.$$

If this straight line meet the curve again in

$$\zeta_3, \zeta_4, \ldots, \zeta_{2p+2},$$

we shall have

$$\frac{s^2}{f_0^2(\zeta_1 - \zeta_2)^2} - (Az + C)^2$$

$$= \frac{1}{f_0(\zeta_1 - \zeta_2)^2} (z - \zeta_1)(z - \zeta_2)(z - \zeta_3) \cdots (z - \zeta_{2p+2}).$$

And since

$$Az - \frac{s}{f_0(\zeta_1 - \zeta_2)} + C$$

is obtained from

$$Az + \frac{s}{f_0(\zeta_1 - \zeta_2)} + C$$

*) Also found in Schwarz. Formeln und Lehrsätze z. Gebr. Ellipt. Functionen pag. 88, (6).

by changing the sign of s, it is equal to

$$\frac{1}{f_0(\zeta_1-\zeta_2)^2}\begin{vmatrix} z & s & 1 \\ \zeta_1 & -\sigma_1 & 1 \\ \zeta_2 & -\sigma_2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{f_0(\zeta_1-\zeta_2)^2}\begin{vmatrix} z-\zeta_1 & s+\sigma_1 \\ z-\zeta_2 & s+\sigma_2 \end{vmatrix}=\frac{(\zeta-\zeta_1)(z-\zeta_2)}{f_0(\zeta_1-\zeta_2)^2}\left(\frac{s+\sigma_1}{z-\zeta_1}-\frac{s+\sigma_2}{z-\zeta_2}\right).$$

But since the general adjoint curve of order $n-2=2p$ is

$$(z,1)_{2p}+s(z,1)_{p-1}=0$$

the form of the integral of the third kind formed after Clebsch and Gordan, must be, save for additive terms which are integrals of the first kind,

$$\int\frac{(z-\zeta_3)\cdots(z-\zeta_{2p+2})}{Az+\frac{s}{f_0(\zeta_1-\zeta_2)}+C}\frac{dz}{s}$$

$$=\int\frac{\left[Az-\frac{s}{f_0(\zeta_1-\zeta_2)}+C\right](z-\zeta_3)\cdots(z-\zeta_{2p+2})}{\frac{1}{f_0(\zeta_1-\zeta_2)^2}(z-\zeta_1)(z-\zeta_2)(z-\zeta_3)\cdots(z-\zeta_{2p+2})}\frac{dz}{s}$$

$$=\int\left[\frac{s+\sigma_1}{z-\zeta_1}-\frac{s+\sigma_2}{z-\zeta_2}\right]\frac{dz}{s}=\int^z\frac{dz}{s}\int_{\zeta_2}^{\zeta_1}d\zeta\,\frac{d}{d\zeta}\left(\frac{s+\sigma}{z-\zeta}\right)$$

as stated.

(2) We have

$$\frac{d}{d\zeta}\left(\frac{s+\sigma}{z+\zeta}\right)=\frac{\frac{d\sigma}{d\zeta}(z-\zeta)+\sigma+s}{(z-\zeta)^2}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}\frac{df(\zeta)}{d\zeta}(z-\zeta)+\sigma s+\sigma^2}{(z-\zeta)^2}\frac{1}{\sigma}$$

where

$$\sigma^2=f(\zeta)=(\zeta,1)_{2p+2}.$$

Now in fact for $p=2$, writing $f(z)=a_z^6$, it is easy to verify that

$$\frac{a_z^3a_\zeta^3}{(z-\zeta)^2}=\frac{\frac{1}{2}(z-\zeta)\frac{df}{d\zeta}+\sigma^2}{(z-\zeta)^2}+\frac{1}{120}(z-\zeta)\frac{d^3f}{d\zeta^3}+\frac{1}{10}\frac{d^2f}{d\zeta^2}$$

and hence obtain

$$\int_{\zeta_2}^{\zeta_1}d\zeta\frac{d}{d\zeta}\left(\frac{s+\sigma}{z-\zeta}\right)=\int_{\zeta_2}^{\zeta_1}\frac{d\zeta}{\sigma}\;\frac{a_z^3a_\zeta^3+\sigma s}{(z-\zeta)^2}-\frac{1}{10}\int_{\zeta_2}^{\zeta_1}\frac{d\zeta}{\sigma}\left[\frac{(z-\zeta)}{12}\frac{d^3f}{d\zeta^3}+\frac{d^2f}{d\zeta^2}\right]$$

and hence, writing

$$\frac{1}{120}\int_{\zeta_2}^{\zeta_1}\frac{d\zeta}{\sigma}\frac{d^3 f}{d\zeta^3}=\lambda,$$

$$\int_{\zeta_2}^{\zeta_1}\frac{d\zeta}{\sigma}\left(-\frac{1}{120}\zeta\frac{d^3 f}{d\zeta^3}+\frac{1}{10}\frac{d^2 f}{d\zeta^2}\right)=\mu$$

the equation

$$\int^{z}\left[\frac{s+\sigma_1}{z-\zeta_1}-\frac{s+\sigma_2}{z-\zeta_2}\right]\frac{dz}{s}$$

$$=\int^{z}\frac{dz}{s}\int_{\zeta_2}^{\zeta_1}\frac{d\zeta}{\sigma}\frac{a_z^3\, a_\zeta^3+\sigma s}{(z-\zeta)^2}-\lambda\int^{z}\frac{z\,dz}{s}-\mu\int^{z}\frac{dz}{s}$$

which was desired, the form employed by Klein being

$$\int^{z}\frac{dz}{s}\int_{\zeta_2}^{\zeta_1}\frac{d\zeta}{\sigma}\frac{a_z^3\, a_\zeta^3+\sigma s}{(z-\zeta)^2}.$$

Note. We may add in connection with (2) of page 10 that the integral infinite of the first order at a branch place ζ is

$$\int^{z}\frac{dz}{f'(s)}\frac{\varphi_1 g_1'+\cdots+\varphi_{n-1}g_{n-1}'}{z-\zeta}$$

where g_1' is the differential coefficient in regard to the infinitesimal at ζ, etc.

January, 1894.

The practical determination of the deficiency (Geschlecht) and adjoint φ-curves for a Riemann surface.

By

H. F. Baker, Cambridge (Engl.).

Notwithstanding the existing methods it is very often a problem of considerable length and practical difficulty to determine the deficiency of a plane curve or to write down the forms of the adjoint φ-curves which give the forms of the integrals of the first kind connected therewith. The following extract of some part of a paper by the author, in the Cambridge Phil. Trans. (Vol XV, Part IV) may therefore be of interest. The method given is of exceeding simplicity — and enables us in every case to specify immediately an upper limit to the deficiency and a „necessary" form for the adjoint φ-curve, as well as a lower limit to the number of intersections of any adjoint curve with the fundamental curve at a singular point. But the method employs a diagram — and this diagram does not in all cases represent the numerical relations connecting the coefficients of the fundamental curve with sufficient detail to furnish an exact result — this exactness can only be quite confidently relied on when all the coefficients entering in the fundamental curve have *general* values. Nevertheless a rule is given which covers a very large number of cases in which this is not so.

The results are as follows: —

Let a positive quadrant of rectangular axes be ruled with lines parallel to the axes Ox, Oy, at unit distances apart. Corresponding to the term $A_{r,s}x^r y^s$ occurring in the fundamental curve $F(x, y) = 0$ mark on this ruled quadrant, or *chart*, the point whose coordinates are $x = r$, $y = s$. Call this point a *curve* point, the original points being called merely *unit* points. Then it is possible to form a polygon each of whose sides shall begin and end in a curve point, which shall be everywhere convex, and have all the curve points (other than those on its sides) in its interior. For example we may take the cases

(1) $$(x, y)_4 + (x, y)_3 + (x, y)_2 = 0,$$

(2) $$y^3x^3 + y^2(x, 1)_2 + y(x, 1)_1 + (x, 1)_1 = 0$$

with the diagrams

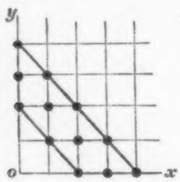


Fig. 1.

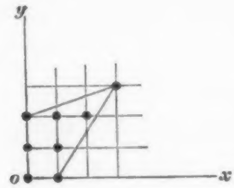


Fig. 2.

Then

Proposition I. Consider a curve with perfectly general coefficients, whose curve points are just the unit points interior to the polygon of the original curve. This curve will be identically divisible by xy; denote it by $xy\varphi$. Then if N be the order of the fundamental curve,

φ is of order $N-3$ and is adjoint at the origin $x=0$, $y=0$ and at each of the singularities at $x=\infty$ or $y=\infty$ —

there being one exceptional case, viz. when the curve is in the form considered by Riemann, in which case φ is of order $N-4$, but is still adjoint at the points specified.

Hence the number of unit points within the polygon of the original curve is $p+(\delta+\varkappa)$, p being the deficiency and $(\delta+\varkappa)$ the number of finite double points and cusps other than the origin.

Hence also the contribution to the total $(\delta+\varkappa)$ of the curve arising from the multiple point at the origin (in the sense originally defined by Cayley, Quarterly Journal, vol VII, and further justified by H. J. S. Smith, Brill etc.) is equal to the number of unit points lying between the polygon of the fundamental curve and the axes of coordinates Ox, Oy, together with the number of unit points lying upon the sides of the polygon which are nearest to the origin (excepting the two unit points which lie actually *upon* the axes Ox, Oy).

For instance in our example (1), $xy\varphi = xy(Ax+By)$, the general integral of the first kind is

$$\int (Ax+By)\frac{dx}{F'(y)},$$

the deficiency is 2, and the contribution to $(\delta+\varkappa)$ arising at the origin is 1. And in example (2), $xy\varphi = xy(A+By+Cxy)$, the general integral of the first kind is

$$\int (A+By+Cxy)\frac{dx}{F'(y)},$$

and the deficiency is 3.

The first proof given of these propositions in the Author's paper consists in shewing that, if the coefficients be sufficiently general, the integral

$$\int \varphi \frac{x\,dy - y\,dx}{\frac{\partial F}{\partial z}},$$

where $z\,(=1)$ is introduced into the equation F to make it homogeneous, is finite at the origin and at infinity.

When however the coefficients of the curve are not general we expect to find exceptions to this rule. And on this account we consider in detail the value of $(\delta + \varkappa)$ contributed, according to Cayley's rules, by a singular point. Supposing this at $x = 0$, $y = 0$, consider one of the sides of the polygon nearest to the origin, which corresponds to an ascending expansion in powers of x

$$y = Ax^{\sigma} + \cdots$$

which will therefore be inclined at an angle $\tan^{-1}\sigma$ to the axis Oy. Let the terms of the curve be arranged to correspond to curve points lying on lines parallel to this side, so that the curve is

$$x^{h}y^{k}(y^{\mu} - a_1 x^{m})^{N_1} \ldots (y^{\mu} - a_{\lambda} x^{m})^{N_{\lambda}} + x^{h_1}y^{k_1}(y^{\mu},\, x^{m})^{r_1} + x^{h_2}y^{k_2}(y^{\mu},\, x^{m})^{r_2}$$
$$+ \text{ higher powers} = 0$$

where $\frac{m}{\mu} = \sigma$, $1 + N_1 + \cdots + N_{\lambda}$ is the number of curve points upon this side, and $(y^{\mu},\, x^{m})^{r}$ means an integral polynomial homogeneously of degree r in y^{μ}, x^{m}.

For instance the curves

(3) $\quad y(y^2 - ax)^4(y^2 - bx) + yx^2(y^2, x)^4 + x^2(y^2, x)^5 = 0,$

(4) $\quad 2y(y^3 + cx^7)^2(y^3 + ax^7) - 5x^5y^2(y^3 + cx^7)^2 + 5x^{15}y(y^3 + cx^7) - x^{25} = 0$

of which (3) has the diagram

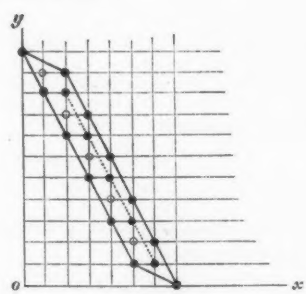


Fig. 3.

wherein the unit points marked o are not curve points.

Write then in our curve $\xi = x^{\frac{1}{\mu}}$ and $y = vx^{\sigma}$, so that it becomes

$$v^k(v^\mu - a_1)^{N_1} \dots (v^\mu - a_\lambda)^{N_\lambda} + v^{k_1}\xi^{t_1}(v^\mu, 1)^{r_1} + v^{k_2}\xi^{t_2}(v^\mu, 1)^{r_2} + \cdots = 0$$

and suppose the first of the quantities $(v^\mu, 1)^r$ which does not vanish for $v^\mu = a_1$ to arise in the term $v^{k_i}\xi^{t_i}(v^\mu, 1)^{r_i}$. For instance in example (3), $t_i = 2$, and in example (4), $t_i = 5$. In case $v^\mu = a_1$ do not reduce $(v^\mu, 1)^{r_1}$ to zero, the figure furnishes an immediate interpretation of t_1. Namely if a line move parallel to the side of the polygon we are considering, towards the inside of the polygon, it is possible that in its first new position in which it contains unit points, it may contain no curve points. In such cases $t_1 > 1$. For instance this is the case in the figure of example (3), for which $t_1 = 2$. In general t_1 gives the number of stages through which our moving line must pass until it again contains curve points.

Draw another diagram, a positive quadrant ruled with lines parallel to the axes at unit distance apart — Taking $OA = t_i$ and $OB = N_1$. Join AB. Count the number of unit points lying within the triangle OAB, together with those upon AB other than A and B.

Let the number obtained be called C_1.

Obtain similarly the numbers $C_2, C_3, \dots, C_\lambda$; and the corresponding numbers for the other sides of the polygon at the origin.

Then

Proposition II. The number $(\delta + \varkappa)$ arising from the singularity at the origin is equal to the number given by the previous rule, with a correction

$$\Sigma(C_1 + \cdots + C_\lambda).$$

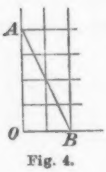


Fig. 4.

For example (3),

$$N_1 = 4,\ t_i = 2,$$

and the correction is

$$C_1 = 2.$$

Hence an inspection of the two figures shews immediately that $(\delta + \varkappa)$ for the origin

$$= 25 + 2 = 27.$$

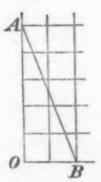


Fig. 5.

For example (4) where

$$t_i = 5,\ N_1 = 2,$$

the correction is $\qquad C_1 = 2,$

and a glance at this figure and the figure of the curve itself shew that for the origin

$$(\delta + \varkappa) = 102 + 2 = 104.$$

In the Author's paper both these examples are considered in more detail and the forms of the integrals of the first kind are obtained.

These results are obtained by actual expansion of y in powers of x, and the use of Cayley's rules. The method of proof is liable to exception in case of very special forms of coefficients. But the results cover a large number of practical cases. It is obvious that an exactly similar investigation holds good for the other singular points of the curve, including those at infinity.

It may be remarked that the example (4) is a transformation of

$$(5)\quad y^5 - 5y^3(x^2+x+1) + 5y(x^2+x+1)^2 - 2x(x^2+x+1)^2 = 0$$

considered by Raffy*). He obtains $p = 0$: in fact $p = 2$.

We may also notice perhaps, as a particular case of a generalized form of Noether's quadratic transformation, considered in the Author's paper, this

*Proposition III***). Consider a multiple point such that the polygon has next to the origin, only one side: there being $n\mu$ branches whose expansions are of the form

$$y = Ax^\sigma + \text{ascending powers of } x$$

the $n\mu$ values of A being all different.

And let σ be put into a continued fraction, thus: —

$$\frac{nm}{n\mu} = \sigma = K_{2m+1} + \frac{1}{K_{2m}} + \cdots + \frac{1}{K_1}$$

Denote this by $\frac{P}{P'}$; the penultimate convergent being $\frac{Q}{Q'}$.

And let the convergents of the continued fraction

$$K_1 + \frac{1}{K_2} + \cdots + \frac{1}{K_{2m}} + \frac{1}{K_{2m+1}}$$

be denoted by

$$\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \ldots, \frac{P'}{Q'}, \frac{P}{Q}.$$

Then if

$$t_0 = n\mu/P', \quad t_r = (q_r P' - p_r Q')nm - (q_r P - p_r Q)n\mu = p_r n\mu/P',$$
$$t_{2m} = n\mu$$

the singularity is equivalent to

K_1 t_0-ple points,
K_2 t_1-ple points
etc.

---

*) Ann. de l'Éc. Norm. Sup. 1883.

**) Cf. Noether's paper, Rendiconti del Circ. Matem. di Palermo, IV, 1890, which I had not seen when this paper was written.

For instance Noether's example (Math. Ann. IX, p. 174)

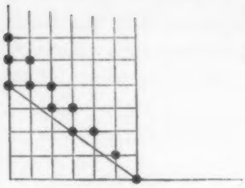


Fig. 6.

(6) $$y^4 + y^2(x, y)^3 + (x, y)^6 + \cdots$$

Here

$$nm = 6, \quad n\mu = 4,$$

$$\sigma = \frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{1+} \frac{1}{1},$$

$$\frac{P}{P'} = \frac{3}{2}, \; \frac{Q}{Q'} = \frac{2}{1}, \; \frac{P}{Q} = \frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{1+} \frac{1}{1},$$

$$\frac{p_1}{q_1} = \frac{1}{1}, \; \frac{p_2}{q_2} = \frac{2}{1}, \; \frac{p_3}{q_3} = \frac{3}{2},$$

$$t_0 = 2, \quad t_1 = 2, \quad t_2 = 4$$

so that the singularity is resolveable into two double points and one quadruple point. — And this is Noether's result.

It is shewn in the paper in question that we can use a result of which that here given is a particular case, to transform any curve to one whose only singularities are at infinity. — If in such a curve y be an „integral“ function of x all integral functions are expressible integrally.

Note 1.

It may be worth remarking that Raffy's example (5), above, can by means of

$$x = \frac{\omega^2\left[\eta + \frac{1-\omega^2}{4}(1 - 5\xi + 5\xi^2)\right]^2 - \omega\xi^5}{2\eta^2 + \eta\,\frac{1-\omega^2}{2}(1 - 5\xi + 5\xi^2) + \omega\xi^5}, \quad \text{(where } \omega^3 = 1\text{)}$$

$$y = -\frac{(\omega - \omega^2)\xi^2\left[\eta + \frac{1-\omega^2}{4}(1 - 5\xi + 5\xi^2)\right]}{2\eta^2 + \eta\,\frac{1-\omega^2}{2}(1 - 5\xi + 5\xi^2) + \omega\xi^5}$$

be transformed into

$$\omega\eta^2 = -\frac{3}{16}(1 - 5\xi + 5\xi^2)^2 + \xi^5$$

Note 2.

The determination of the deficiency by a diagram, here, has ultimately some connection with results obtained by Hensel Crelle 109. But this paper was written before I had seen Hensel's paper.

Note 3.

The figure for the curve

$$y^{13}+y^{12}(x,1)_1+y^{11}(x,1)_1+y^{10}(x,1)_4+y^{9}(x,1)_3+y^{8}(x,1)_2$$
$$+y^{7}(x,1)_4+y^{6}(x,1)_3+y^{5}(x,1)_5+y^{4}(x,1)_4$$
$$+y^{3}(x,1)_3+y^{2}(x,1)_2+y(x,1)_3+(x,1)_2=0$$

considered by Abel (Oeuvres Complètes. 1881. pp. 181—185) is

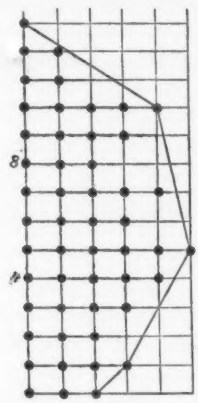


Fig. 7.

The number of points interior to the polygon is exactly 38 which is Abel's result. The figure in fact performs the long numerical calculations of Abel's for us. — This example shew's the utility of the method. It is a question for further enquiry whether the fact that some of the unit points are not curve points affects the validity of the conclusion that $p=38$. Proposition II supplies a method.

Note 4.

A very interesting case is furnished by Weierstrass's normal curve expressed by two algebraic functions g_a, g_r wherein a is prime to r (see Schottky, Crelle 83). For such a curve

$$p=\frac{1}{2}(a-1)(r-1)-(\delta+\varkappa)$$

and the number $\frac{1}{2}(a-1)(r-1)-p$ is the same as that of the integral functions which are not expressible integrally by g_a and g_r. In continuation of Schottky's results, the paper referred to contains the form of the equations in case $p=4$. I hope to return to this in a later paper.

January, 1894.

Autographirte Vorlesungshefte.

Von

Felix Klein in Göttingen.

[Ueber Riemann'sche Flächen, Doppelvorlesung 1891—92; Höhere Geometrie, desgl. 1892—93; Ueber die hypergeometrische Function, Winter 1893—94.]

Es ist nun schon eine längere Reihe von Jahren, dass ich mir eine besondere Vorlesungspraxis ausgebildet habe. Von dem Wunsche ausgehend, meine wissenschaftlichen Anschauungen möglichst allseitig auszugestalten, habe ich mit dem Gegenstande meiner Vorlesungen fast fortwährend gewechselt. Dies gab Schwierigkeiten fast noch mehr für meine Zuhörer als für mich selbst. Ich begann daher, meine jedesmaligen Vorträge ausarbeiten zu lassen und diese Ausarbeitungen den Studirenden im Lesezimmer des Seminars zur Verfügung zu stellen. Diese Methode hat sich im Laufe der Jahre naturgemäss weiter entwickelt. Es erschien wünschenswerth, dass die Studirenden nicht zu viele Zeit auf das Nachschreiben der Vorlesungshefte verwenden sollten, während ich andererseits das Bedürfniss empfand, auch früheren Schülern oder befreundeten Gelehrten von dem Inhalte meiner jedesmaligen Vorlesungen Mittheilungen zu machen. Ich ging also dazu über die Ausarbeitungen autographisch zu vervielfältigen. Diese autographirten Hefte haben gegen meinen ursprünglichen Wunsch allmählich immer mehr eine Verbreitung auch in weiteren Kreisen gefunden. In demselben Maasse habe ich mehr und mehr danach gestrebt, denselben einen allgemein gültigen Inhalt zu geben. Ich habe eine Zeit lang gehofft, ich werde Hülfskräfte finden, um die so entstehenden Darstellungen verschiedener Gebiete einer Ueberarbeitung zu unterziehen und dann in Buchform zu veröffentlichen. Die Herausgabe meiner Vorlesungen über elliptische Modulfunctionen durch Herrn Fricke bot hierfür ein glänzendes Beispiel; ich kann in diesem Zusammenhange ferner das Werk von Pockels (Ueber die partielle Differentialgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$, Leipzig 1891) sowie ein demnächst erscheinendes Buch

von Bôcher (Ueber die Reihenentwickelungen der Potentialtheorie) anführen. Aber eine solche Bearbeitung kostet ausserordentlich viele Zeit und es geht dabei auch der Charakter der Unmittelbarkeit, den die Vorlesungen besitzen, verloren, — ganz abgesehen davon, dass es kaum möglich sein dürfte, immer wieder einen geeigneten Bearbeiter zu finden. So sei denn der weitere Schritt gewagt, meine neueren autographirten Hefte, so wie sie sind, hier in den Annalen zu besprechen und dadurch dem allgemeinen mathematischen Publicum vorzulegen*). Meine Absicht ist geradezu die, dem gegenwärtigen ersten Artikel in Zukunft eine Reihe weiterer Mittheilungen folgen zu lassen, in dem Maasse wie fernere Vorlesungshefte hinzukommen. —

Ich bin mir ja der Verantwortung dieses Schrittes sehr bewusst. Die autographirten Hefte sind als Wiedergabe wirklich gehaltener Vorlesungen durch die mannigfachsten Zufälligkeiten bedingt: einzelnes ist breit ausgeführt, während anderes, gleich wichtige fehlt. Und mehr als dass: sie enthalten der vorläufigen Formulirungen und Urtheile eine Menge, welche bei nochmaliger Durcharbeitung vermuthlich nicht würden bestehen bleiben können. Ich mochte dieselben nicht einfach wegstreichen, weil ich glaube, dass die Wirkung meiner Darstellung gerade in ihrem subjectiven Charakter beruhen wird. Möge man die Versicherung hinnehmen, dass ich an solchen Stellen einzig um den Fortschritt der Wissenschaft bemüht bin und dass ich andererseits sehr bereit sein werde, Berichtigungen entgegen zu nehmen und bei späterer Gelegenheit zur Geltung zu bringen.

Die Reihe der in Rede stehenden autographirten Hefte beginnt mit einer Doppelvorlesung über *Nicht-Euklidische Geometrie* (1889—90) und einer ebensolchen über *lineare Differentialgleichungen* (1890—91)**). Ich werde auf diese ersten Hefte hier nicht weiter eingehen. Die Vorlesung über Nicht-Euklidische Geometrie ist nach verschiedenen Richtungen in der Zwischenzeit durch neuere Publicationen überholt. Die Vorlesung über lineare Differentialgleichungen aber war nur ein erster Versuch: ein Theil der dort berührten Ideen ist in der Vorlesung über die hypergeometrische Function, die ich im letztverflossenen Wintersemester hielt, bereits in reiferer Form reproducirt worden, — Anderes soll in der Vorlesung des kommenden Sommersemesters von Neuem zur Geltung kommen, der Rest aber, der von den automorphen Functionen handelte, in die Gesammtdarstellung der Theorie dieser

---

*) Die Hefte werden durch meinen früheren Assistenten, Herrn Dr. Schilling, versandt; Bestellungen sind, so lange nichts Anderes verabredet ist, am besten an das mathematische Institut der Universität Göttingen zu richten.

**) Ich habe auch gelegentlich von der Vorlesung *über geometrische Functionentheorie*, welche ich 1880—81 an der Universität Leipzig hielt, Copieen anfertigen lassen, wie ich nur der Vollständigkeit halber hier anführe.

Functionen eingearbeitet werden, die ich zusammen mit Herrn Fricke vorbereite.

So bleiben denn die drei in der Ueberschrift genannten Hefte und über diese will ich hier in der Weise kurzen Bericht geben, dass ich jedesmal solche Punkte hervorhebe, auf welche ich besonderes Gewicht lege.

I. Riemann'sche Flächen.

Den Ausgangspunkt bildet hier selbstverständlich diejenige Auffassung der Riemann'schen Theorie, welche ich seiner Zeit in meiner Schrift über Riemann (Leipzig 1881) skizzirt und bald darauf in Bd. 21 der Annalen noch weiter ausgeführt habe. Das Wesentliche ist, dass die Riemann'sche Fläche (oder irgend ein mit ihr äquivalenter Bereich) als *Definition* der zugehörigen Functionen gilt. Ich brauche hierauf an gegenwärtiger Stelle kaum zurückzukommen, nachdem einerseits meine Auffassungsweise in den von Herrn Fricke bearbeiteten Vorlesungen über Modulfunctionen ausführlich dargelegt ist, nachdem andererseits Herr Picard in seinem neuen Traité d'analyse einen entsprechenden Standpunkt eingenommen hat. Ebensowenig führe ich hier aus (was ebenfalls bereits in den Modulfunctionen zur Geltung kommt), dass mit der genannten Auffassung zugleich eine neue Grundlage für die Darstellung der algebraischen Functionen in homogener Form gegeben ist. Ich habe im Anschluss daran in meiner Vorlesung u. a. eine homogene Formulirung der Theorie der zu einer gegebenen Riemann'schen Fläche gehörigen *Minimalflächen* gegeben, wobei sich diese Theorie sehr viel symmetrischer gestaltet als bei den sonstigen Darstellungen und systematisch in die übrigen Betrachtungen eingefügt erscheint*).

*) Ich möchte hier eine kurze historische Notiz einfügen. Picard nennt in Bd. II seines Werkes auf pag. 375 als denjenigen, der bei Untersuchungen über den Flächenzusammenhang zuerst frei im Raume gelegene Flächen mit p Oeffnungen angewandt habe, Clifford (Proceedings of the London Mathematical Society, vol. 8, 1876). Demgegenüber weist bereits Burkhardt in seiner Recension des Picard'schen Werkes in den Göttinger Anzeigen (1894, Nr. 5) darauf hin, dass diese Flächen schon 1875 in einer Arbeit von Tonelli auftreten (Atti dei Lincei, tom. 2, ser. II). Es ist keine Frage, dass die Benutzung der in Rede stehenden Flächen auf Riemann selbst oder doch auf seine unmittelbare Umgebung zurückgeht. Ich habe mich in dieser Hinsicht in der Vorrede zu meiner Schrift über Riemann auf eine Unterhaltung mit Herrn Prym vom Jahre 1874 bezogen. Die Sache wird mir jetzt durch Herrn Schering bestätigt, der sich dahin äussert, dass er sich allerdings nicht bestimmt erinnern könne, jemals mit Riemann über den Gegenstand gesprochen zu haben, dass ihm aber die Verwendung der in Rede stehenden Flächen von jeher geläufig gewesen sei. Hiermit ist auch die Quelle gegeben, aus welcher Herr Tonelli die Verwendung der in Rede stehenden Flächen entnommen hat; denn Herr Tonelli hat seine Arbeit (welche übrigens

An die hiermit bezeichneten Entwickelungen knüpft sich nun als zweiter Theil der Vorlesung eine *historische Uebersicht über die Theorie der algebraischen Curven*, — wobei es sich in erster Linie darum handelt, überall hervorzukehren, wie sich die einzelnen Begriffsbestimmungen und Sätze vom Standpunkte der Riemann'schen Theorie aus darstellen. Ich brauche hier auf die einzelnen Momente der historischen Darstellung um so weniger einzugehen, als ja ein ausführlicher Bericht über denselben Gegenstand von Seiten der Herren Brill und Nöther demnächst in den Berichten der deutschen mathematischen Gesellschaft publicirt werden soll; dort werden zweifellos auch einzelne Ungenauigkeiten meiner Darstellung corrigirt sein. Andererseits überspringe ich alle diejenigen Formulirungen, welche bereits in der Theorie der elliptischen Modulfunctionen ihre Stelle gefunden haben. So mögen nur folgende Punkte genannt werden:

Eine jedenfalls wichtige Frage ist, wie man am einfachsten zu einer gegebenen eben algebraischen Curve eine zugehörige Riemann'sche Fläche construirt. Ich erinnere in dieser Hinsicht zunächst an das Verfahren, welches ich in Annalen Bd. 7 und 10 gegeben habe (1874, 1876), wo ich den Ort der reellen Punkte der imaginären Curventangenten als Riemann'sche Fläche auffasste („projective Fläche"). Die verschiedenen Realitätstheoreme, welche man für die Singularitäten der ebenen algebraischen Curven besitzt, erfahren von hier aus eine neue Beleuchtung. Ich gebe sodann eine zweite Construction, die in analytischer Form schon bei früheren Autoren auftritt aber hier wohl zum ersten Male geometrisch ausgeführt wird („metrische Fläche"). Einem imaginären Curvenpunkte wird hier derjenige reelle Punkt der Ebene zugeordnet, der mit ihm und dem einen Kreispunkte der Ebene auf einer Geraden liegt. Dabei fallen die Verzweigungspunkte der Fläche in die Brennpunkte der Curve. Es sind dies diejenigen Flächen, welche neuerdings Herr Loud einer eingehenden Betrachtung unterzogen hat (vergl. Annals of Mathematics, vol. VIII, 1893).

Eine weitere Frage ist die nach der Bedeutung der speciell curventheoretischen Methoden, also des Nöther'schen Fundamentalsatzes, des Restsatzes etc. für die Riemann'sche Auffassung. Ich stelle hier mehr die Probleme, als dass ich sie erledige. Es handelt sich immer darum, die Theoreme von der Formel abgelöst nach ihrer functionentheoretischen

---

selbständige Untersuchungen zur Theorie des Flächenzusammenhangs enthält) hier in Göttingen unter Leitung von Herrn Schering ausgeführt. Man vergleiche hierzu die erste Mittheilung der Tonelli'schen Resultate in Nr. 13 der Göttinger Nachrichten von 1875. — Uebrigens bemerke man, dass hei Clifford und Tonelli die in Rede stehenden Flächen nur für die Untersuchungen der Analysis situs, nicht aber, wie in meiner Schrift über Riemann's Theorie, direct für die functionentheoretische Grundlegung herangezogen werden.

Bedeutung zu begreifen. Es würde mir wichtig scheinen, die verschiedenen hier nur angedeuteten Ansätze weiter auszuführen. Insbesondere ist meine Ansicht, dass überall da, wo die Moduln des algebraischen Gebildes in Betracht kommen, die Riemann'sche Behandlung den Theoremen einen höheren Grad von Sicherheit verleiht. Man kann bei der üblichen algebraischgeometrischen Behandlung fast bei jedem Schritte Einwürfe formuliren, dahingehend, dass nothwendige Abhängigkeiten der zu combinirenden Gleichungen vielleicht nicht erkannt sind. Es mag nicht schwierig sein, auf den einzelnen derartigen Einwurf zu antworten, etwa durch Discussion eines numerischen Beispiels. Dagegen scheint es fast unmöglich und jedenfalls äusserst umständlich, dieses Verfahren bei längeren Beweisen, überall wo es nöthig wäre, in Anwendung zu bringen. Ganz anders die Beweismethoden, welche an die Riemann'schen Existenzsätze anknüpfen. Ihnen haftet nur, höchst bedauerlicher Weise, eine andere Beschränkung an: sie sind bis auf Weiteres nur auf eindimensionale algebraische Gebilde anwendbar und können noch in keiner Weise auf mehrdimensionale algebraische Gebilde ausgedehnt werden.

An dritter Stelle sei eines Beispiels gedacht, welches ich für die hiermit entwickelte Auffassung in der Theorie der Raumcurven gebe. Bei seinen interessanten Untersuchungen über die Brill-Nöther'schen Specialgruppen gebraucht Herr Castelnuovo gelegentlich die Annahme, es sei möglich eine C_{m+p} des R_m vom Geschlechte p in eine rationale C_m desselben Raumes und p geradlinige Secanten dieser C_m zerfallen zu lassen. Indem ich mir als Abbild der Raumcurve eine $(m+p)$-blättrige Riemann'sche Fläche über der Ebene gegeben denke, vermag ich in der That den hier erforderlichen Beweis zu führen. Es handelt sich nur darum, die Fläche durch Verschiebung ihrer Verzweigungspunkte so ausarten zu lassen, dass sich p einfache Blätter von ihr abtrennen. Allerdings wird hier von dem Riemann'schen Existenzgesetz in einer Weise Gebrauch gemacht, die in den explicite vorliegenden Beweisen desselben nicht vorgesehen ist. Das Problem ist, die Stetigkeit der durch eine Riemann'sche Fläche definirten Functionen bei stetiger Abänderung der Fläche zu beweisen. Ich hoffe, dass dieser Gegenstand binnen kurzem von anderer Seite seine Erledigung finden wird*). —

Es folgt ein letzter Theil der Vorlesung. Ich kann mich hier wieder sehr kurz fassen, weil ich den Gegenstand später (Annalen 42) in einer eigenen Abhandlung dargelegt habe. Schon in meiner Schrift über Riemann hatte ich die Theorie der Curvengestalten an die Theorie

---

*) In einer Arbeit von Herrn Ritter, die in diesen Annalen veröffentlicht werden soll.

der „symmetrischen" Riemann'schen Flächen angeknüpft. Dies habe ich nun hier nach verschiedenen Richtungen ausgeführt und insbesondere durch Discussion der Perioden der zugehörigen Abel'schen Integrale eine Menge von Theoremen über die Realität von Berührungscurven etc. entwickelt.

II. Höhere Geometrie.

Wenn wir die Untersuchungen über die Principien der Geometrie bei Seite lassen (also die Nichteuklidische Geometrie im engeren Sinne des Wortes, die Inbetrachtnahme nicht analytischer Curven etc.), so gruppiren sich die Arbeiten der neueren Geometer oder auch die Geometer selbst in der Hauptsache um zwei Mittelpunkte. Wir haben auf der einen Seite die *Differentialgeometrie*, auf der anderen Seite die *Geometrie der algebraischen Gebilde* (bei der selbst wieder eine Scheidung nach analytischer und synthetischen Methode vorliegt). Und doch stehen die Materialien zu einer einheitlichen Auffassung des ganzen Gebietes seit lange bereit. Ich hatte zu dem Zwecke nur an die Arbeiten anzuknüpfen, welche von Lie und mir selbst in den Jahren 1869—1872 veröffentlicht worden sind, und dann den weitern Fortschritten der Lie'schen Arbeiten sowie der geometrischen Functionentheorie zu folgen. Natürlich bin ich nach keiner Seite in Einzelheiten gegangen.

Meine erste Eintheilung ist, wie dies nicht anders sein kann, functionentheoretischer Natur, nämlich die Unterscheidung zwischen analytischen und algebraischen Functionen. Erstere sind, allgemein zu reden, nur in einem begränzten Raumstücke definirt; es ist unmöglich (so lange man nicht specificiren will) über ihr Verhalten bei weiterer „analytischer Fortsetzung" eine bestimmte Aussage zu machen. Letztere dagegen sind von vornherein im Gesammtraum gegeben. Dabei ist uns beidemal anheimgestellt, ob wir complexe Werthsysteme mit in Betracht ziehen wollen oder nicht.

Des weiteren aber gruppire ich den Stoff, ohne mich gerade ängstlich an die Eintheilung zu binden, um drei Grundbegriffe: Coordinatensystem, Transformation, Gruppe.

1. Coordinatensystem.

Hier machen die verschiedenen Arten der Punktcoordinaten natürlich den Anfang, die geradlinigen wie die krummlinigen, deren Bedeutung insbesondere auch für die Anwendungen dargelegt wird. So erörtere ich bei den elliptischen Coordinaten die Staude'sche Fadenconstruction des Ellipsoids, Henrici's bewegliches Hyperboloid. Darboux's pentasphärische Coordinaten geben den Anlass zur einer Besprechung von Peaucellier's Inversor.

Aber statt des Punktes kann ebensowohl jedes andere Gebilde als „Raumelement“ der Coordinatenbestimmung zu Grunde gelegt werden (Plücker).

Ich verweile ganz besonders bei der Kugelgeometrie und ihrer von Lie entdeckten Beziehung zur Liniengeometrie; man vergleiche Lie's Abhandlung über Complexe in Band 5 der Annalen, die überhaupt für meine folgenden Entwickelungen fundamental ist. Wir haben zweierlei Kugelgeometrie zu unterscheiden: die elementare und die höhere (die Lie'sche). In der elementaren Kugelgeometrie kommt nur das Quadrat des Kugelradius in Betracht, in der höheren Kugelgeometrie aber der Radius selbst, d. h. der mit bestimmtem Vorzeichen genommene Radius. Liniengeometrie des R_3 ist so viel wie Punktgeometrie auf einer Fläche zweiten Grades des R_5. Projiciren wir diese Fläche stereographisch von einem ihrer Punkte aus auf den R_4, so erhalten wir hier die Punktgeometrie der reciproken Radien, d. h. diejenige Art der metrischen Geometrie, welche nur Beziehungen gelten lässt, die bei beliebiger Inversion invariant sind. Dies ist, was in meiner Arbeit über Liniengeometrie und metrische Geometrie auseinandergesetzt wird (ebenfalls in Bd. 5 der Annalen). Wie man von hier zur Kugelgeometrie kommt, wurde von Lie in den Göttinger Nachrichten von 1871 entwickelt. Es handelt sich um ein Verfahren, welches ich als Minimalprojection bezeichne, d. h. man zieht durch den Punkt des R_4 alle Minimalgeraden (alle Geraden von der Länge 0) und schneidet diese mit dem R_3.

Wichtig ist auch, dass man sich hinsichtlich der Gebilde, die durch Gleichungen zwischen den Coordinaten dargestellt werden sollen, bez. hinsichtlich dieser Gleichungen selbst keine zu weitgehende Beschränkung auferlegt. Ich betone von vorneherein, dass wir Gleichungen betrachten dürfen, welche mehrere Reihen von Coordinaten neben einander enthalten, dass insbesondere die Differentialgleichungen als solche Object der geometrischen Betrachtung sind.

2. Transformation.

Schon die Transformation der Punktcoordinaten gibt zu längeren Erörterungen Anlass.

Ich bespreche zunächst die Entwickelung der projectiven Geometrie, die Curven mit unendlich vielen linearen Transformationen in sich, die Theorie der projectiven Differentialinvarianten. Immerzu betone ich, dass die projective Geometrie nur eines der möglichen geometrischen Abbilder der linearen Invariantentheorie ist, dass also letztere weiter reicht als erstere.

Ich bespreche ferner die Imaginärtransformation, d. h. die Methode, imaginäre Punkte genau so in die Betrachtungen einzuführen, als ob

sie reell wären. Lie's Theorie der Minimalflächen gibt ein neues vorzügliches Beispiel für die Wirksamkeit dieser Methode.

Dann weiter die Projectionen aus höheren Räumen. Hier finden Maxwell's und Cremona's Untersuchungen zur graphischen Statik ihre gebührende Stellung.

Höhere Punkttransformationen der allgemeinsten Art kommen bei der Classification der Differentialausdrücke zur Geltung. Ich verweise auf die Differentialparameter Beltrami's und die Theorie der Biegungsinvarianten.

Birationale Punkttransformationen insbesondere sind für das Studium der algebraischen Gebilde fundamental. Clebsch stellte die Aufgabe, die genannten Transformationen im Gebiete der algebraischen Differentialgleichungen zur Geltung zu bringen. In dieser Richtung ist nur erst wenig gearbeitet, doch haben neuerdings die französischen Geometer eine Reihe bemerkenswerther Ansätze gefunden.

Sehr viel erweitert sich der Gesichtskreis, sobald Transformationen mit Wechsel des Raumelements in Betracht gezogen werden.

Hier ist die Stelle, wo ich die Lie'schen „Flächenelemente" einführe, um dann gleich zum allgemeinen Begriff der „Berührungstransformation" überzugehen. Die dualistischen Transformationen, die Transformationen der Kugelgeometrie etc. werden mit gebührender Ausführlichkeit besprochen. Daneben ziehe ich Beispiele heran, welche in scheinbar sehr heterogene Theile der Mathematik eingreifen: die astronomische Methode der Variation der Constanten und die kinematische Aufgabe der Construction von Zahnrädern. —

Ich möchte hier eine Bemerkung einfügen, welche in der Vorlesung nur angedeutet wurde. Man kann sich die Aufgabe stellen, alle in der Analysis vorkommenden Transformationen auf ihren geometrischen Gehalt zu prüfen. Man nehme folgende Formeln aus der Theorie der Fourier'schen Integrale:

$$\varphi(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(\alpha) \cdot \cos \alpha x \cdot d\alpha,$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \varphi(\alpha) \cdot \cos \alpha x \cdot d\alpha.$$

Was bedeutet die so zwischen f und φ festgelegte Reciprocitätsbeziehung geometrisch? Man denke sich die beiden Curven $y = \varphi(x)$ und $Y = f(x)$; welche geometrische Abhängigkeit findet zwischen ihnen statt? —

3. Gruppe.

Bei den Gruppen der Geometrie spielt die Unterscheidung der continuirlichen Gruppen und der discontinuirlichen selbstverständlich eine Hauptrolle. Die letzteren trennt man wieder in eigentliche discontinuirliche (bei denen die äquivalenten Elemente durch endliche Intervalle getrennt sind) und uneigentlich discontinuirliche (bei denen die äquivalenten Elemente „überall dicht“ liegen, die vielleicht sogar unendlich kleine Operationen enthalten). Es scheint fast, als würden die uneigentlich discontinuirlichen Gruppen nicht überall richtig verstanden oder doch nicht nach ihrer Wichtigkeit richtig gewürdigt. *Jede uneigentlich discontinuirliche Gruppe wird eigentlich discontinuirlich, wenn man in einen zweckmässig gewählten höheren Raum aufsteigt.* Dieses Princip ist vielleicht noch nicht so explicite formulirt worden, wie mit den vorstehenden Worten geschieht, aber kommt thatsächlich in den verschiedensten Theilen der Mathematik seit lange zur Geltung. Man nehme die unimodularen ganzzahligen Collineationen der Ebene. Dieselben bilden eine discontinuirliche Gruppe, welche sofort eigentlich discontinuirlich wird, wenn man die nulltheiligen Kegelschnitte der Ebene als Elemente einführt. Hiervon wissen die Zahlentheoretiker ihren Vortheil zu ziehen. Oder man betrachte die Umkehr der Abel'schen Integrale. Was ist der Kern des Jacobi'schen Umkehrproblems? Die vielfache Periodicität, welche das Integral besitzt, ergibt bei der Umkehr des einzelnen Integrals eine uneigentlich discontinuirliche Gruppe, die aber eigentlich discontinuirlich wird, sobald man eine hinreichend grosse Zahl zusammengehöriger Integrale neben einander betrachtet.

Des Weiteren bespreche ich in meiner Vorlesung die *Systematik*, welche sich für die Geometrie bei Zugrundelegung des Gruppenbegriffs ergibt. Ich brauche hierauf an gegenwärtiger Stelle um so weniger einzugehen, als ich mein Programm von 1872, in welchem ich diesen Grundgedanken entwickelte, in Bd. 43 der Annalen neuerdings habe abdrucken lassen.

Es folgt eine kurze Einleitung in die *Lie'sche Theorie der continuirlichen Transformationsgruppen*, bei der ich bemüht war, überall die geometrische Auffassung zur Geltung zu bringen. Ich nehme dabei insbesondere Gelegenheit, die neuen Untersuchungen von Lie über das Helmholtz'sche Raumproblem darzulegen. Ich bin hierauf um so ausführlicher eingegangen, als mir daran lag, die bez. Entwickelungen meines oben genannten Nicht-Euklidischen Heftes zu berichtigen, bez. zu vervollständigen. Ich erkläre auch ausführlich meine Bemerkungen über die Monodromie des Raumes in Bd. 37 der Annalen, pag. 565. „Ich sehe diese meine Betrachtungen nur mehr

als ein Aperçu an, durch welches deutlich wird, dass hier zwischen 2 und 3 Dimensionen ein Unterschied besteht, durch welches aber die eingehenden Lie'schen Untersuchungen keineswegs überflüssig gemacht werden." —

Dann weiter die *discontinuirlichen Gruppen.* [Sei hier nur angegeben, dass ich den Gegenstand möglichst vielseitig zu fassen suche, indem beispielsweise ebensowohl auf die Untersuchungen der Krystallographen Rücksicht genommen wird wie auf die hierher gehörigen Untersuchungen der Arithmetiker und Functionentheoretiker.

Noch eine besondere Fragestellung habe ich berührt, welche in die Theorie der continuirlichen wie der discontinuirlichen Gruppen gleichförmig eingreift. Ich meine die Classification der linearen Differentialgleichungen nach den Principien der Herren Picard und Vessiot. Indem ich die grosse Wichtigkeit der Sache hervorhebe, kritisire ich gleichzeitig die Darstellung von Vessiot, die in einem wesentlichen Punkte unzureichend scheint. —

Ich schliesse meine Vorlesung mit dem Plücker'schen Citate (1830; Vorrede zum zweiten Bande der analytisch-geometrischen Entwickelungen): „Man kann das Verhältniss der Geometrie zur Analysis aus verschiedenen Gesichtspunkten betrachten. Ich möchte mich zu der Ansicht bekennen, dass die Analysis eine Wissenschaft ist, die unabhängig von jeder Anwendung selbständig für sich allein dasteht, und die Geometrie, wie von einer anderen Seite die Mechanik, bloss als bildliche Darstellung gewisser Beziehungen aus dem grossen erhabenen Ganzen erscheint."

III. Die hypergeometrische Function.

Die hypergeometrische Function ist im Vergleich zu den elliptischen Functionen, denen sie an Wichtigkeit gleich steht, in den Lehrbüchern bislang auffallend vernachlässigt worden. Zudem sind die Darstellungen, die ich kenne, fast nur auf den äusseren Aufbau der Formeln gerichtet. Die grossen Gedanken, welche Riemann in die Theorie eingeführt hat, scheinen im Bewusstsein der heutigen Generation, trotzdem sie die Grundlage aller weiteren Entwickelung bilden, vielfach bei Seite geschoben und verkümmert.

Wir haben zunächst Riemann's Abhandlung von 1857. Der Zielpunkt ist hier, das Wesen der hypergeometrischen Function aus ihrem Verhalten bei Umkreisung der singulären Punkte zu verstehen. Die aus derselben Zeit stammenden Fragmente, welche in den gesammelten Werken unter Nr. XXI abgedruckt sind, belehren uns, wie Riemann im gleichen Sinne eine allgemeine Theorie der linearen Differentialgleichungen n^{ter} Ordnung zu schaffen beabsichtigte. Auch hier sollte

die Gruppe der linearen Substitutionen, welche irgend n linear unabhängige Lösungen bei Durchlaufung geschlossener Wege erfahren, voranstehen. — Mit diesem Ansatze verbindet sich dann, was speciell die linearen Differentialgleichungen *zweiter* Ordnung angeht, eine geometrische Methode. Dieselbe betrachtet die conforme Abbildung, welche der Quotient zweier Particularlösungen der Gleichung (insbesondere also der Quotient zweier Zweige der hypergeometrischen Function) von der Ebene der unabhängigen Variabelen entwirft. Leider besitzen wir hierüber von Riemann selbst nur zerstreute Notizen (man vergl. die Abhandlung über die Minimalflächen sowie verschiedene andere Theile des Nachlasses). Es ist das grosse Verdienst von Schwarz, in seiner Abhandlung in Bd. 75 des Journals, 1872, den Gegenstand zum ersten Male wenigstens nach bestimmten Richtungen zur Geltung gebracht zu haben. Daran schliesst sich die lange Reihe der neueren Arbeiten über die Polyederfunctionen, die elliptischen Modulfunctionen und die allgemeinen eindeutigen automorphen Functionen. Aber hiermit ist die Tragweite der Methode noch nicht erschöpft. Ich darf wegen weitergehender Entwickelungen auf meine Arbeiten in Band 37 und 40 der Annalen, sowie auf die eben nun in Band 44 publicirten Untersuchungen des Hrn. Schilling verweisen. —

Diesen ganzen Complex von Auffassungen und Methoden in einer dem heutigen Stande der Theorie entsprechenden Form zunächst an dem Beispiel der hypergeometrischen Function darzulegen, ist das Ziel meiner Vorlesung gewesen. Ich hoffe, im kommenden Semester eine allgemeine Theorie der linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung zur Darstellung zu bringen, bei der die gleichen Momente zur Geltung kommen sollen. —

Meine Vorlesung spaltet sich dem Gesagten zufolge in zwei Theile.

Theil I gibt eine Uebersicht über die ältere analytische Theorie, bis zu Riemann's Arbeit 1857 inclusive. Ich bespreche dabei insbesondere auch die Definition durch bestimmte Integrale, wobei die Idee des *Doppelumlaufs* in den Vordergrund gestellt wird. Auch führe ich hier die homogenen Formulirungen ein, von denen in Band 38 dieser Annalen die Rede ist, und die ich weiterhin immer wieder gebrauche.

Theil II ist dann ausschliesslich der geometrischen Theorie gewidmet, wobei ich mich fortgesetzt auf die soeben genannte Schilling'sche Arbeit beziehen darf.

Es handelt sich zunächst um einen Excurs über *sphärische Trigonometrie.*

Die allgemeinen Grundlagen der sphärischen Trigonometrie sind dem eindringenden analytischen Verständnisse neuerdings von Hrn. Study

in besonders durchsichtiger Weise zugänglich gemacht worden.*) Hr. Study hält dabei, was die geometrischen Figuren angeht, an der Annahme reeller Winkel und Seiten fest. Dagegen hat Schilling eine einfache Figur construirt, die der Annahme beliebig complexer Elemente entspricht. Ich zeige, wie man von den analytischen Formeln aus mit Nothwendigkeit zu der Schilling'schen Figur gelangt. Ich wende mich sodann zu meinen Entwickelungen von Bd. 37. Der Dreiecksbegriff, den ich dort benutze, unterscheidet sich von dem Study'schen dadurch, dass ich dem Dreieck nicht nur Ecken und Seiten, sondern auch eine Fläche beilege (die wie eine „Membran" in die Seiten eingespannt ist). Indem ich diese Fläche in jedem Falle wirklich construire, erhalte ich jene Relationen zwischen den absoluten Beträgen der Winkel $\lambda\pi$, $\mu\pi$, $\nu\pi$ und Seiten $l\pi$, $m\pi$, $n\pi$, welche ich als die *Ergänzungsrelationen* der sphärischen Trigonometrie bezeichne:

$$E\left(\frac{l}{2}\right) = E\left(\frac{\lambda-\mu-\nu+1}{2}\right), \text{ etc.}$$

Die Winkelzahlen λ, μ, ν sind hier wieder zunächst als reell gedacht; hoffentlich führt Hr. Schilling den Gegenstand auch für den Fall complexer λ, μ, ν bald zum glücklichen Abschluss. — Noch darf ich hervorheben, dass ich bei meinen Entwickelungen die „verwandten" sphärischen Dreiecke, d. h. diejenigen, welche zu demselben Dreikant gehören, immer gleichzeitig betrachte. Verwandte Dreiecke sind Gegenbilder verwandter, d. h. gleichgruppiger hypergeometrischer Functionen. Die Figuren zeigen, dass die Theorie dieser verwandten Functionen bisher noch nicht hinreichend in's Einzelne durchgebildet wurde. —

An diese geometrischen Entwickelungen schliesst sich eine längere Reihe von Folgerungen betr. die hypergeometrische Function. Da ist zunächst die Bestimmung der Zahl der reellen Nullstellen der hypergeometrischen Reihe zwischen $x = 0$ und $x = 1$, wie ich dies schon in Band 37 ausführte. Ich schliesse daran u. a. Theoreme über die Nullstellen derjenigen Determinanten, die sich aus entsprechenden Zweigen zweier verwandter hypergeometrischer Functionen zusammensetzen lassen. Ich untersuche ferner (im Anschlusse an die Abhandlung von Schwarz, doch über dieselbe mannigfach hinausgehend), wann sich die hypergeometrische Function auf niedere Functionen reduciren lässt. Es ergibt sich eine volle Liste der rationalen Fälle, der algebraischen Fälle sowie derjenigen, die sich durch unbestimmte Integrale multiplicativer Functionen ausdrücken lassen. Hiermit ist, für die

*) Nr. 2 des 20ten Bandes der math.-phys. Abhandlungen der sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften, Leipzig, 1893.

hypergeometrische Function, die von Picard und Vessiot vorgeschlagene Classification im Princip durchgeführt und alle die früher von Markoff u. A. aufgezählten speciellen Fälle finden ihre systematische Stellung. — Ich wende mich endlich zu der Frage der eindeutigen Darstellung, wobei der Satz, den ich in Bd. 14 der Annalen (1878) gab, dass sich alle hypergeometrischen Functionen durch eindeutige Functionen des elliptischen Periodenverhältnisses darstellen lassen, den naturgemässen Abschluss bildet. — Was die Herstellung von Formeln betrifft, so beschränke ich mich bei allen diesen Entwickelungen auf ein blosses Referat, verweise aber insbesondere auf die Dissertation von O. Fischer (Leipzig 1885), weil ich der Meinung bin, dass die Methoden, mit denen dort die zum Ikosaeder gehörigen hypergeometrischen Functionen behandelt werden, in richtiger Weise aufgefasst allgemeine Bedeutung haben möchten.

Göttingen, im März 1894.

Allgemeine Anzahlfunctionen für Kegelschnitte, Flächen und Räume zweiten Grades in n Dimensionen.

Von

H. Schubert in Hamburg.

An der Spitze meines „Calcüls der abzählenden Geometrie" (Leipzig 1879) habe ich die Aufgaben dieses Forschungsgebietes dahin formulirt, dass sie die Zahlen x zu bestimmen suchen, welche angeben, wieviel geometrische Gebilde Γ gegebener Definition gewisse gegebene Bedingungen $Z_1, Z_2, \ldots$ erfüllen. Bei der Lösung solcher Aufgaben hat man sich bisher die Zahlen $z_1, z_2, \ldots$, welche angeben, *wie oft* jede der Bedingungen $Z_1, Z_2, \ldots$ erfüllt werden soll, fast immer als bestimmte, nicht als allgemeine, Zahlen gedacht. Ein namentlich für die algebraische Deutung der Resultate der abzählenden Geometrie wesentlicher Fortschritt besteht nun darin, dass *man immer x als Function der allgemein gedachten Zahlen $z_1, z_2, \ldots$ darzustellen sucht.* Dabei erscheint es zweckmässig, auch die Dimension des Raums, in dem man sich das Gebilde Γ liegend denkt, allgemein gleich n zu setzen, wobei $Z_1, Z_2, \ldots$ so zu verallgemeinern sind, dass sie für $n = 3$ (oder $n = 2$) die uns geläufigen Bedingungen ergeben. Denn nur durch ein allgemein gehaltenes n kann die Art und Weise hervortreten, wie unsere Raumdimension 3 in den bestimmten Zahlen der abzählenden Geometrie enthalten ist. So ist bekannt, dass es in fester Ebene ($n=2$) 1 Kegelschnitt giebt, der fünf gegebene Strahlen berührt, dass es in unserm dreidimensionalen Raume ($n = 3$) 4 Kegelschnitte giebt, die acht gegebene Ebenen berühren, dass es in einem vierdimensionalen linearen Raume ($n = 4$) 20 Kegelschnitte giebt, die elf dreidimensionale Räume berühren, und dass die nun für $n = 5$ folgende Zahl 112 beträgt. Das Gesetz, das diese Zahlen 1, 4, 20, 112 befolgen, kann nun aus den zugehörigen Werthen von n, nämlich 2, 3, 4, 5 gewiss nicht errathen werden. Wohl aber erkennt man dieses Gesetz aus den im Folgenden abgeleiteten allgemeinen Formeln, aus denen (Beisp. 4 in § 7) hervorgeht, dass in einem n-dimensionalen linearen

Raume $\frac{2^{n-1}\,.\,(2n-3)!}{n!\,(n-2)!}$ Kegelschnitte vorhanden sein müssen, die $3n-1$ gegebene $(n-1)$-dimensionale Räume berühren.

Für den Strahl, die Ebene und überhaupt *lineare* Räume beliebiger Dimension habe ich schon die fundamentalsten der sich darbietenden Probleme in dem soeben erörterten allgemeineren Sinne erledigt.*) Für Kegelschnitte habe ich in der Festschrift**) der Hamb. Math. Ges. die Berechnung begonnen, aber noch nicht zu einer befriedigenden Hauptformel geführt. Endlich habe ich in Band III der Mittheil. der Hamb. Math. Ges. (S. 12 bis 20) eine vorläufige Mittheilung veröffentlicht, die u. a. die Hauptformeln einerseits für Kegelschnitte andrerseits für Paare von projectiven und von correlativen Grundgebilden enthält.***)

Im Folgenden werde ich nun allgemeine Anzahlformeln nicht allein für Kegelschnitte, sondern auch für Flächen und überhaupt Punkträume *zweiten Grades* beliebiger Dimension ableiten, also Formeln ableiten, die durch Specialisirung die früher von Chasles, Zeuthen und mir berechneten bestimmten Anzahlen ergeben müssen.

§ 1.

Bezeichnungen für lineare Räume.

Für lineare Räume und die ihnen auflegbaren charakteristischen†) Bedingungen behalte ich die kurzen Bezeichnungen bei, die ich in allen meinen schon 1884 beginnenden Publicationen über n-dimensionale abzählende Geometrie angewendet habe. Danach bedeutet eine für sich stehende eckige Klammer, in der sich eine Zahl oder ein eine Zahl darstellender Ausdruck befindet, einen *linearen Raum*, dessen Dimension gleich dieser Zahl ist, sodass also [0] einen Punkt, [1] einen Strahl, [2] eine Ebene u. s. w. bedeutet. Den Buchstaben n reserviren wir für die Dimension des linearen Raumes, in dem wir uns alle vorkommenden Gebilde liegend denken, sodass also die Dimensionen der betrachteten Punktgebilde nie grösser als n sein können. Alle charakte-

---

*) Vgl. meine Abh. über „die n-dimensionalen Verallgemeinerungen der fundamentalen Anzahlen unseres Raumes“ im 26. Bande der Math. Ann., sowie meine Abh. über „Anzahlbestimmungen für lineare Räume beliebiger Dimension“ im 8ten Bande der Acta Math.

**) Festschrift anlässlich der 200jährigen Jubelfeier der Math. Gesellschaft in Hamburg, zugleich Band II der Mittheil., S. 172 u. f.

***) Seitdem habe ich die Untersuchung weitergeführt, ohne indess etwas davon zu veröffentlichen, abgesehen von einer kleinen Mittheilung, die ich in der deutschen Mathematikerversammlung von 1891 machte. (Vgl. die „Berichte“).

†) Der Ausdruck „charakteristisch“ wird am Schluss dieses Paragraphen gerechtfertigt.

ristischen Bedingungen, welche sich einem $[p]$ auferlegen lassen, fassen wir durch das eine Symbol

$$(a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots a_p)$$

zusammen, wo die $a_0, a_1, a_2, \ldots a_p$ ganze Zahlen sind, die der Bedingung

$$0 \overline{\overline{<}} a_0 < a_1 < a_2 \cdots < a_p \overline{\overline{<}} n$$

gehorchen. Um dieses Symbol $(a_0, a_1, a_2, \ldots a_p)$ zu definiren, denken wir uns $p+1$ lineare Räume $[a_0], [a_1], [a_2], \ldots [a_p]$ derartig gegeben, *dass immer* $[a_i]$ *in* $[a_{i+1}]$ *liegt*. Wenn man dann verlangt, dass der $[p]$ mit dem $[a_0]$ einen Punkt, mit dem $[a_1]$ einen Strahl und überhaupt mit dem $[a_i]$ einen $[i]$ gemein hat, so legt man dadurch dem $[p]$ die Bedingung $(a_0, a_1, a_2, \ldots a_p]$ auf. Beispielsweise bedeutet in unserm vorstellbaren [3] das Symbol (02) eine einem Strahle auferlegte Bedingung, und zwar die, welche verlangt, dass der Strahl durch einen gegebenen Punkt geht und dabei in einer durch diesèn Punkt gehenden Ebene liegt, d. h. einem gegebenen Strahlbüschel angehört. Ferner bedeutet das Symbol $(0, n-1, n)$, dass eine Ebene durch einen gegebenen Punkt gehen soll, endlich (0, 1, 7, 9), dass ein [3] in einem [9] liegen, mit einem in dem [9] liegenden [7] eine Ebene gemeinsam haben soll, und dabei noch durch einen in dem [7] liegenden Strahl gehen soll. Man erkennt leicht, dass einem $[p]$ sich $[n+1]_{p+1}$*) solcher charakteristischen Bedingungen auferlegen lassen, und dass die Vielfachheit der Bedingung $(a_0, a_1, a_2, \ldots a_p)$ gleich

$$(p+1)\cdot n - \tfrac{1}{2}p(p+1) - (a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_p)$$

ist. Jedem $[p]$ gehört also nur eine einzige *einfache* charakteristische Bedingung zu, nämlich die Bedingung

$$(n-p-1,\ n-p+1,\ n-p+2, \ldots, n-1,\ n),$$

welche ausspricht, dass der $[p]$ einen gegebenen $[n-p-1]$ einpunktig treffen (schneiden) soll. Hieraus geht hervor, dass es eine endliche Anzahl von $[p]$ geben muss, von denen jeder die Bedingung

$$(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_p)$$

erfüllt und ausserdem

$$a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_p - \tfrac{1}{2}p(p+1)$$

gegebene lineare Räume, sämmtlich von der Dimension $n-p-1$, zu schneiden vermag. Diese endliche Anzahl habe ich in den Acta Mathem. (1886, S. 117) abgeleitet. Sie ist gleich

---

*) Die Bezeichnung d_e (gelesen: d tief e) bezeichnet immer den Binomialcoefficienten, der gleich $\frac{d!}{e!\,(d-e)!}$ ist.

$$\frac{\left(a_0+a_1+a_2+\cdots+a_p-\frac{1}{2}p\cdot\overline{p+1}\right)!\,D}{a_0!\,a_1!\,a_2!\ldots a_p!},$$

wo D die bekannte Determinante ist, die gleich dem Product aller möglichen positiven Differenzen je zweier der Zahlen $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_p$ ist.

„*Charakteristisch*" habe ich die durch das Symbol $(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_p)$ dargestellten Bedingungen genannt, weil dieselben das *Charakteristikenproblem* für lineare Räume lösen, wie ich in den „Mittheil. der Hamb. Math. Ges." vom Februar 1886 gezeigt habe. Sind nämlich zwei von einem $[p]$ erzeugte, aber von einander unabhängige, algebraische Systeme S und S' gegeben, und ist die Stufensumme beider Systeme gleich $(p+1)(n-p)$, so haben beide Systeme eine endliche Anzahl x von $[p]$ gemeinsam. Ist ganz speciell $p=0$, $n=3$, so ist das eine System eine Raumcurve, das andere eine Fläche, und x ist bekanntlich das Product der beiden Zahlen, welche angeben, wieviel Punkte des einen Systems auf einer gegebenen Ebene liegen, bezw. wieviel Punkte des anderen Systems auf einem gegebenen Strahle liegen. Ist nun aber p und n ganz allgemein, so tritt an die Stelle dieses Bezout'schen Satzes die folgende Verallgemeinerung:

$$x=\sum(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_p)\,.\,(n-a_p, n-a_{p-1}, \ldots, n-a_1, n-a_0)',$$

wo die Summe von Producten auf *alle möglichen* Zahlengruppen $a_0, a_1, \ldots, a_p$ sich erstreckt, wo jedes Symbol $(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_p)$ jetzt nicht die so dargestellte Bedingung selbst, sondern die *Anzahl* derjenigen $[p]$ bedeutet, welche, dem Systeme S angehörig, diese Bedingung erfüllen und wo

$$(n-a_p, n-a_{p-1}, \ldots, n-a_1, n-a_0)'$$

die analoge Bedeutung für S' hat. Beispiel: $n=4$, $p=2$, beide Systeme dreistufig. Dann ergiebt obige Formel:

$$x=(0,2,4)\,.\,(0,2,4)'+(1,2,3)\,.\,(1,2,3)',$$

d. h.: In einem vierdimensionalen linearen Raume schneiden sich zwei dreistufige Systeme von Ebenen in $a\,.\,a'+b\,.\,b'$ Ebenen, wo a angiebt, wieviel Ebenen des einen Systems aus einem gegebenen Strahlbüschel einen Strahl auszuschneiden vermögen, wo b angiebt, wieviel Ebenen desselben Systems in einem gegebenen dreidimensionalen linearen Raume liegen, und wo a' und b' die analogen Zahlen für das andere System bedeuten.

§ 2.

Bezeichnungen für Räume zweiten Grades. Ziel der Untersuchung.

So wie ein Kegelschnitt die Ebene bestimmt, in der er liegt, so bestimmt ein in dem zu Grunde gelegten $[n]$ enthaltener $(p-1)$-*dimensionaler Raum zweiten Grades* den $[p]$, in dem er ganz drin liegt. Demgemäss soll ein solcher $(p-1)$-dimensionaler Raum zweiten Grades immer mit R_p bezeichnet werden, sodass also z. B. R_3 eine Fläche zweiten Grades, R_2 einen Kegelschnitt, R_1 ein Punktepaar bezeichnet. Jeder $[n+1-p]$ des $[n]$ schneidet jeden R_p in zwei reellen oder imaginären Punkten; denn er schneidet den $[p]$ des R_p in einem Strahle, und dieser den R_p in zwei Punkten. Ebenso schneidet jeder $[n+2-p]$ des $[n]$ den R_p in einem Kegelschnitt, und überhaupt jeder $[n+q-p]$ den R_p in einem R_q. Was die Elemente anbetrifft, welche einen R_p constituiren, so erkennt man ohne Weiteres, dass derselbe aus ∞^{p-1} Punkten besteht und dass er von ∞^{2p-3} Tangenten, ∞^{3p-7} Tangentialebenen und überhaupt von $\infty^{(q+1)(p-q)-1}$ q-dimensionalen linearen Räumen berührt wird, und zwar so, dass den R_p in *jedem* Punkte ∞^{p-2} Tangenten, $\infty^{2(p-3)}$ Tangentialebenen und überhaupt $\infty^{q(p-q-1)}$ q-dimensionale lineare Räume tangiren. Indem der R_p einen solchen $[q]$ berührt, erfüllt er immer eine einfache Bedingung, wie gross auch q sein mag; nur muss der $[q]$ als in dem $[p]$ des R_p liegend gedacht sein. Desshalb erfüllt der R_p auch dann eine einfache Bedingung, wenn ein gegebener, beliebig im $[n]$ liegender $[n+q-p]$ den $[p]$ in einem $[q]$ schneidet, der den R_p zu berühren vermag. Auch in diesem Falle werden wir sagen können, dass der R_p den $[n+q-p]$ „berührt", mit demselben Rechte, wie wir von einem in unserm Raume liegenden Kegelschnitt sagen, dass er eine Ebene berührt, wenn wir meinen, dass er den Strahl zur Tangente hat, in dem diese Ebene die Kegelschnittebene schneidet. Hiernach können wir dem R_p p einfache Lagebedingungen auferlegen, nämlich *jede Bedingung* μ_i, *welche verlangt, dass der* R_p *einen im* $[n]$ *beliebig gegebenen* $[n-i]$ *berührt, wo der Buchstabe i eine beliebige der Zahlen von* 1 *bis* p *bedeutet*. Für $n=2$, $p=2$, also den Kegelschnitt in fester Ebene, bedeutet hiernach μ_1 die Bedingung, einen Strahl zu berühren, μ_2 die Bedingung, durch einen Punkt zu gehen; und für $n=3$, $p=2$, also den Kegelschnitt im Raume, bedeutet μ_1 die Bedingung, eine Ebene zu berühren, μ_2 die Bedingung, einen Strahl zu schneiden. Für $n=3$, $p=3$, also für die in einem festen $[3]$, etwa im vorstellbaren Raume, liegende Fläche zweiten Grades bedeuten μ_1, μ_2, μ_3 beziehungsweise die Bedingungen, eine Ebene zu berühren, einen Strahl zu berühren,

durch einen Punkt hindurchzugehen. Hieraus ersieht man, dass die für den R_p eingeführten Bedingungen

$$\mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots, \mu_p$$

die *Verallgemeinerungen* der Bedingungen sind, auf welche sich die Anzahlberechnungen beziehen, die von Chasles 1867 für den Kegelschnitt, von Herrn Zeuthen und dem Verfasser 1870 für die Fläche zweiten Grades ausgeführt sind. Ausser den p Bedingungen μ_i legen wir dem R_p noch die Bedingung

$$(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_p)$$

auf, welche verlangen soll, dass der $[p]$, in welchem der R_p ganz liegt, die in § 1 ebenso genannte, dort definirte und näher besprochene Bedingung erfüllt. Soll der $[p]$, in dem der R_p enthalten ist, als fest gedacht sein, so ist jedes $a_i = i$ zu setzen. Das Extrem nach der andern Seite ist die Bedingung, dass der $[p]$ des R_p ganz frei im $[n]$ liegen, also an gar keine Lagebedingung gebunden sein soll. In diesem Fall ist $a_i = n - p + i$ zu setzen.

Die Zahl, welche angiebt, *wievielmal* die Bedingung μ_i gegeben sein soll, heisse immer m_i. Damit es eine endliche Anzahl von R_p giebt, welche die Bedingung

$$(a_0 a_1 \ldots a_p)\, \mu_1^{m_1} \mu_2^{m_2} \mu_3^{m_3} \ldots \mu_p^{m_p}$$

erfüllen, muss

$$(1) \qquad m_1 + m_2 + \cdots + m_p = a_0 + a_1 + \cdots + a_p + p$$

sein, denn die Constantenzahl des R_p ist gleich der Summe

$$(p+1)(n-p) + \tfrac{1}{2} p(p+3),$$

und die Vielfachheit der Bedingung $(a_0 a_1 \ldots a_p)$ ist gleich

$$(p+1)n - \tfrac{1}{2} p(p+1) - (a_0 + a_1 + \cdots + a_p),$$

woraus die rechte Seite von (1) durch Subtraction folgt. Beispielsweise ist für den in einem [3] liegenden Kegelschnitt, dessen Ebene gar keine Lagebedingung zu erfüllen braucht, $p = 2$, $a_0 = 1$, $a_1 = 2$, $a_2 = 3$ zu setzen, wodurch aus Formel (1) $m_1 + m_2 = 8$ folgt, wie bekannt ist. Ebenso ergiebt sich die Constantenzahl 9 der Fläche zweiten Grades im festen [3] aus Formel (1) für $p = 3$, $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$.

„*Elementar*" soll jede auf den R_p bezügliche Anzahl heissen, welche angiebt, wieviel R_p irgend eine der in dem Symbol

$$(a_0 a_1 \ldots a_p)\, \mu_1^{m_1} \mu_2^{m_2} \ldots \mu_p^{m_p}$$

steckenden Bedingungen erfüllen, wo die $p+1$ Zahlen a und die p Zahlen m der Relation (1) genügen müssen.

Im Folgenden werden nun alle Hilfsmittel entwickelt, welche dazu dienen, Anzahlfunctionen aufzufinden, die jede auf den R_p bezügliche elementare Anzahl durch die allgemein gelassenen Buchstaben a und m ausdrücken.

Vollständig angeschrieben und bewiesen sind diese Functionen in § 7 für $m_2 = m_3 = \cdots = m_p = 0$, in § 8 für $m_3 = m_4 = \cdots = m_p = 0$, in § 9 für $m_4 = m_5 = \cdots = m_p = 0$.

Die Anzahlen $(0123)\,\mu_1^{m_1}\mu_2^{m_2}\mu_3^{m_3}$ für die Fläche zweiten Grades lassen sich bekanntlich aus den Anzahlen berechnen, welche sich auf diejenigen *Ausartungen* derselben beziehen, deren Constantenzahl um 1 kleiner ist, also auf den Kegelschnitt, den Kegel und das Gebilde, das aus zwei Ebenen besteht, auf deren Schnittstrahl zwei ausgezeichnete Punkte liegen. Ebenso folgen die Anzahlen

$$(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_p)\,\mu_1^{m_1}\mu_2^{m_2}\ldots\mu_p^{m_p}$$

für den R_p aus den Anzahlen, welche sich auf diejenigen Ausartungen des R_p beziehen, deren Constantenzahl nur um 1 kleiner ist, als die des R_p. *Die Gestaltung dieser Ausartungen kann man auf folgende Weise erkennen.* Innerhalb jedes linearen Raums $[q]$ gilt das Princip der Dualität, indem z. B. immer einem $[v]$ ein $[q-1-v]$ dual entspricht. Wendet man nun dieses Princip auf einen R_p innerhalb des $[p]$ an, in dem der R_p liegt, so erhält man wiederum einen R_p. Wenn man es aber innerhalb des zu Grunde gelegten $[n]$ auf einen R_q anwendet, wo $q < n$ ist, so gelangt man zu einem neuen Gebilde, das wir S_q nennen wollen. Ein Beispiel bietet in unserm vorstellbaren [3] der Kegelschnitt. Das ihm innerhalb seiner Ebene dual entsprechende Gebilde ist wiederum ein Kegelschnitt; aber das ihm im [3] dual entsprechende Gebilde ist anders gestaltet, nämlich ein Kegel zweiten Grades. Während ein R_q ganz in einem $[q]$ liegt, geht ein S_q von einem $[p-1-q]$ aus, der ganz in dem S_q liegt, wobei S_q als innerhalb eines $[p]$ dem R_q dual entsprechend angesehen ist. Hiernach können wir die p Ausartungen eines R_p:

$$\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{p-1},$$

folgendermassen definiren: *Die Ausartung φ_i besteht aus einem $[p-i-1]$, von welchem ein S_i ausgeht, und in welchem ein R_{p-i-1} liegt.* Dabei ist R_0 und S_0 als gar nicht vorhanden anzusehen, nur dass in diesen Fällen der [0], in welchem der R_0 liegen soll, bezw. der $[p-1]$, von welchem der S_0 ausgehen soll, doppelt zu rechnen sind. Hiernach besteht z. B.:

die Ausartung φ_0 aus einem R_{p-1}, der in einem doppelt zu denkenden $[p-1]$ liegt;

die Ausartung φ_1 aus einem R_{p-2}, von dessen $[p-2)$ zwei $[p-1]$ ausgehen;

die Ausartung φ_2 aus einem $[p-3]$, in welchem ein R_{p-3} liegt, und von dem ein S_2 ausgeht;

die Ausartung φ_{p-1} aus einem doppelt zu denkenden Punkte, von dem ein S_{p-1} ausgeht.

Dass jede dieser p Ausartungen φ_i eine um 1 kleinere Constantenzahl, als der allgemeine R_p hat, lässt sich in folgender Weise erkennen. Bei R_p kommt zu der Constantenzahl $(p+1)(n-p)$ des $[p]$, in dem R_p liegt, noch $\frac{1}{2}p(p+3)$ hinzu. Folglich muss nachgewiesen werden, dass bei φ_i $\frac{1}{2}p^2+\frac{3}{2}p-1$ hinzukommt. Der $[p-i-1]$ des Gebildes φ_i hat die Constantenzahl $(p-i)(i+1)$, und der darin liegende R_{p-i-1} $\frac{1}{2}(p-i-1)(p-i+2)$. Ferner muss das, was bei S_i nach Festlegung des $[p-i-1]$, von dem S_i ausgeht, noch zur Constantenzahl hinzukommt, gleich dem sein, was bei R_i, seinem dualen Analogon, nach Festlegung des $[i]$, in dem R_i liegt, noch hinzukommt; dies ist aber $\frac{1}{2}i(i+3)$. Wir erhalten also für die Constantenzahl der Ausartung φ_i die Summe:

$$(p-i)(i+1)+\frac{1}{2}(p-i-1)(p-i+2)+\frac{1}{2}i(i+3)=\frac{1}{2}p^2+\frac{3}{2}p-1,$$

also in der That 1 weniger als die Constantenzahl des R_p selbst.

Es muss noch gesagt werden, was auf jeder der p Ausartungen φ_i als Punkt, als Tangente und überhaupt als q-dimensionaler Berührungsraum anzusehen ist. Dies ist sehr einfach. Ist $q<i$, so sind als den φ_i berührend alle $[q]$ anzusehen, welche den S_i des φ_i berühren. Ist ferner $q>i$, so sind als den φ_i berührend alle $[q]$ anzusehen, welche den R_{p-1-i} des φ_i berühren. Ist endlich $q=i$, so sind als den φ_i berührend alle $[q]$ anzusehen, welche mit dem $[p-1-i]$ des φ_i einen Punkt gemeinsam haben, und zwar jeder $[q]$ doppelt gerechnet. Ist $q=0$, so ist der Ausdruck „berühren" ungebräuchlich. Man muss dann sagen, dass für $i>0$ als Punkt des φ_i jeder Punkt anzusehen ist, der auf dem S_i des φ_i *liegt*, und dass für $i=0$ als Punkt des φ_0 jeder Punkt betrachtet werden muss, der auf dem $[p-1]$ des φ_0 *liegt*. Doch wollen wir, der Kürze wegen, auch von einem Punkte sagen, dass er ein Gebilde „berührt", wenn er auf demselben liegt. Aus dem Gesagten geht hervor, dass, wenn ein φ_i einen im $[n]$ beliebig gegebenen $[v]$ berühren soll, der $[v+p-n]$, in welchem der $[v]$ den $[p]$ des φ_i schneidet, entweder mit dem $[p-1-i]$ des φ_i einen Punkt gemeinsam haben muss, oder den S_i des φ_i berühren muss oder endlich den R_{p-1-i} des φ_i berühren muss, je nachdem nämlich $v+p-n$ gleich, kleiner oder grösser als i ist. Hieraus folgt aber, wie jede

Ausartung φ_i jede der oben eingeführten Bedingungen μ_k zu erfüllen vermag, nämlich:

1) *φ_i erfüllt μ_{p-i}, indem der durch μ_{p-i} gegebene $[n-p+i]$ mit dem $[p-i-1]$ des φ_i einen Punkt gemein hat;*

2) *φ_i erfüllt μ_w, wo $i > p - w$ ist, indem der durch μ_w gegebene $[n-w]$ den S_i des φ_i berührt;*

3) *φ_i erfüllt μ_w, wo $i < p - w$ ist, indem der durch μ_w gegebene $[n-w]$ den R_{p-i-1} des φ_i berührt.*

Im Anfang dieses Paragraphen war besprochen, dass jeder R_p von $\infty^{(q+1)(p-q)-1}$ q-dimensionalen linearen Räumen berührt wird.

Da jede der p Ausartungen φ_i ein specialisirter R_p ist, so muss auch jedes φ_i von $\infty^{(q+1)(p-q)-1}$ q-dimensionalen linearen Räumen berührt werden. Es wird genügen, wenn wir dies für $q > i$ noch besonders nachweisen. In diesem Falle muss der R_{p-1-i} des φ_i die Rolle des Berührens übernehmen. Der $[q]$ berührt die Ausartung φ_i nämlich dadurch, dass der $[q-1-i]$, in welchem der $[q]$ den $[p-1-i]$ der φ_i schneidet, ein Berührungsraum des φ_i angehörigen R_{p-1-i} wird. Die Stufe des Systems der $(q-1-i)$-dimensionalen Berührungsräume eines R_{p-1-i} ergiebt sich aber aus $(p+1)(p-q)-1$, wenn man $q-1-i$ statt q und $p-1-i$ statt p setzt, wodurch wir $(q-i)(p-q)-1$ erhalten. Nun gehen aber von jedem $[q-1-i]$, welcher den R_{p-1-i} berührt, ein ganzes System von $[q]$ aus, nämlich soviel, wie die Bedingung

$$(0, 1, 2, \ldots, q-1-i, p-i, p-i+1, \ldots, p-1, p)$$

erfüllen. Um die Stufe des Systems aller $[q]$, welche diese Bedingung erfüllen, zu finden, beachten wir, dass das System aller $[q]$, welche $(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_q)$ erfüllen, die Stufe

$$a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_q - \frac{1}{2} q (q+1)$$

hat. Wendet man dies auf die Bedingung

$$(0, 1, 2, \ldots, q-1-i, p-i, p-i+1, \ldots, p-1, p)$$

an, so ergiebt sich $(p-q)(i+1)$. Folglich erhalten wir als die Stufe des Systems der die Ausartung φ_i berührenden $[q]$ die Summe

$$(q-i)(p-q) - 1 + (p-q)(i+1)$$

oder

$$(q+1)(p-q) - 1,$$

d. h. dieselbe Zahl, wie beim allgemeinen R_p.

Da wir im Folgenden vorzugsweise mit der Ausartung φ_0 zu thun haben werden, so specialisiren wir noch die obigen Angaben darüber, wie φ_i die Bedingung μ_w erfüllt, für $i = 0$. Es ergiebt sich, dass φ_0 jede der Bedingungen $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{p-1}$ erfüllt, indem sein R_{p-1} die ebenso genannten Bedingungen erfüllt, und dass φ_0 μ_p erfüllt, indem

sein $[p-1]$ mit dem durch μ_p gegebenen $[n-p]$ einen Punkt gemeinsam hat. Hierzu fügen wir noch die Bemerkung, dass φ_0 als ein ausgearteter R_p die Bedingung $(a_0 a_1 \ldots a_p)$, wo $a_0 > 0$ ist, überhaupt nicht zu erfüllen vermag, weil dann zur Festlegung des R_{p-1} zuviel und zu der daraus folgenden Festlegung des $[p]$, der φ_0 als einem ausgearteten R_p angehört, zu wenig Bedingungen gegeben sind. Wenn aber $a_0 = 0$ ist, so erfüllt φ_0 die Bedingung $(0, a_1, a_2, \ldots, a_p)$, indem sein R_{p-1} die Bedingung $(a_1 a_2 \ldots a_p)$ erfüllt. Dann bestimmt immer die Verbindung des $[p-1]$ dieses R_{p-1} mit dem durch die Null in $(0, a_1, \ldots, a_p)$ gegebenen Punkte den zur völligen Constituirung des φ_0 nothwendigen $[p]$. Somit erhalten wir:

$$(2)\quad \begin{cases} \varphi_0(a_0 \ldots a_p)\,\mu_1^{m_1}\mu_2^{m_2}\ldots\mu_{p-1}^{m_{p-1}} = 0, \quad \text{wenn } a_0 > 0 \text{ ist,} \\ \varphi_0(0, a_1 \ldots a_p)\,\mu_1^{m_1}\mu_2^{m_2}\ldots\mu_{p-1}^{m_{p-1}} = (a_1 a_2 \ldots a_p)\,\mu_1^{m_1}\mu_2^{m_2}\ldots\mu_{p-1}^{m_{p-1}}, \end{cases}$$

wo die letztgenannte Bedingung sich auf ein R_{p-1} bezieht.

§ 3.

Grundlegende Formeln. Gang der Untersuchung.

Indem ein R_p in ein φ_i ausartet, erfüllt er eine Bedingung, die wir auch φ_i nennen wollen. Diese Bedingung ist einfach, weil, wie im vorigen Paragraphen nachgewiesen ist, die Constantenzahl jedes φ_i um 1 kleiner ist als die des R_p. In jedem einstufigen Systeme von R_p wird es also eine nicht nothwendig von 0 verschiedene endliche Anzahl von R_p geben, welche die Bedingung φ_i erfüllen. Ebenso wird es in einem solchen Systeme auch immer eine endliche Anzahl von R_p geben, welche irgend eine der p Bedingungen μ_k erfüllen. Im Einklang mit den Grundlagen meines Bedingungskalküls verstehen wir nun unter φ_i und μ_k nicht bloss die damit angedeuteten Bedingungen selbst, sondern auch immer die endliche Anzahl derjenigen φ_i bezw. μ_k eines zu Grunde gelegten einstufigen Systems von R_p, welche die angedeutete Bedingung erfüllen. Vermöge des auf höhere Dimensionen verallgemeinerten Correspondenzprincips lassen sich nun zwischen den p Ausartungsanzahlen φ_i und den p Lageanzahlen μ_k für jedes beliebige einstufige System von R_p p Gleichungen aufstellen, in welche ausser diesen $2p$ Zahlen nur noch eine einzige sonstige Zahl eintritt, nämlich die Zahl e, welche angiebt, wieviel R_p das zu Grunde gelegte einstufige System besitzt, bei denen der $[p]$ des R_p mit einem $[n-p-1]$ einen Punkt gemein hat.

Das soeben erwähnte verallgemeinerte Correspondenzprincip folgt sehr einfach aus dem ursprünglichen für die gerade Punktreihe gültigen durch perspective Zuordnung und lautet: *Wenn man unter einem*

Büschel von $[i]$ *die Gesammtheit aller* $[i]$ *versteht, die einen und denselben* $[i-1]$ *gemeinsam haben und dabei in einem und demselben* $[i+1]$ *liegen, und, wenn man dann weiss, dass einem beliebigen* $[i]$ *dieses Büschels in gewisser Weise* $\alpha[i]$ *entsprechen, und dass umgekehrt einem dieser* $\alpha[i]$ $\beta[i]$ *von der ersten Art entsprechen, so giebt es in dem Büschel* $\alpha+\beta$ *solcher* $[i]$ *von der Beschaffenheit, dass in jedem dieser* $\alpha+\beta$ *zwei* $[i]$ *beider Arten coincidiren.* Um mit Hilfe dieses Princips die gesuchten p Gleichungen zu erhalten, denken wir uns ein beliebiges einstufiges System von R_p, und zwar ein solches, dessen definirende Bedingungen keine andern, als die oben eingeführten Lagebedingungen und die Bedingung e sind. Dann können in einem solchen Systeme keine andern Ausartungen, als die oben definirten vorkommen*). Zweitens denken wir uns einen *Büschel* von $[n-k]$. Dann wird jeder $[n-k]$ dieses Büschels von μ_k Räumen R_p berührt, und jeder R_p des Systems wird von zwei $[n-k]$ des Büschels berührt. Wollen wir nun die Frage beantworten, wieviel $[n-k]$ der Büschel besitzt, in denen zwei solche demselben R_p angehörige $[n-k]$ des Büschels coincidiren, so haben wir bei Anwendung des oben ausgesprochenen Correspondenzprincips $\alpha=\mu_k$ und $\beta=\mu_k$ zu setzen. Die Coincidenz kann nun auf dreierlei Weise stattfinden, erstens dadurch, dass der $[n-k-1]$, von welchem der Büschel ausgeht, einen R_p des Systems berührt, was μ_{k+1}-mal der Fall ist, zweitens dadurch, dass der $[n-k+1]$, in welchem der Büschel liegt, einen R_p des Systems berührt, was μ_{k-1}-mal der Fall ist, drittens durch jeden im System vorhandenen in ein φ_{p-k} ausgearteten R_p; denn ein solcher besitzt einen $[k-1]$, welcher den $[n-k+1]$ des Büschels in einem Punkte trifft, der, mit dem gleichfalls im $[n-k+1]$ des Büschels liegenden $[n-k-1]$ verbunden, einen doppelt zählenden $[n-k]$ liefert. So gelangen wir also zu der Gleichung:

$$2\mu_k=\mu_{k+1}+\mu_{k-1}+\varphi_{p-k},$$

wo für k die Zahlen 1 bis p eingesetzt werden können. Die beiden Grenzfälle $k=1$ und $k=p$ sind besonders zu untersuchen, weil dann μ_k bezw. μ_{p+1} auftreten, also Symbole, deren Sinn erst geprüft werden muss. In diesen Fällen kann die Coincidenz nur durch eine einzige Bedingung μ bewerkstelligt werden, oder, was dasselbe ist, die sinnlosen Symbole μ_0 und μ_{p+1} sind gleich null zu setzen. Ist k gleich p, so tritt jedoch noch ein neuer Fall von Coincidenz hinzu, nämlich zweimal durch jeden R_p, dessen $[p]$ durch den $[n-p-1]$ hindurchgeht, von dem der betrachtete Büschel von $[n-p]$ ausgeht. Die Zahl solcher R_p ist aber oben mit e bezeichnet. Wenn man will, kann

*) Beispielsweise sind dann Ausartungen in dem von Halphen für den Kegelschnitt behandelten Sinne ausgeschlossen.

man auch sagen, dass das Symbol μ_{p+1} den Sinn $2.e$ hat. Die p Gleichungen, welche sich aus der obigen Formel ergeben, lauten also:

$$(3)\quad \begin{cases} 2\mu_p = \mu_{p-1} + \varphi_0 + 2e, \\ 2\mu_{p-1} = \mu_p + \mu_{p-2} + \varphi_1, \\ 2\mu_{p-2} = \mu_{p-1} + \mu_{p-3} + \varphi_2, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ 2\mu_2 = \mu_3 + \mu_1 + \varphi_{p-2}, \\ 2\mu_1 = \mu_2 + \varphi_{p-1}. \end{cases}$$

Vermöge dieser Relationen kann man jedes μ_k abhängig von den p Zahlen φ_i und von der Zahl e darstellen, und zwar ergiebt sich allgemein:

$$(4)\quad \begin{aligned}(p+1).\mu_k = 2k.e + k.[\varphi_0 + 2\varphi_1 + 3\varphi_2 + \cdots + (p-k)\varphi_{p-k-1}] \\ + k.(p-k+1).\varphi_{p-k} \\ + (p-k+1).[(k-1)\varphi_{p-k+1} \\ + (k-2)\varphi_{p-k+2} + \cdots + 1.\varphi_{p-1}].\end{aligned}$$

Vermittelst der Gleichung (4) kann man alle Anzahlen berechnen, welche angeben, wieviel R_p die Bedingung

$$(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_p)\mu_1^{m_1}\mu_2^{m_2}\mu_3^{m_3}\ldots\mu_p^{m_p},$$

wo (F. 1)

$$m_1 + m_2 + \cdots + m_p = a_0 + a_1 + \cdots + a_p + p$$

ist, erfüllen, wenn erstens die sämmtlichen Ausartungsanzahlen φ_i berechnet vorliegen, und wenn zweitens die Zahlen e für alle in Betracht kommenden Systeme bekannt sind. Das letztere ist bei einem systematischen Gange der Berechnung erreichbar, weil bei fest gedachtem p, d. h., wenn jedes a_i gleich i ist, die Zahl e gleich null ist, und weil jede auf $(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_p)$ bezügliche Zahl von den Zahlen abhängt, die sich auf

$$(a_0-1, a_1, a_2, \ldots, a_p), (a_0, a_1-1, a_2, \ldots, a_p), \ldots, (a_0, a_1, a_2, \ldots, a_p-1)$$

beziehen. Die Bedingung e für den R_p ist nämlich für dessen $[p]$ nichts anderes, als die einfache charakteristische Bedingung

$$(n-p-1,\ n-p+1,\ n-p+2, \ldots, n-1,\ n)$$

des $[p]$, und von dieser habe ich in den Acta Mathematica (1886, S. 104) die Formel bewiesen:

$$(5)\quad \begin{aligned}(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_p)(n-p-1, n-p+1, n-p+2, \ldots, n-1, n) \\ = (a_0-1, a_1, a_2, \ldots, a_p) + (a_0, a_1-1, a_2, \ldots, a_p) + \cdots \\ + (a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{p-1}-1, a_p) + (a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{p-1}, a_p-1).\end{aligned}$$

Demgemäss kann man von den auf $(0, 1, 2, 3, \ldots, p)$ bezüglichen Zahlen, bei denen e null ist, zu den auf

$$(0, 1, 2, 3, \ldots, p-1, p+1)$$

bezüglichen Zahlen aufsteigen, von diesen dann wieder zu den Zahlen, die sich auf

$$(0, 1, 2, 3, \ldots, p-1, p+2)$$

und auf

$$(0, 1, 2, 3, \ldots, p-2, p, p+1)$$

beziehen, und so weiter.

Aber nicht allein die Zahlen e, auch die Ausartungsanzahlen φ_i können bei einem systematischen Gange der Untersuchung immer als schon bekannt angesehen werden. Denn jede Ausartung φ_i setzt sich aus einem linearen Raume von der Dimension $p-i-1$, einem R_{p-i-1} und einem S_i zusammen, wie in § 2 auseinandergesetzt ist. Desshalb muss die Anzahl derjenigen R_p, welche die Bedingung

$$\varphi_i(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_p)\,\mu_1^{m_1}\mu_2^{m_2}\ldots\mu_p^{m_p}$$

erfüllen, sich aus den Anzahlen zusammensetzen, welche sich auf lineare Räume, auf Räume zweiten Grades von *niederer* als der p^{ten} Dimension und auf die Gebilde S_i beziehen, welche den Räumen zweiten Grades dual entsprechen, und desshalb mit ihnen gleiche Anzahlen besitzen. Die Anzahlen für lineare Räume können aber, nach den früheren Arbeiten des Verfassers, als bekannt angesehen werden; und ebenso können die auf die Räume zweiten Grades bezüglichen Anzahlen immer als bekannt betrachtet werden, wenn man zunächst den R_1, dann den R_2, dann den R_3 u. s. w. behandelt.

Da es uns nur darauf ankommt, die Anzahl derjenigen R_p zu finden, welche ihren $[p]$ die Bedingung $(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_p)$ erfüllen lassen, und welche selbst m_1-mal die Bedingung μ_1, m_2-mal die Bedingung μ_2 u. s. w. bis m_p-mal die Bedingung μ_p erfüllen, so hat man als definirende Bedingungen der einstufigen Systeme, auf die sich die obigen Formeln beziehen, auch keine andern, als die eben genannten, zu wählen. Wenn also die $m_1, m_2, \ldots, m_p$ sämmtlich von null verschieden sind, so kann man auf die Zahl:

$$(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_p)\,\mu_1^{m_1}\mu_2^{m_2}\ldots\mu_p^{m_p}$$

auf p verschiedenen Wegen kommen, indem man nämlich entweder von dem einstufigen Systeme ausgeht, dessen definirende Bedingung

$$(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_p)\,\mu_1^{m-1}\mu_2^{m_2}\ldots\mu_p^{m_p}$$

ist, wodurch man zu der gesuchten Zahl durch μ_1 gelangt, oder indem man von dem Systeme ausgeht, dessen definirende Bedingung

$$(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_p)\,\mu_1^{m_1}\mu_2^{m_2-1}\ldots\mu_p^{m_p}$$

ist, u. s. w. Durch diesen Umstand werden viele Verificationen ermöglicht.

Da die gesuchten Anzahlen schliesslich immer von den Ausartungsanzahlen φ_i abhängen, so ist vor allem erforderlich, zu wissen, wie jedes φ_i jede Bedingung μ_k zu erfüllen vermag. Dies ist schon in § 2 vollständig erörtert. Hierbei kommt jedoch noch ein andrer Umstand in Betracht, der die Untersuchung wesentlich zu vereinfachen vermag. Die Gestaltung der Ausartungen φ_i bedingt nämlich, dass gewisse Bedingungen μ_k nothwendig gegeben sein müssen, damit ein φ_i überhaupt im Systeme möglich sei. Beispielsweise besteht das φ_1 eines R_3 im [3] aus zwei Ebenen, die sich in einem Strahle schneiden, auf dem zwei ausgezeichnete Punkte liegen. Die Constantenzahl von φ_2 ist 8. Die Punkte dieses ausgearteten R_3 sind die Punkte, die auf den beiden Ebenen liegen, seine Tangenten sind die Strahlen, welche die Schnittlinie der Ebenen schneiden, und seine Tangentialebenen sind die Ebenen, welche durch die beiden ausgezeichneten Punkte gehen. Hieraus folgt u. a., dass in einem Systeme von R_3, zu dessen definirenden Bedingungen kein gegebener Punkt gehört, auch kein φ_1 vorkommen kann, weil die beiden Ebenen von φ_1 nicht durch gegebene Tangenten oder Tangentialebenen allein, sondern nur durch mindestens zwei gegebene Punkte bestimmt werden können. Gerade so ist auch beim allgemeinen R_p ein φ_1 nicht bestimmbar, wenn unter den definirenden Bedingungen μ_p ganz fehlt. Ebenso muss, damit φ_2 möglich sei, μ_p oder μ_{p-1} gegeben sein, damit φ_3 möglich sei, μ_p oder μ_{p-1} oder μ_{p-2} gegeben sein; und überhaupt $\varphi_i = 0$, wenn von den Bedingungen

$$\mu_p \text{ oder } \mu_{p-1} \text{ oder } \mu_{p-2} \dots \text{ oder } \mu_{p+1-i}$$

keine gegeben ist. Dieser Umstand bewirkt, dass man am besten thut, wenn man zunächst nur die Bedingung μ_1 berücksichtigt, d. h.

$$m_2 = m_3 = m_4 = \cdots = m_p = 0$$

setzt, und wenn man dann nach Auffindung der Zahl $(a_0, a_1, \dots, a_p)\mu_1^{m_1}$ erst anfängt, auch die Bedingung μ_2 zu berücksichtigen, also die Zahl $(a_0, a_1, \dots, a_p)\mu_1^{m_1}\mu_2^{m_2}$ anstrebt u. s. w. Wenn nämlich von den Zahlen m_k nur m_1 von null verschieden ist, so vereinfacht sich die für $k = 1$ specialisirte Gleichung (4) zu folgender:

$$(p+1)\cdot\mu_1 = 2e + \varphi_0, \tag{6}$$

falls

$$m_2 = m_3 = \cdots m_p = 0$$

ist.

Ist $m_3 = \cdots = m_p = 0$, so folgt aus (4) für $k = 1$ und $k = 2$:

$$\begin{cases} (p+1)\cdot\mu_1 = 2.e + \varphi_0 + p\cdot\varphi_{p-1}, \\ (p+1)\cdot\mu_2 = 4.e + 2.\varphi_0 + (p-1)\,\varphi_{p-1}, \end{cases}$$

woraus folgt:

(7) $$p \cdot \mu_2 - (p-1) \cdot \mu_1 = 2 \cdot e + \varphi_0,$$
wenn
$$m_3 = m_4 = \cdots = m_p = 0$$
ist.

Ebenso erhält man aus (4) für $k=1$, $k=2$, $k=3$ drei Gleichungen, aus denen folgt:

(8) $$(p-1) \cdot \mu_3 - (p-2) \cdot \mu_2 = 2 \cdot e + \varphi_0,$$
wenn
$$m_4 = m_5 = \cdots = m_p = 0$$
ist.

Allgemein erhält man:

(9) $$(p+2-k) \cdot \mu_k - (p+1-k) \cdot \mu_{k-1} = 2 \cdot e + \varphi_0,$$
wenn
$$m_{k+1} = \cdots = m_p = 0$$
ist.

Die allerletzte der p Gleichungen, die man erhält, wenn man in (9) $k=1$ bis $k=p$ setzt, wird mit der ersten Gleichung des mit (3) bezeichneten Gleichungssystems identisch, und gilt schrankenlos.

Durch die soeben entwickelten Gleichungen gelingt es, die Ausartungen φ_i, wo $i > 0$ ist, von der Untersuchung ganz auszuschliessen. Man braucht nur φ_0. φ_0 aber besteht bloss aus einem R_{p-1} und die Anzahlen für R_{p-1} können als bekannt angesehen werden, wenn man an die Berechnung für R_p herantritt. Auch die Betrachtung der zu R_p dualen Gebilde S_p kann hiernach ganz vermieden werden.

§ 4.

Die Raumincidenz.

Um die Anzahlen für den R_p allgemein ausdrücken zu können, muss man vor allem die Anzahlen für die Ausartung φ_0 eines R_p ausdrücken können. φ_0 aber besteht aus einem $[p-1]$, in dem ein R_{p-1} liegt, u. s. w. Geht man so in den Ausartungen immer weiter zurück, so kommt man auf den Strahl, in dem ein R_1, d. h. ein Punktepaar liegt. Als φ_0 dieses Punktepaars könnte endlich noch ein Punkt angesehen werden, in dem beide Punkte des Paars coincidiren. Dabei hat man aber nicht zu vergessen, dass zu den constituirenden Bestandtheilen des φ_0 eines R_k immer auch der $[k]$ gehört, in dem der R_k liegen muss, so dass schliesslich als allerletzte Ausartung eines R_p ein Gebilde erscheint, *das aus einem* $[p]$, *einem darin liegenden* $[p-1]$, *einem in diesem* $[p-1]$ *liegenden* $[p-2]$, *u. s. w. besteht, bis zuletzt ein in einem Strahle liegender Punkt erscheint.* Dieses Gebilde wollen wir „*Raumincidenz*" nennen und mit η bezeichnen. Der Ausdruck Raumincidenz ist gerechtfertigt, nachdem man sich seit etwa 20 Jahren

daran gewöhnt hat, einen Punkt und einen Strahl oder einen Strahl und eine Ebene „incident" zu nennen, wenn der Punkt im Strahle bezw. der Strahl in der Ebene liegt. Auf die Raumincidenz als allerletzte Ausartung muss man schliesslich auch kommen, wenn man statt von φ_0 von irgend welcher anderen Ausartung ausgeht, wobei man auch in dem Index von φ beliebig variiren kann. Ja, auch bei jedem Raum höheren Grades muss man schliesslich, wenn man immer weiter ausarten lässt, als letzte Ausartung auf die Raumincidenz η kommen nur mit dem Unterschiede, dass die ineinanderliegenden Räume, welche η constituiren, theilweise vielfach statt einfach oder zweifach zu rechnen sind. Bei diesem fundamentalen Charakter der Raumincidenz für alle auf n Dimensionen bezüglichen Abzählungsfragen, wird es auch, abgesehen von dem Ziel der vorliegenden Untersuchung, interessant sein, die auf dieses Gebilde bezüglichen Anzahlen *allgemein auszudrücken.*

Wenn man die Art, wie der R_p die Bedingung μ_k zu erfüllen vermag, durch die immer specieller werdenden Ausartungen hindurch bis zur Raumincidenz η verfolgt, so erkennt man leicht, dass die letztere die Bedingung μ_k dadurch erfüllt, dass der η angehörige $[k-1]$ den durch die Bedingung μ_k gegebenen $[n-k]$ einpunktig trifft, oder, was dasselbe ist, die einfache Bedingung

$$(n-k,\ n-k+2,\ n-k+3, \ldots, n)$$

erfüllt. Dem R_p musste aber ausser den p Bedingungen μ_k noch eine weitere $(p+1)^{\text{te}}$ Lagebedingung auferlegt werden, nämlich die mit c bezeichnete, welche verlangt, dass der $[p]$ des R_p einen $[n-p-1]$ einpunktig zu treffen vermag. Auch diese Bedingung bleibt bis η hin erhalten. Sie kann für η passender Weise mit μ_{p+1} benannt werden, und ihr Exponent demnach m_{p+1} heissen. Für η wird aus F. 1, da jedes Ausarten die Constantenzahl um 1 erniedrigt:

$$(10)\qquad m_1 + m_2 + m_3 + \cdots + m_p + m_{p+1} = a_0 + a_1 + \cdots + a_p.$$

Unser nächstes Ziel ist also, die Anzahl derjenigen Raumincidenzen zu bestimmen, welche die Bedingung

$$(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_p)\, \mu_1^{m_1} \mu_2^{m_2} \ldots \mu_{p+1}^{m_{p+1}}$$

erfüllen, wo zwischen den $2p+2$ Zahlen a und m die Beziehung (10) besteht. Hierbei bedeutet also μ_1 die Bedingung, dass die Raumincidenz ihren Punkt auf einem $[n-1]$ hat, μ_2 die Bedingung, dass sie ihren Strahl durch einen $[n-2]$ schickt, u. s. w. bis μ_{p+1}, was ausspricht, dass die Raumincidenz ihren $[p]$ einen $[n-p-1]$ treffen lässt.

Indem wir pedantisch vom kleinsten p anfangen, also von $p=0$, haben wir zunächst $\eta(a_0)\mu_1^{m_1}$, wo $m_1 = a_0$ ist, auszudrücken, d. h. wir haben zu bestimmen, wieviel Punkte es giebt, die auf einem $[a_0]$ liegen, und dabei auf m_1, d. h. hier auf a_0, gegebenen $[n-1]$ liegen. Die a_0

gegebenen $[n-1]$ schneiden sich in einem $[n-a_0]$ und dieser $[n-a_0]$ hat mit jedem $[a_0]$ *einen* Punkt gemein. Daher ist $\eta(a_0)\mu_1^{m_1}=1$.

Um $\eta(a_0,a_1)\mu_1^{m_1}\mu_2^{m_2}$, wo $m_1+m_2=a_0+a_1$ ist, zu berechnen, d. h. den Fall $p=1$ zu erledigen, setzen wir zunächst $a_0=0$, $m_2=0$. Dann muss der Punkt der Raumincidenz auf dem gegebenen $[a_1]$ und auf $m_1=a_1$ gegebenen $[n-1]$ liegen. Solcher Punkte giebt es, wie schon eben bei $p=0$ erkannt ist, *einen*. Ist zweitens $a_0>0$ und $m_2=0$, so sind für die Bestimmung des Punktes der Raumincidenz zuviel, für die Bestimmung ihres Strahls zu wenig Bedingungen gegeben. Die gesuchte Zahl $\eta(a_0,\ a_1)\mu_1^{m_1}\mu_2^0$ ist also 1 oder 0, je nachdem a_0 gleich oder grösser als null ist. Diese beiden Resultate können wir zusammenfassen, indem wir schreiben:

$$(11)\qquad \eta(a_0,\ a_1)\mu_1^{m_1}\mu_2^0=0_{a_0}-0_{a_1},$$

wo 0_{a_0} und 0_{a_1} Binomialcoefficienten sein sollen. Dass nun aber auch allgemein

$$(12)\qquad \eta(a_0,\ a_1)\mu_1^{m_1}\mu_2^{m_2}=(m_2)_{a_0}-(m_2)_{a_1}$$

ist, wo $(m_2)_{a_0}$ und $(m_2)_{a_1}$ Binomialcoefficienten sind, kann man durch den Schluss von m_2-1 auf m_2 beweisen. μ_2 ist nämlich identisch mit der oben mit e bezeichneten einfachen charakteristischen Bedingung, die für den Strahl $(n-2,\ n)$ heisst. Desshalb ist:

$$\eta(a_0 a_1)\mu_1^{m_1}\mu_2^{m_2}=\eta e(a_0 a_1)\mu_1^{m_1}\mu_2^{m_2-1}.$$

Nun ist aber nach Formel (5) für den Strahl:

$$e(a_0 a_1)=(a_0-1,\ a_1)+(a_0,\ a_1-1).$$

Desshalb kommt bei der Annahme, dass Formel (12) für m_2-1 richtig ist:

$$\begin{aligned}\eta(a_0 a_1)\mu_1^{m_1}\mu_2^{m_2}&=\eta(a_0-1,\ a_1)\mu_1^{m_1}\mu_2^{m_2-1}+\eta(a_0,\ a_1-1)\mu_1^{m_1}\mu_2^{m_2-1}\\&=(m_2-1)_{a_0-1}-(m_2-1)_{a_1}+(m_2-1)_{a_0}-(m_2-1)_{a_1-1},\end{aligned}$$

wofür nach bekannten Sätzen über Binomialcoefficienten gesetzt werden kann:

$$(m_2)_{a_0}-(m_2)_{a_1}.$$

Für $a_0=0$ kommt:

$$e(0,\ a_1)=(0,\ a_1-1),$$

wodurch nur

$$(m_2-1)_0-(m_2-1)_{a_1-1}$$

kommt. Dass auch diese Differenz gleich $(m_2)_0-(m_2)_{a_1}$ wird, erkennt man, wenn man beachtet, dass c_0 immer 1 bleibt, und dass c_d gleich 1 oder 0 ist, je nachdem d gleich oder grösser als c ist; a_1 kann nämlich nicht kleiner als m_2 sein, weil, wenn $a_0=0$ ist, $a_1=m_1+m_2$ ist.

So ist also bewiesen, dass Formel (12) für m_2 richtig ist, wenn sie für m_2-1 richtig ist. Da sie oben für $m_2=0$ als richtig erkannt ist, so ist sie allgemein richtig.

In derselben Weise lässt sich für $p = 2$ zeigen:

$$(13)\quad \eta(a_0 a_1 a_2)\mu_1^{m_1}\mu_2^{m_2}\mu_3^{m_3} = (m_3)_{a_0}\cdot(m_3-a_0+m_2)_{a_1} - (m_3)_{a_0}\cdot(m_3-a_0+m_2)_{a_2}$$
$$-(m_3)_{a_1}\cdot(m_3-a_1+m_2)_{a_0} + (m_3)_{a_1}\cdot(m_3-a_1+m_2)_{a_2}$$
$$+(m_3)_{a_2}\cdot(m_3-a_2+m_2)_{a_0} - (m_3)_{a_2}\cdot(m_3-a_2+m_2)_{a_1}.$$

Um diese Formel zu beweisen, zeigt man zuerst ihre Richtigkeit für $m_3 = 0$. Wenn dann $a_0 > 0$ ist, so kommt links null, weil die Ebene der Raumincidenz nicht bestimmbar ist, rechts auch null, weil dann die ersten Factoren der 6 Producte Binomialcoefficienten sind, deren Basen null und deren Indices grösser als null sind. Wenn aber bei $m_3 = 0$ auch $a_3 = 0$ ist, so kommen wir auf den Fall $p = 2$ zurück, der durch F. (12) erledigt ist. $\eta(0\, a_1\, a_2)\mu_1^{m_1}\mu_2^{m_2}\mu_3^0$ identificirt sich nämlich mit $\eta(a_1 a_2)\mu_1^{m_1}\mu_2^{m_2}$. Denn die Bedingung $(0\, a_1\, a_2)$ verlangt, dass die Ebene von η in einem $[a_2]$ liegen soll; dann muss dies aber auch der in der Ebene η liegende Strahl thun. Ferner verlangt $(0 a_1 a_2)$, dass die Ebene von η mit einem in $[a_2]$ liegenden $[a_1]$ einen Strahl gemeinsam haben soll. Dann muss doch der in dieser Ebene von η liegende Strahl mit dem eben genannten Strahle einen Punkt gemein haben. Den so durch $\eta(a_1 a_2)\mu_1^{m_1}\mu_2^{m_2}$ bestimmten Strahl hat man dann nur noch mit dem durch die 0 in $(0 a_1 a_2)$ gegebenen Punkte zu verbinden, um das aus Punkt, Strahl und Ebene bestehende Gebilde η zu vervollständigen. Daraus geht wegen Formel (12) hervor, dass für $m_3 = 0$ und $a_0 = 0$: $\eta(a_0' a_1 a_2)'\mu_1^{m_1}\mu_2^{m_2}\mu_3^{m_3}$ gleich $(m_2)_{a_1} - (m_2)_{a_2}$ wird. Dies liefert aber auch die rechte Seite der Formel (13). Also ist dieselbe für $m_3 = 0$ richtig, gleichviel ob a_0 grösser oder gleich null ist. Nun beachten wir, dass für die Ebene von η die Bedingung μ_3 sich mit e oder, was dasselbe ist, mit $(n-3,\ n-1,\ n)$ identificirt, wodurch Formel (5) anwendbar wird, und folgende Recursion erhalten wird:

$$\eta(a_0 a_1 a_2)\mu_1^{m_1}\mu_2^{m_2}\mu_3^{m_3} = \eta(a_0-1,\ a_1,\ a_2)\mu_1^{m_1}\mu_2^{m_2}\mu_3^{m_3-1}$$
$$+\ \eta(a_0,\ a_1-1,\ a_2)\mu_1^{m_1}\mu_2^{m_2}\mu_3^{m_3-1}$$
$$+\ \eta(a_0,\ a_1,\ a_2-1)\mu_1^{m_1}\mu_2^{m_2}\mu_3^{m_3-1}.$$

Wendet man dies bei (13) an, indem man annimmt, dass diese Formel für $m_3 - 1$ richtig ist, so folgt nach den schon oben benutzten Sätzen über Binomialcoefficienten, dass sie auch für m_3 richtig ist, wodurch sie allgemein bewiesen ist, da sie oben für $m_3 = 0$ als richtig erkannt ist.

Das erste Glied der sechsgliedrigen Summe, welche die rechte Seite von Formel (13) bildet, kann, da

$$m_3 + m_2 + m_1 = a_0 + a_1 + a_2$$

ist, auch geschrieben werden:

$$(m_3)_{a_0} \cdot (m_3 - a_0 + m_2)_{a_1} \cdot (m_3 - a_0 + m_2 - a_1 + m_1)_{a_2}$$

oder in Facultäten:

$$\frac{m_3!\,(m_3+m_2-a_0)!\,(m_3+m_2+m_1-a_0-a_1)!}{a_0!\,a_1!\,a_2!\,(m_3-a_0)!\,(m_3+m_2-a_0-a_1)!\,(m_3+m_2+m_1-a_0-a_1-a_2)!}.$$

Der Kürze wegen, setzen wir diesen Ausdruck gleich A_{012}. Dann muss, consequenter Weise, das zweite Glied der rechten Seite der Formel (13) gleich A_{021} gesetzt werden; denn es unterscheidet sich von dem ersten Gliede nur durch die Vertauschung der Indices 1 und 2. Wendet man die analoge Bezeichnung auf die übrigen 4 Glieder an, so wird aus Formel (13):

$$(14)\quad \eta(a_0 a_1 a_2)\mu_1^{m_1}\mu_2^{m_2}\mu_3^{m_3} = A_{012} - A_{021} - A_{102} + A_{120} + A_{201} - A_{210},$$

wo also

$$(15)\quad A_{ikl} = (m_3)_{a_i} \cdot (m_3 - a_i + m_2)_{a_k} \cdot (m_3 - a_i + m_2 - a_k + m_1)_{a_l}$$

ist. Der letzte Factor, der gleich 1 ist, kann deshalb auch fortgelassen werden. Das Vorzeichen von A_{ikl} ist plus, wenn die Permutation ikl aus 012 durch eine gerade Zahl von Vertauschungen je zweier hervorgeht, und minus, wenn dazu eine ungerade Zahl erforderlich ist.

Wie soeben mit Benutzung von F. (12) und von F. (5) unter Anwendung des Schlusses von $m_3 - 1$ auf m_3 die F. (13) bewiesen ist, so lässt sich aus F. (13) und F. (5) unter Anwendung des Schlusses von $m_4 - 1$ auf m_4 auch der Fall $p = 3$ erledigen. Man erhält:

$$(16)\quad \begin{aligned} &\eta(a_0 a_1 a_2 a_3)\,\mu_1^{m_1}\mu_2^{m_2}\mu_3^{m_3}\mu_4^{m_4} \\ &= A_{0123} - A_{0132} - A_{0213} + A_{0231} + A_{0312} - A_{0321} \\ &\quad - A_{1023} + A_{1032} + A_{1203} - A_{1230} - A_{1302} + A_{1320} \\ &\quad + A_{2013} - A_{2031} - A_{2103} + A_{2130} + A_{2301} - A_{2310} \\ &\quad - A_{3012} + A_{3021} + A_{3102} - A_{3120} - A_{3201} + A_{3210}, \end{aligned}$$

wo

$$A_{iklq} = (m_4)_{a_i} \cdot (m_4 - a_i + m_3)_{a_k} \cdot (m_4 - a_i + m_3 - a_k + m_2)_{a_l}$$

ist. Hier ist der letzte Factor

$$(m_4 - a_i + m_3 - a_k + m_2 - a_l + m_1)_{a_q}$$

fortgelassen, da er wegen F. (10) den Werth 1 hat.

So kann man weiter zu $p = 4$ und überhaupt zum allgemeinen p aufsteigen. Da das Anschreiben des Ausdruckes, der für

$$\eta(a_0 a_1 a_2 \ldots a_p)\,\mu_1^{m_1} \ldots \mu_p^{m_p}\mu_{p+1}^{m_{p+1}}$$

kommt, bei höheren p oder beim allgemeinen p sehr viel Raum erfordert, so beschreiben wir diesen Ausdruck, dessen Bildungsgesetz ja jetzt evident ist. Er ist eine algebraische Summe von $(p+1)!$ Gliedern. Jedes dieser Glieder ist ein Product von $p+1$ Factoren, die sämmtlich

Binomialcoefficienten sind. Die $p+1$ Indices der $p+1$ Binomialcoefficienten, die ein solches Product bilden, heissen immer $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{p-1}, a_p$, jedoch so, dass sie nur beim ersten Glied die eben genannte natürliche Reihenfolge bilden, bei allen folgenden jedoch alle sonst noch denkbaren, durch Permutiren der Zahlen $0, 1, 2, \ldots, p$ entstehenden Reihenfolgen zeigen. Ob ein Glied plus oder minus vor sich hat, richtet sich danach, ob die Reihenfolge der $p+1$ Indices seiner Factoren aus der natürlichen Reihenfolge der Zahlen $0, 1, 2, \ldots, p$ durch eine gerade oder durch eine ungerade Anzahl von Vertauschungen je zweier Zahlen hervorgeht. Was endlich die Basen der $p+1$ Binomialcoefficienten, die eins der $(p+1)!$ Producte bilden, anbetrifft, so ist die Basis des ersten Factors bei jedem Producte m_{p+1}; die Basis des zweiten Factors ist der Ueberschuss der Basis des ersten Factors über seinen Index, aber vermehrt um m_p, u. s. w., sodass immer die Basis des i^{ten} Factors gleich dem um m_{p-i+2} vermehrten Ueberschuss der Basis des $(i-1)^{\text{ten}}$ Factors über dessen Index ist. Die Basis des letzten Factors jedes Products muss bei Anwendung der F. (10) gleich seinem Index werden, sodass dieser Factor den Werth 1 darstellt.

Es wird nicht überflüssig erscheinen, einige Beispiele der Berechnung hinzuzufügen:

1) $(0123)\, \mu_1^1\, \mu_2^2\, \mu_3^3\, \mu_4^0$. Von den 24 Gliedern werden nur die ersten 6 von 0 verschieden, weil alle nachfolgenden als ersten Factor einen Binomialcoefficienten haben, dessen Basis null ist, und dessen Index grösser als null ist. Der erste Factor der ersten 6 Glieder wird $0_0 = 1_1$. Bei Fortlassung dieses und des letzten Factors lauten die ersten 6 Glieder:

$$\begin{aligned} &3_1 \,.\, (3-1+2)_2 - 3_1 \,.\, (3-1+2)_3 - 3_2 \,.\, (3-2+2)_1 \\ &+ 3_2 \,.\, (3-2+2)_3 + 3_3 \,.\, (3-3+2)_1 - 3_3 \,.\, (3-3+2)_2 \\ &= 3 \,.\, 6 - 3 \,.\, 4 - 3 \,.\, 3 + 3 \,.\, 1 + 1 \,.\, 2 - 1 \,.\, 1 = 1. \end{aligned}$$

Dass $(0123)\, \mu_1^1\, \mu_2^2\, \mu_3^3\, \mu_4^0 = 1$ ist, kann auch direct geometrisch erkannt werden, da die Aufgabe mit der folgenden identisch ist: „In unserm dreidimensionalen Raume soll ein Gebilde construirt werden, das aus Ebene, Strahl und Punkt, die einander incident sind, besteht; und zwar ist eine Ebene gegeben, auf der der Punkt liegen soll, zwei Strahlen, die der Strahl schneiden soll und drei Punkte, durch die die Ebene gehen soll."

2) $(123)\, \mu_1^2\, \mu_2^2\, \mu_3^2$. Wenn man nur die Glieder, deren erster Factor nicht null ist, schreibt und die letzten Factoren, die ja immer 1 sind, wieder fortlässt, so erhält man:

$$\begin{aligned} 2_1 \,.\, (2-1+2)_2 - 2_1 \,.\, (2-1+2)_3 - 2_2 \,.\, (2-2+2)_1 + 2_2 \,.\, (2-2+2)_3 \\ = 2 \,.\, 3 - 2 \,.\, 1 - 1 \,.\, 2 + 1 \,.\, 0 = 2, \end{aligned}$$

was auch geometrisch evident ist.

3) $(n-p,\ n-p+1, \ldots, n-1,\ n)\ \mu_1^n \mu_2^{n-1} \mu_3^{n-2}, \ldots, \mu_{p+1}^{n-p}$. Hier werden alle auf das erste Glied folgenden Glieder null, weil in ihnen immer Binomialcoefficienten erscheinen, deren Basis kleiner als der Index ist. Das erste Glied wird:

$$(n-p)_{n-p} \cdot (n-p-n+p+n-p+1)_{n-p+1}, \ldots,$$

so dass immer bei jedem Factor Basis und Index gleich werden. Daher kommt 1, was auch geometrisch leicht erkannt werden kann. Denn $(n-p,\ n-p+1, \ldots, n-1,\ n)$ ist nullfache Bedingung für den $[p]$ der Raumincidenz; μ_1^n bestimmt eindeutig ihren Punkt, aus ihm und μ_1^{n-1} ist dann ihr Strahl eindeutig bestimmt, aus ihm und μ_2^{n-2} erhält man eindeutig ihre Ebene u. s. w.

4) $(n-p,\ n-p+1, \ldots, n-1,\ n)\ \mu_1{}^1 \mu_2^{2n-2} \mu_3^{n-2} \mu_4^{n-3}, \ldots \mu_{p+1}^{n-p}$. Nur die ersten beiden der $(p+1)!$ Glieder werden von null verschieden. Die ersten $p-1$ Factoren jedes dieser beiden Glieder werden sämmtlich gleich 1, weil sie Binomialcoefficienten sind, bei denen der Index gleich der Basis wird. Der p^{te} Factor wird beim ersten Gliede $(2n-2)_{n-1}$, beim zweiten $(2n-2)_n$, sodass kommt:

$$(2n-2)_{n-1} - (2n-2)_n = \frac{(2n-2)!}{n!\,(n-1)!}.$$

Auch dieses Resultat war vorauszusehen, da nach Bestimmung des der Raumincidenz angehörigen Strahls durch μ_2^{2n-2} die übrigen Bestandtheile sich eindeutig bestimmen. Dass aber für den Strahl $(n-2, n)^{2n-2}$ gleich $\frac{(2n-2)!}{n!\,(n-1)!}$ wird, haben ausser dem Verfasser mehrere Mathematiker gefunden (vgl. die Anm. auf Seite 17 des 26. Bandes der Math. Ann.). Man bemerke, dass auch die von mir für den $[p]$ gefundene Anzahl (vgl. § 1)

$$(a_0 a_1 a_2 \ldots a_p)\ (n-p-1,\ n-p+1, \ldots, n-1,\ n)^m,$$

wo

$$m = a_0 + a_1 + \cdots + a_p - \tfrac{1}{2} p (p+1)$$

ist, durch Specialisirung unseres allgemeinen Resultats für die Raumincidenz auf mannichfache Weise gefunden werden kann, freilich in anderer Gestalt, als auf Seite 117 der Acta Math. von 1886.

§ 5.

Anzahlfunction für das Punktepaar. Definition der grundlegenden Function ψ.

Unser nächstes Ziel ist die Bildung einer Function, welche die Anzahl derjenigen R_p, die ihren $[p]$ die Bedingung $(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_p)$ erfüllen lassen und selbst m_1 gegebene $[n-1]$ berühren, abhängig

von den gegebenen Zahlen darstellt. Mit anderen Worten, wir wollen das in § 2 ausgesprochene Ziel zunächst für den speciellen Fall, wo

$$m_2 = m_3 = \cdots = m_p = 0$$

ist, anstreben. Bei dieser Beschränkung sind wir in der Lage, die in § 3 entwickelte F. (6) anwenden zu dürfen. Indem wir hier in diesem Paragraphen zuerst nur $p = 1$ setzen, erhält man aus jener Formel die folgende für das *Punktepaar* gültige Formel:

$$(17) \qquad 2\mu_1 - 2e = \varphi_0.$$

Dabei bedeutet μ_1 die Bedingung, dass der R_1 einen seiner beiden Punkte auf einem gegebenen $[n-1]$ haben soll, e die Bedingung, dass er seinen Strahl einen gegebenen $[n-2]$ schneiden lassen soll, φ_0 die Bedingung, dass seine beiden Punkte coincidiren. Jeder R_1 aber, der die letztere Bedingung erfüllt, wird zu einer Rauminicidenz (§ 4), bei welcher $p = 1$ ist: Wir dürfen daher auf die Ausartung φ_0 die Formel (12) aus § 4 anwenden. Doch ist zu bemerken, dass

$$(18) \qquad \mu_1\varphi_0 = 2\mu_1\eta$$

ist, weil, wenn das Gebilde η als ein ausgearteter R_1 betrachtet wird, sein Punkt zwei Punkte in sich vereinigt. Die Formel (17) lässt sich auf jedes einstufige System von R_1 anwenden, unter dessen definirenden Bedingungen ausser $(a_0 a_1)$ nur noch die Bedingungen μ_1 und e vorkommen. Wir dürfen daher, um auf Anzahlen zu kommen, beide Seiten der F. (17) mit

$$a_0 a_1 (\mu_1^{m_1-1} + \mu_1^{m_1-2} \cdot e^1 + \mu_1^{m_1-3} \cdot e^2 + \cdots + e^{m_1-1})$$

multipliciren. So erhalten wir bei Berücksichtigung von F. (18):

$$2 \cdot (a_0 a_1)\, \mu_1^{m_1} - 2 \cdot (a_0 a_1)\, e^{m_1}$$
$$= (a_0 a_1)\, \eta [2^{m_1-1} \mu_1^{m_1-1} + 2^{m_1-2} \mu_2^{m_1-2} e^1 + \cdots + e^{m_1-1}],$$

wo wegen F. (1)

$$m_1 = a_0 + a_1 + 1$$

sein muss. Die durch $(a_0 a_1)\, e^{m_1}$ dargestellte Zahl ist null, weil keine Bedingung gegeben ist, die die Lage der beiden Punkte des Punktepaares bestimmen könnte. Ebenso ist auch rechts die Anzahl $(a_0 a_1)\, \eta e^{m_1-1}$ gleich null, weil der Punkt auf η nicht bestimmbar ist. Also erhalten wir die gesuchte Anzahl $(a_0 a_1)\, \mu_1^{m_1}$ bloss durch Anzahlen, die auf η Bezug nehmen, in folgender Weise ausgedrückt:

$$(19) \quad (a_0 a_1)\mu_1^{m_1} = \eta (a_0 a_1) [2^{m_1-2} \mu_1^{m_1-1} + 2^{m_1-3} \mu_1^{m_1-2} e^1 + \cdots + 2^0 \mu_1^1 e^{m_1-2}].$$

Auf die rechts stehenden $m_1 - 1$ Bedingungssymbole wende man nun, in der umgekehrten Reihenfolge, die F. (12) an, wobei man beachte, dass unsere Bedingung e mit der dort μ_2 genannten identisch ist. Dann kommt:

$$(20)\quad (a_0 a_1)\mu_1^{m_1} = [(m_1-2)_{a_0} - (m_1-2)_{a_1}] + [(m_1-3)_{a_0}\cdot 2^1 - (m_1-3)_{a_1}\cdot 2^1] + [(m_1-4)_{a_0}\cdot 2^2 - (m_1-4)_{a_1}\cdot 2^2] + \cdots,$$

welche Summe soweit fortzusetzen ist, bis die Binomialcoefficienten null werden, weil ihre Basis kleiner als ihr Index ist. Die Minuenden der in den eckigen Klammern stehenden Differenzen, ebenso wie ihre Subtrahenden, lassen sich nun nach der Formel:

$$(21)\quad u_v + 2^1\cdot(u-1)_v + 2^2\cdot(u-2)_v + \cdots + 2^{u-v}\cdot v_v = (u+1)_0 + (u+1)_1 + \cdots + (u+1)_{u-v} \text{*)}$$

summiren. Dadurch erhält man:

$$[(m_1-1)_0 + (m_1-1)_1 + \cdots + (m_1-1)_{m_1-2-a_0}] - [(m_1-1)_0 + \cdots + (m_1-1)_{m_1-2-a_1}]$$

oder

$$(m_1-1)_{m_1-1-a_1} + (m_1-1)_{m_1-a_1} + \cdots + (m_1-1)_{m_1-2-a_0}$$

oder da $m_1 = a_0 + a_1 + 1$ ist,

$$(a_0 a_1)\,\mu_1^{m_1} = (a_0+a_1)_{a_0} + (a_0+a_1)_{a_0+1} + \cdots + (a_0+a_1)_{a_1-1}.$$

Indem wir noch diese Summe in umgekehrter Reihenfolge schreiben, und benutzen, dass

$$(a_0+a_1)_i = (a_0+a_1)_{a_0+a_1-i}$$

ist, erhalten wir schliesslich:

$$(22)\quad (a_0 a_1)\,\mu_1^{m_1} = (a_0+a_1)_{a_0+1} + (a_0+a_1)_{a_0+2} + \cdots + (a_0+a_1)_{a_1}.$$

Zu der Formel (22), welche für den R_1 das gestellte Problem löst, einige Beispiele:

1) $(1,3)\,\mu_1^{5} = 4_2 + 4_3 = 10$. Direct geometrisch erhält man dieses Resultat so: In unserm [3] schneiden sich 3 der gegebenen 5 Ebenen in einem der beiden Punkte des Punktepaars. Durch diesen Punkt, den durch die Zahl 1 in $(1,3)$ gegebenen Strahl und den Schnittstrahl der beiden andern Ebenen, geht ein einziger Strahl, der

---

*) Da ich diese Identität, die sehr einfach abzuleiten ist, nirgends finden kann, so deute ich ihren Beweis kurz an: Da

$$a_b = (a-1)_{b-1} + (a-1)_b$$

ist, so ist:

$$(u+1)_0 + (u+1)_1 + \cdots + (u+1)_{u-v} = 2[u_0 + u_1 + \cdots + u_{u-v-1}] + u_{u-v}$$
$$= 2^2[(u-1)_0 + \cdots + (u-1)_{u-v-2}] + 2^1(u-1)_{u-v-1} + u_{u-v}$$
$$= 2^3[(u-2)_0 + \cdots + (u-2)_{u-v-3}] + 2^2(u-2)_{u-v-2} + 2^1(u-1)_{u-v-1} + u_{u-v}$$
$$= \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$= 2^{u-v}[(v+1)_0] + 2^{u-v-1}(v+1)_1 + \cdots + 2^2(u-2)_{u-v-2} + 2^1(u-1)_{u-v-1} + u_{u-v}$$
$$= 2^{u-v}\cdot v_v + 2^{u-v-1}\cdot(v+1)_v + \cdots + 2^2\cdot(u-2)_v + 2^1(u-1)_v + u_v,$$

q. e. d.

das ganze Gebilde constituirt. Da von den 5 Ebenen sich je drei auf zehnfache Weise aussondern lassen, so ist 10 die gesuchte Zahl.

2) $(n-1,\, n)\, \mu_1^{2n} = (2n-1)_n = \frac{1}{2}(2n)_n$, was auch geometrisch evident ist, da n von den $2n$ gegebenen $[n-1]$ den einen Punkt, die andern n den andern Punkt bestimmen.

3) $(0,\, n)\, \mu_1^{n+1} = n_1 + n_2 + \cdots + n_n = 2^n - 1$. Geometrisch erhält man dieselbe Zahl als die Hälfte der Summe aller Binomialcoefficienten, die die Basis $n+1$ haben, mit Ausnahme des ersten und letzten, die beide gleich 1 sind.

In derselben Weise, wie oben die Formel (22) für das Punktepaar abgeleitet ist, hat der Verfasser auch für den Kegelschnitt und die Fläche zweiten Grades die entsprechende Formel mühsam abgeleitet. Doch soll hier das Gerüst, an dem das Gebäude der allgemeinen Formel für $(a_0 a_1 a_2 \ldots a_p)\, \mu_1^{m_1}$ aufgebaut ist, abgerissen erscheinen, und die hingeschriebene Formel nachher als richtig bewiesen werden.

Für $p = 2$, d. h., für den *Kegelschnitt*, ergab sich:

$$
\begin{aligned}
(23)\quad (a_0 a_1 a_2)\mu_1^{m_1} = & \; 2^{a_0}\cdot[(a_1+a_2)_{a_1+1} + (a_1+a_2)_{a_1+2} + \cdots + (a_1+a_2)_{a_2}] \\
& - 2^{a_1}\cdot[(a_0+a_2)_{a_0+1} + (a_0+a_2)_{a_0+2} + \cdots + (a_0+a_2)_{a_2}] \\
& + 2^{a_2}\cdot[(a_0+a_1)_{a_0+1} + (a_0+a_1)_{a_0+2} + \cdots + (a_0+a_1)_{a_1}].
\end{aligned}
$$

Natürlich muss hier

$$m_1 = a_0 + a_1 + a_2 + 2$$

sein (F. (1)).

Da Ausdrücke, wie die hier in den eckigen Klammern stehenden, auch bei den Räumen zweiten Grades von höherer Dimension auftreten, und überhaupt *im Folgenden eine fundamentale Rolle spielen* werden, so wollen wir dafür eine kürzere Bezeichnung einführen.

Es bezeichne $\chi(b, c)$ die folgende Binomialcoefficienten-Summe:

$$(24)\qquad \chi(b, c) = b_0 + b_1 + b_2 + \cdots + b_{c-1} + b_c,$$

sodass also z. B. $\chi(b, 0) = 1$ ist, $\chi(b, b) = 2^b$ ist, ferner auch $\chi(b, c) = 2^b$ ist, sobald $c > b$ ist, endlich $\chi(2b+1,\, b) = 2^{2b}$.

Ausser $\chi(b, c)$ führen wir auch noch *das Zeichen $\psi(u, v)$ ein, das folgende Bedeutung haben soll:*

$$(25)\qquad \psi(u, v) = \chi(u+v,\, v) - \chi(u+v,\, u),$$

d. h.:

$$(26)\qquad \psi(u, v) = (u+v)_{u+1} + (u+v)_{u+2} + \cdots + (u+v)_v.$$

Mit Hilfe des Zeichens ψ lässt sich nun auch die Formel für $p = 3$ kurz hinschreiben. Man erhält nämlich für die *Fläche zweiten Grades:*

$$(27)\quad (a_0 a_1 a_2 a_3)\,\mu_1^{m_1} = \psi(a_0, a_1)\,.\,\psi(a_2, a_3) - \psi(a_0, a_2)\,.\,\psi(a_1, a_3) + \psi(a_0, a_3)\,.\,\psi(a_1, a_2).$$

Um die Formeln (23), (27), sowie die für das allgemeine p beweisen zu können, haben wir die Function ψ, die eben nur für zwei Argumente definirt ist, auf beliebig viele Argumente auszudehnen. Zu einer solchen Ausdehnung gelangt man durch einen Vergleich der drei Formeln (22), (23), (27) für $p = 1, 2, 3$. Es bedeute:

$$\psi(u_0) = 2^{u_0},$$

$$\psi(u_0, u_1) = (u_0 + u_1)_{u_0+1} + (u_0 + u_1)_{u_0+2} + \cdots + (u_0 + u_1)_{u_1},$$

$$\psi(u_0, u_1, u_2) = \psi(u_0)\,.\,\psi(u_1, u_2) - \psi(u_1)\,.\,\psi(u_0, u_2) + \psi(u_2)\,.\,\psi(u_0, u_1),$$

$$\psi(u_0, u_1, u_2, u_3) = \psi(u_0, u_1)\,.\,\psi(u_2, u_3) - \psi(u_0, u_2)\,.\,\psi(u_1, u_3) + \psi(u_0, u_3)\,.\,\psi(u_1, u_2),$$

und überhaupt, wenn q gerade, die Anzahl der Argumente also ungerade ist:

$$(28)\quad \psi(u_0, u_1, u_2, \ldots, u_q) = \psi(u_0)\,.\,\psi(u_1, u_2, \ldots, u_q) - \psi(u_1)\,.\,\psi(u_0, u_2, \ldots, u_q) + \psi(u_2)\,.\,\psi(u_0, u_1, u_3, \ldots, u_q) - \cdots + \psi(u_q)\,.\,\psi(u_0, \ldots, u_{q-1}),$$

während, wenn q ungerade, die Anzahl der Argumente also gerade ist, so definirt werden muss:

$$\psi(u_0, u_1, u_2, \ldots, u_q) = \psi(u_0, u_1)\,.\,\psi(u_2, u_3, \ldots, u_q) - \psi(u_0, u_2)\,.\,\psi(u_1, u_3, \ldots, u_q) + \psi(u_0, u_3)\,.\,\psi(u_1, u_2, u_4, \ldots, u_q) + \cdots + \psi(u_0, u_q)\,.\,\psi(u_1, u_2, u_3, \ldots, u_{q-1}).\,{}^{*)}$$

Dieser Definition von ψ für beliebig viele Argumente schliessen wir einige Beispiele an:

1) $\psi(1, 2, 3) = 2^1 \cdot 5_3 - 2^2 \cdot (4_2 + 4_3) + 2^3 \cdot 3_2 = 20 - 40 + 24 = \mathbf{4}.$

2) $\psi(0, 2, 4, 6) = (2_1 + 2_2) \cdot (10_5 + 10_6) - (4_1 + 4_2 + 4_3 + 4_4) \cdot (8_3 + 8_4 + 8_5 + 8_6) + (6_1 + 6_2 + 6_3 + 6_4 + 6_5 + 6_6) \cdot (6_3 + 6_4) = 3 \cdot 462 - 15 \cdot 210 + 63 \cdot 35 = \mathbf{441}.$

---

*) Die nicht negativen ganzen Zahlen $u_0, u_1, u_2, \ldots, u_q$ sind immer nach ihrer Grösse geordnet zu denken, von der kleinsten Zahl aufsteigend bis zur grössten.

$$3)\quad \psi(0,1,2,3,4)=2^0\cdot[3_2\cdot 7_4-(4_2+4_3)(6_3+6_4)+(5_2+5_3+5_4)\cdot 5_3]$$
$$-2^1\cdot[(2_1+2_2)\cdot 7_4-(3_1+3_2+3_3)(6_3+6_4)$$
$$+(4_1+4_2+4_3+4_4)\cdot 5_3]$$
$$+2^2\cdot[1_1\cdot 7_4-(3_1+3_2+3_3)\cdot(5_2+5_3+5_4)$$
$$+(4_1+4_2+4_3+4_4)\cdot(4_2+4_3)]$$
$$-2^3\cdot[1_1\cdot(6_3+6_4)-(2_1+2_2)\cdot(5_2+5_3+5_4)$$
$$+(4_1+4_2+4_3+4_4)\cdot 3_2]$$
$$+2^4\cdot[1_1\cdot 5_3-(2_1+2_2)(4_2+4_3)$$
$$+(3_1+3_2+3_3)\cdot 3_2]$$
$$=2^0\cdot 5-2^1\cdot 10+2^2\cdot 10-2^3\cdot 5+2^4\cdot 1=\mathbf{1}.$$

$$4)\quad \psi(n-2,n-1,n)=2^{n-2}\cdot(2n-1)_n$$
$$-2^{n-1}\cdot[(2n-2)_{n-1}+(2n-2)_n]$$
$$+2^n\cdot(2n-3)_{n-1}=\frac{2^{n-1}\cdot(2n-3)!}{n!\,(n-2)!}.$$

$$5)\quad \psi(n-3,n-1,n)=2^{n-3}\cdot(2n-1)_n$$
$$-2^{n-1}[(2n-3)_{n-2}+(2n-3)_{n-1}+(2n-3)_n]$$
$$+2^n\cdot[(2n-4)_{n-2}+(2n-4)_{n-1}]$$
$$=\frac{3\cdot 2^{n-2}\cdot(2n-3)!}{n!\,(n-2)!}.$$

Es zeigt sich nun, dass die soeben definirte *Function ψ die gesuchte Anzahlfunction für den R_p ganz allgemein darstellt*, dass also immer:

$$(29)\qquad (a_0 a_1 \ldots a_p)\,\mu_1^{m_1}=\psi(a_0 a_1 \ldots a_p)$$

ist, wo natürlich (F. (1))

$$m_1=a_0+a_1+\cdots+a_p+p.$$

Um dieses in § 7 beweisen zu können, müssen wir in § 6 einige Eigenschaften der Function ψ ableiten.

§ 6.

Eigenschaften der Function ψ.

Die in F. (28) gegebene Definition von $\psi(u_0, u_1)$ setzt voraus, dass $u_1 > u_0$ ist. Dies zieht nach sich, dass bei $\psi(u_0, u_1, u_2)$ $u_0 < u_1 < u_2$ sein muss, und so weiter bis zum allgemeinen ψ. Man hat sich also in $\psi(u_0, u_1, u_2, \ldots, u_q)$ die nicht negativen, ganzen Zahlen u_i nach der Grösse geordnet zu denken, sodass eine nachfolgende Zahl immer grösser sein muss, als irgend eine vorangehende. Die Formel (25) gestattet jedoch, der Function ψ wenigstens in dem Fall noch Sinn zu ertheilen, wo zwei aufeinanderfolgende von den

nach der Grösse geordneten Zahlen $u_0, u_1, u_2, \ldots, u_q$ gleich sind. F. (25) ergiebt nämlich:

$$\psi(u, u) = \chi(u + u, u) - \chi(u + u, u) = 0.$$

Dadurch kommt es dann, dass auch $\psi(u_0, u_1, u_2)$ null sein muss, wenn $u_0 = u_1$ oder wenn $u_1 = u_2$ ist. Ebenso kommt 0 für $\psi(u_0, u_1, u_2, u_3)$ sowohl wenn $u_0 = u_1$, wie auch, wenn $u_1 = u_2$, wie auch, wenn $u_2 = u_3$ ist. Allgemein ergiebt sich

$$\psi(u_0, u_1, u_2, \ldots, u_q) = 0,$$

sobald zwei aufeinanderfolgende u gleich sind. Dass zwei nicht aufeinanderfolgende q gleich sind, kann nicht vorkommen, ohne dass auch die zwischenstehenden q ihnen gleich sind, weil die u ja nach der Grösse geordnet sein müssen. Es bedeute nun für $u_0 > 0$:

$$(30) \quad \psi'(u_0, u_1, \ldots, u_q) = \sum_{i=0}^{i=q} \psi(u_0, u_1, \ldots u_i - 1, u_{i+1}, \ldots, u_q).$$

Ferner bedeute für $u_0 = 0$:

$$(31) \quad \psi'(0, u_1, u_2, \ldots, u_q) = \sum_{i=1}^{i=q} \psi(0, u_1, u_2, \ldots, u_i - 1, u_{i+1}, \ldots, u_q).$$

Z. B.:

$$1) \quad \psi'(1, 2, 4) = \psi(0, 2, 4) + \psi(1, 1, 4) + \psi(1, 2, 3) = 23 + 0 + 4 = 27;$$

$$2) \quad \psi'(0, 2, 4, 5) = \psi(0, 1, 4, 5) + \psi(0, 2, 3, 5) + \psi(0, 2, 4, 4) = 61 + 51 + 0 = 112.$$

Die neu eingeführte Function ψ' lässt sich nun auch noch in kürzerer Weise, als es ihre Definition verlangt, durch ψ ausdrücken. Es ist nämlich für $u_0 > 0$:

$$\psi'(u_0) = \psi(u_0 - 1) = 2^{u_0 - 1} = \frac{1}{2} \cdot 2^{u_0} = \frac{1}{2}\psi(u_0).$$

Ferner für $u_0 > 0$:

$$\begin{aligned}
\psi'(u_0, u_1) &= \psi(u_0 - 1, u_1) + \psi(u_0, u_1 - 1) \\
&= (u_0 + u_1 - 1)_{u_0} + (u_0 + u_1 - 1)_{u_0+1} + \cdots + (u_0 + u_1 - 1)_{u_1} \\
&\quad + (u_0 + u_1 - 1)_{u_0+1} + (u_0 + u_1 - 1)_{u_0+2} + \cdots \\
&\quad + (u_0 + u_1 - 1)_{u_1-1} \\
&= (u_0 + u_1)_{u_0+1} + (u_0 + u_1)_{u_0+2} + \cdots + (u_0 + u_1)_{u_1-1} \\
&\quad + (u_0 + u_1 - 1)_{u_1-1} + (u_0 + u_1 - 1)_{u_1} \\
&= (u_0 + u_1)_{u_0+1} + (u_0 + u_1)_{u_0+2} + \cdots + (u_0 + u_1)_{u_1-1} \\
&\quad + (u_0 + u_1)_{u_1} \\
&= \psi(u_0, u_1).
\end{aligned}$$

Es lässt sich nun auch allgemein erkennen, dass für $u_0 > 0$:

$$\psi'(u_0, u_1, \ldots, u_q) = \frac{q+1}{2} \cdot \psi(u_0, u_1, \ldots, u_q) \tag{32}$$

ist.

Für $q = 0$ und $q = 1$ ist (32) oben als richtig erkannt. Desshalb haben wir nur zu zeigen, dass aus der Annahme, es sei für q oder $q-1$ Argumente richtig, die Richtigkeit für $q+1$ folgt. Ist q erstens gerade, so hat man:

$$\psi(u_0, u_1, \ldots, u_q) = 2^{u_0} \cdot \psi(u_1, u_2, \ldots, u_q) - 2^{u_1} \cdot \psi(u_0, u_2, \ldots, u_q) + \cdots$$
$$+ 2^{u_q} \cdot \psi(u_0, u_1, \ldots, u_{q-1}).$$

Um hieraus $\psi'(u_0, u_1, \ldots, u_q)$ zu erschliessen, hat man in jedem Gliede rechts von den Zahlen $u_0, u_1, u_2, \ldots, u_q$ nach einander immer eine um 1 zu erniedrigen. So liefert jedes Glied $q+1$ Addenden. Im Ganzen kommt also eine Summe von $(q+1)^2$ Gliedern. Bei andrer Anordnung der Glieder kann diese Summe auch so geschrieben werden:

$$[2^{u_0-1} \cdot \psi(u_1, u_2, \ldots, u_q) - 2^{u_1-1}\, \psi(u_0, u_2, \ldots, u_q) + \cdots$$
$$+ 2^{u_q-1} \cdot \psi(u_1, \ldots, u_{q-1})]$$
$$+ [2^{u_0} \cdot \psi'(u_1, u_2, \ldots u_q) - 2^{u_1} \cdot \psi'(u_0, u_2, \ldots, u_q) + \cdots$$
$$+ 2^{u_q} \cdot \psi'(u_0, \ldots, u_{q-1})].$$

Was in der ersten eckigen Klammer steht, ist identisch mit

$$\tfrac{1}{2}\, \psi(u_0, u_1, \ldots, u_q).$$

Bei der zweiten eckigen Klammer benutzen wir die Annahme, dass F. (32) für q Variable richtig sein soll. So kommt:

$$\tfrac{1}{2}\, \psi(u_0, u_1, \ldots, u_q) + \tfrac{q}{2} \cdot [2^{u_0} \cdot \psi(u_1, u_2, \ldots, u_q) - \cdots$$
$$+ 2^{u_q} \cdot \psi(u_0, u_1, \ldots, u_{q-1})].$$

Wir erhalten demnach:

$$\psi'(u_0, u_1, \ldots, u_q) = \frac{q+1}{2} \cdot \psi(u_0, u_1, \ldots, u_q),$$

wodurch F. (32) als allgemein richtig erkannt ist, falls q gerade ist. Ist zweitens q ungerade, so hat man:

$$\psi(u_0, u_1, \ldots, u_q) = \psi(u_0, u_1) \cdot \psi(u_2, u_3, \ldots, u_q) - \psi(u_0, u_2) \cdot \psi(u_1, u_3, \ldots, u_q)$$
$$+ \cdots + \psi(u_0, u_q) \cdot \psi(u_1, u_2, \ldots u_{q-1}).$$

Aehnlich, wie vorher, leiten wir aus diesem Ausdruck, gemäss F. (30), ψ' ab, indem wir beachten, dass

$$\psi'(u, v) = \psi(u, v)$$

ist. So kommt:

$$\psi'(u_0, u_1, \ldots, u_q) = [\psi(u_0, u_1) \cdot \psi(u_2, u_3, \ldots, u_q) - \psi(u_0, u_2) \cdot \psi(u_1, u_3, \ldots, u_q) + \cdots + \psi(u_0, u_q) \cdot \psi(u_1, u_2, \ldots, u_{q-1})]$$
$$+ [\psi(u_0, u_1) \cdot \psi'(u_2, u_3, \ldots, u_q) - \psi(u_0, u_2) \cdot \psi'(u_1, u_3, \ldots u_q) + \cdots].$$

Indem wir nun annehmen, F. (32) sei für $q-1$ Variable richtig, erhalten wir aus der zweiten eckigen Klammer:

$$\frac{q-1}{2} \cdot \psi(u_0, u_1, \ldots, u_q),$$

also im Ganzen:

$$\psi'(u_0, u_1, \ldots, u_q) = \psi(u_0, u_1, \ldots, u_q) + \frac{q-1}{2} \cdot \psi(u_0, u_1, \ldots, u_q)$$
$$= \frac{q+1}{2} \cdot \psi(u_0, u_1, \ldots, u_q),$$

wodurch F. (32) auch dann als richtig erkannt ist, wenn q ungerade ist.

Bisher war $u_0 > 0$ vorausgesetzt. Ist $u_0 = 0$, so tritt an die Stelle von F. (32) die folgende Formel:

$$(33) \qquad \psi'(0, u_1, u_2, \ldots, u_q) = \frac{q+1}{2} \cdot \psi(0, u_1, u_2, \ldots, u_q) - \frac{1}{2} \cdot \psi(u_1, u_2, \ldots, u_q).$$

Um sie zu beweisen, beginnen wir mit $q = 1$ und $q = 2$.

Es ist

$$\psi'(0, u_1) = \psi(0, u_1 - 1) = (u_1 - 1)_1 + (u_1 - 1)_2 + \cdots + (u_1 - 1)_{u_1 - 1}$$
$$= 2^{u_1 - 1} - 1 = 2^{u_1} - 1 - \frac{1}{2} \cdot 2^{u_1}$$
$$= \psi(0, u_1) - \frac{1}{2} \psi(u_1).$$

Ferner:

$$\psi'(0, u_1, u_2) = \psi(0, u_1 - 1, u_2) + \psi(0, u_1, u_2 - 1)$$
$$= 2^0 \cdot [\psi(u_1 - 1, u_2) + \psi(u_1, u_2 - 1)]$$
$$- 2^{u_1 - 1} \cdot \psi(0, u_2) - 2^{u_1} \cdot \psi(0, u_2 - 1)$$
$$+ 2^{u_2} \cdot \psi(0, u_1 - 1) + 2^{u_2 - 1} \cdot \psi(0, u_1)$$
$$= 2^0 \cdot \psi'(u_1, u_2) - 2^{u_1 - 1} \cdot (2^{u_2} - 1) - 2^{u_1} \cdot (2^{u_2 - 1} - 1)$$
$$+ 2^{u_2}(2^{u_1 - 1} - 1) + 2^{u_2 - 1}(2^{u_1} - 1)$$
$$= 2^0 \cdot \psi'(u_1, u_2) + 2^{u_1 - 1} + 2^{u_1} - 2^{u_2} - 2^{u_2 - 1}$$
$$= 2^0 \cdot \psi(u_1, u_2) + \frac{3}{2}[2^{u_1} - 2^{u_2}]$$
$$= \frac{3}{2}[2^0 \cdot \psi(u_1, u_2) - (2^{u_2} - 1) \cdot 2^{u_1} + (2^{u_1} - 1) \cdot 2^{u_2}]$$
$$- \frac{1}{2} \psi(u_1, u_2)$$
$$= \frac{3}{2} \psi(0, u_1, u_2) - \frac{1}{2} (\psi(u_1, u_2).$$

Für $q = 1$ und $q = 2$ ist hiermit F. (33) bewiesen. Um sie allgemein zu beweisen, nehmen wir zuerst q gerade an, und gehen aus von:

$$\psi(0, u_1, u_2, \ldots, u_q) = 2^0 . \psi(u_1, u_2, \ldots, u_q) \\ - 2^{u_1} . \psi(0, u_2, u_3, \ldots, u_q) + \cdots .$$

Gehen wir nun zu ψ' über und ordnen dann die rechts entstehenden Glieder anders an, so können wir folgern:

$$\begin{aligned} \psi'(0, u_1, u_2, \ldots, u_q) = 2^0 . \psi'(u_1, u_2, \ldots, u_q) \\ - [2^{u_1-1} . \psi(0, u_2, u_3, \ldots, u_q) \\ - 2^{u_2-1} . \psi(0, u_1, u_3, \ldots, u_q) + \cdots] \\ - [2^{u_1} . \psi'(0, u_2, u_3, \ldots, u_q) \\ - 2^{u_2} . \psi'(0, u_1, u_3, \ldots, u_q) + \cdots]. \end{aligned}$$

Nehmen wir nun an, dass F. (33) für q Argumente (einschliesslich der voranstehenden Null) richtig sei, so folgt weiter:

$$\begin{aligned} \psi'(0, u_1, u_2, \ldots, u_q) = \tfrac{q}{2} \psi(u_1, u_2, \ldots, u_q) \\ - \tfrac{1}{2} [2^{u_1} . \psi(0, u_2, \ldots, u_q) - 2^{u_2} . \psi(0, u_1, u_3, \ldots, u_q) + \cdots \\ - \left[2^{u_1} \cdot \tfrac{q}{2} \cdot \psi(0, u_2, \ldots, u_q) - 2^{u_2} \cdot \tfrac{q}{2} \psi(0, u_1, u_3, \ldots, u_q) + \cdots\right] \\ + \tfrac{1}{2} [2^{u_1} . \psi(u_2, \ldots, u_q) - 2^{u_2} \psi(u_1, u_3, \ldots, u_q) + \cdots]. \end{aligned}$$

Das erste und dritte von den rechts stehenden vier Gliedern ergeben zusammen

$$\tfrac{q}{2} \psi(0, u_1, u_2, \ldots, u_q).$$

Fügt man zum zweiten Gliede noch

$$\tfrac{1}{2} \cdot 2^0 \cdot \psi(u_1, u_2, \ldots, u_q)$$

hinzu, so ergiebt sich daraus

$$\tfrac{1}{2} \cdot \psi(0, u_1, u_2, \ldots, u_q),$$

sodass kommt:

$$\psi'(0, u_1, u_2, \ldots, u_q) = \frac{q+1}{2} \cdot \psi(0, u_1, u_2, \ldots, u_q) - \tfrac{1}{2} \psi(u_1, u_2, \ldots, u_q) \\ + \tfrac{1}{2} [2^{u_1} . \psi(u_2, u_3, \ldots, u_q) - 2^{u_2} . \psi(u_1, u_3, \ldots, u_q) + \cdots].$$

Die letzte eckige Klammer reducirt sich nun aber auf 0. Denn, da q gerade ist, so enthalten die Entwickelungen der darin enthaltenen ψ Potenzen von 2, und man erkennt leicht, dass auf jedes entwickelte Glied immer noch eins folgen muss, das sich von ihm nur durch das Vorzeichen unterscheidet. Beispielsweise kommt aus dem ersten Producte $2^{u_1+u_2} . \psi(u_3, u_4, \ldots, u_q)$ und aus dem zweiten $-2^{u_1+u_2} . \psi(u_3, u_4, \ldots, u_q)$.

So ist also F. (33) für gerade q bewiesen, da, unter der Annahme, dass sie für q Variable gilt, abgeleitet ist, dass sie auch für eine Variable mehr richtig ist.

Bei ungeradem q gehen wir aus von:

$$\psi(0, u_1, u_2, \ldots, u_q) = \psi(0, u_1) \cdot \psi(u_2, \ldots, u_q) - \psi(0, u_2) \cdot \psi(u_1, u_3, \ldots, u_q) + \cdots$$

und leiten hieraus ψ' ab. So kommt:

$$\begin{aligned}
\psi'(0, u_1, u_2, \ldots, u_q) &= [\psi'(0, u_1) \cdot \psi(u_2, \ldots, u_q) \\
&\qquad - \psi'(0, u_2) \cdot \psi(u_1, u_3, \ldots, u_q) + \cdots] \\
&\quad + [\psi(0, u_1) \cdot \psi'(u_2, u_3, \ldots, u_q) \\
&\qquad - \psi(0, u_2) \cdot \psi'(u_1, u_3, \ldots, u_q) + \cdots] \\
&= [\psi(0, u_1) \cdot \psi(u_2, \ldots, u_q) \\
&\qquad - \psi(0, u_2) \cdot \psi(u_1, u_3, \ldots, u_q) + \cdots] \\
&\quad - \tfrac{1}{2}[\psi(u_1) \cdot \psi(u_2, \ldots, u_q) \\
&\qquad - \psi(u_2) \cdot \psi(u_1, u_3, \ldots, u_q) + \cdots] \\
&\quad + \frac{q-1}{2} \cdot [\psi(0, u_1) \cdot \psi(u_2, \ldots, u_q) \\
&\qquad - \psi(0, u_2) \cdot \psi(u_1, u_3, \ldots, u_q) + \cdots] \\
&= \frac{q+1}{2} \cdot \psi(0, u_1, u_2, \ldots, u_q) - \tfrac{1}{2}\psi(u_1, u_2, \ldots, u_q).
\end{aligned}$$

Somit ist F. (33) als allgemein richtig erkannt. Unter mannichfachen Eigenschaften der Functionen ψ und ψ' brauchen wir im folgenden Paragraphen besonders die, welche sich aus F. (33) durch die Specialisirung $u_i = i$ ergiebt, also aus:

$$\psi'(0, 1, 2, 3, \ldots, q) = \frac{q+1}{2} \cdot \psi(0, 1, 2, 3, \ldots, q) - \tfrac{1}{2}\psi(1, 2, 3, \ldots, q).$$

Die linke Seite $\psi'(0, 1, 2, 3, \ldots, q)$ muss immer null sein, weil, wenn man von den Zahlen $1, 2, \ldots, q$ irgend eine um 1 vermindert, immer zwei aufeinanderfolgende Zahlen irgendwo als gleich erscheinen müssen. Daher ist:

$$\psi(1, 2, 3, \ldots, q) = (q+1) \cdot \psi(0, 1, 2, 3, \ldots, q). \tag{34}$$

§ 7.

Anzahlfunction für $(a_0 a_1 \ldots a_p)\,\mu_1^{m_1}$ beim R_p.

In § 5 ist die F. (29) nur für $p - 1$ bewiesen. Ihre Allgemeingültigkeit ist demnach erkannt, wenn wir unter der Annahme, sie gelte für $p - 1$, ableiten können, dass sie dann auch für p gilt. Hiernach können wir annehmen, dass für $a_1 > 0$:

$$(35)\qquad (a_1, a_2, \ldots, a_p)\,\mu_1^{m_1-1} = \psi(a_1, a_2, \ldots, a_p)$$

ist, weil die links stehende Bedingung sich auf einen R_{p-1} bezieht. Hieraus folgt aber nach Formel (2):

$$(36)\qquad \varphi_0(a_0, a_1, \ldots, a_p)\,\mu_1^{m_1-1} = 0, \quad \text{wenn } a_0 > 0 \text{ ist;}$$

$$(37)\qquad \varphi_0(0, a_1, \ldots, a_p)\,\mu_1^{m_1-1} = \psi(a_1, a_2, \ldots, a_p).$$

Wir setzen nun zunächst ein durch die Bedingung $(0, 1, 2, \ldots, p)\,\mu_1^{m_1-1}$ definirtes einstufiges System von R_p voraus und wenden auf dieses System die F. (6) an, wozu wir berechtigt sind, weil keine andern μ_p als μ_1 gegeben sind. So kommt:

$$(p+1)\,.\,(0, 1, 2, \ldots, p)\,\mu_1^{m_1} = 2\,.\,e(0, 1, 2, \ldots, p)\,\mu_1^{m_1-1} + \varphi_0(0, 1, 2, \ldots, p)\,\mu_1^{m_1-1}.$$

Der erste Addende rechts ist null, weil $(0, 1, 2, \ldots, p)$ den $[p]$ als gegeben voraussetzt, und er desshalb ausserdem nicht noch die Bedingung e erfüllen kann. Der zweite Addende ist nach F. (36) gleich $\psi(1, 2, \ldots, p)$. Wenden wir nun die in § 6 arithmetisch bewiesene F. (34) an, und heben durch $p+1$, so erhalten wir:

$$(38)\qquad (0, 1, 2, \ldots, p)\,\mu_1^{m_1} = \psi(0, 1, 2, \ldots, p),$$

wo

$$m_1 = \tfrac{1}{2}\,p(p+3)$$

ist.

Durch F. (38) ist die F. (29) für $a_i = i$, d. h. *für das denkbar kleinste* m_1 bewiesen. Um sie allgemein zu beweisen, ist also nur noch nöthig, dass gezeigt wird, wie aus der angenommenen Gültigkeit für $m_1 - 1$ die für m_1 folgt. Wir nehmen desshalb an, sie sei für

$$(a_0, a_1, \ldots, a_i - 1,\ a_{i+1}, \ldots, a_p)\,\mu_1^{m_1-1}$$

richtig. Dann ist bei Anwendung von F. (30) und (32):

$$(39)\qquad \sum_{i=0}^{i=p} (a_0, a_1, \ldots, a_i - 1,\ a_{i+1}, \ldots, a_p)\,\mu_1^{m_1-1} = \frac{p+1}{2}\,\psi(a_0, a_1, \ldots, a_p),$$

falls $a_0 > 0$ ist.

Ebenso ergiebt sich aus F. (31) und (33):

$$(40)\qquad \sum_{i=1}^{i=p} (0, a_1, \ldots, a_i - 1,\ a_{i+1}, \ldots, a_p)\,\mu_1^{m_1-1} = \frac{p+1}{2}\cdot\psi(0, a_1, \ldots, a_p) - \frac{1}{2}\,\psi(a_1, \ldots, a_p).$$

Wenn wir nunmehr ein einstufiges System von R_p voraussetzen, die sämmtlich $(a_0 a_1 \ldots a_p)\,\mu_1^{m_1-1}$ erfüllen, und auf dasselbe F. (6) anwenden, so erhalten wir:

$$(p+1)\,.\,(a_0 a_1 \ldots a_p)\,\mu_1^{m_1} = 2\,.\,e(a_0 a_1 \ldots a_p)\,\mu_1^{m_1-1} + \varphi_0(a_0 a_1 \ldots a_p)\,\mu_1^{m_1-1}.$$

Der erste Addende rechts wird nun durch F. (5) zu dem Doppelten der linken Seite von F. (39) oder (40), je nachdem a_0 grösser als null oder gleich null ist. Also kommt:

$$\begin{cases} (p+1) \cdot (a_0 a_1 \ldots a_p)\,\mu_1^{m_1} = (p+1) \cdot \psi(a_0 a_1 \ldots a_p) + 0, \\ \hfill \text{wenn } a_0 > 0 \text{ ist.} \\ (p+1) \cdot (0, a_1 \ldots a_p)\,\mu_1^{m_1} = (p+1) \cdot \psi(0, a_1 \ldots a_p) - \psi(a_1 \ldots a_p) \\ \hfill + \psi(a_1 \ldots a_p), \end{cases}$$

also in beiden Fällen:

$$(41) \qquad (a_0 a_1 \ldots a_p)\,\mu_1^{m_1} = \psi(a_0 a_1 \ldots a_p).$$

Hiermit ist unter der Annahme, F. (29) gelte für $p-1$, bewiesen, dass sie auch für p bei jedem m_1 gilt. Also ist sie allgemein gültig. Hierzu noch einige Beispiele:

1) $(1, 2, 3)\,\mu_1{}^8 = \psi(1, 2, 3) = 4$ (nach Beisp. 1 am Schluss von § 5), d. h.: es giebt in unserm Raum 4 Kegelschnitte, welche 8 gegebene Ebenen berühren;

2) $(0, 2, 4, 6)\,\mu_1^{15} = \psi(0, 2, 4, 6) = 441$ (nach Beisp. 2 am Schluss von § 5), d. h.: es giebt in einem sechsdimensionalen linearen Raume 441 Flächen zweiten Grades, von denen jede 15 gegebene fünfdimensionale lineare Räume berührt, sowie den [3], in welchem sie liegt, einen gegebenen [4] in einer Ebene schneiden lässt und denselben auch aus einem in diesem [4] liegenden Strahlbüschel einen Strahl ausschneiden lässt;

3) $(0, 1, 2, 3, 4)\,\mu_1^{14} = \psi(0, 1, 2, 3, 4) = 1$ (nach Beisp. 3 am Schluss von § 5), d. h.: es giebt in einem vierdimensionalen, linearen Raume einen einzigen dreidimensionalen Raum zweiten Grades, der 14 gegebene dreidimensionale lineare Räume berührt;

4) $(n-2, n-1, n)\,\mu_1^{3n-1} = \psi(n-2, n-1, n) = \frac{2^{n-1} \cdot (2n-3)!}{n!\,(n-2)!}$ (nach Beisp. 4 am Schluss von § 5), d. h. es giebt in einem n-dimensionalen linearen Raume $\frac{2^{n-1} \cdot (2n-3)!}{n!\,(n-2)!}$ Kegelschnitte, deren Ebene beliebig ist, und welche selbst $3n-1$ gegebene $[n-1]$ berühren.

Erste Bemerkung zu dem durch F. (38) *ausgesprochenen Resultat:* Die Bedingung $(0, 1, 2, \ldots, p)$ spricht aus, dass der $[p]$ des R_p gegeben ist. Dieser $[p]$ wird nun von dem $[n-1]$ jeder der $\frac{1}{2}p(p+3)$ gegebenen Bedingungen μ_1 in einem $[p-1]$ geschnitten, der von dem R_p zu berühren ist. Die zu der Berührung eines $[p-1]$ innerhalb eines $[p]$ duale Bedingung ist aber die, dass der R_p durch einen im $[p]$ gegebenen Punkt gehen soll. Folglich ist die zu

$$(0, 1, 2, \ldots, p)\,\mu_1^{\frac{1}{2}p(p+3)}$$

im $[p]$ dual entsprechende, also numerisch damit identische Anzahl die Anzahl derjenigen R_p, welche durch $\frac{1}{2}p(p+3)$ im $[p]$ gegebene Punkte gehen. Diese Zahl ist aber, wie rein *algebraisch* evident ist, *gleich* 1. Folglich ist auch

$$(0, 1, 2, \ldots, p)\,\mu_1^{\frac{1}{2}p(p+3)} = 1.$$

Demnach ist, wegen F. (39), auch:

$$\psi(0, 1, 2, \ldots, p) = 1. \tag{42}$$

Der Verfasser hat sich *vergeblich* bemüht, dieses interessante Resultat auch rein arithmetisch, allein aus der Definition von ψ, zu beweisen.

Zweite Bemerkung zu F. (39): Bei den linearen Räumen war es dem Verfasser gelungen, die Anzahl, welche der hier gefundenen analog ist, explicite durch die gegebenen Zahlen $a_0, a_1, \ldots, a_p$ auszudrücken, wie in § 1 angegeben ist. Die entsprechende Anzahl (Acta mathem. Bd. 8, S. 117) war das Product einer Determinante mit einem Quotienten von Producten, sodass jeder Factor eines solchen Products die Facultät einer ganzen Zahl war. Es liegt daher nahe, zu untersuchen, ob sich nicht auch

$$\psi(a_0, a_1, \ldots, a_p)$$

in ähnlicher Weise durch $a_0, a_1, \ldots, a_p$ ausdrücken lässt. In der hiermit angedeuteten Untersuchungsrichtung ist jedoch der Verfasser bisher nur zu zwei *speciellen* Formeln gelangt, welche sich beide auf den Fall beziehen, dass $a_i = n - p + i$ ist. Diese schon auf der Hallenser Versammlung der Deutschen Math. (vergl. die „Berichte") mitgetheilten Formeln lauten folgendermassen:

(43) Wenn p *ungerade* ist, so ist

$$\psi(n-p,\ n-p+1, \ldots, n) = \frac{[0!\,2!\ldots(p-1)!]\,[(2n-2p+1)!\,(2n-2p+3)!\ldots(2n-p)!]}{(n-p)!\,(n-p+1)!\ldots(n-1)!\,n!}.$$

(44) Wenn p *gerade* ist, so ist

$$\psi(n-p,\ n-p+1, \ldots, n) = \frac{[1!\,3!\ldots(p-1)!]\,.\,2^{n-p}\,.\,[(2n-2p+2)!\,(2n-2p+4)!\ldots(2n-p)!]}{(n-p+1)!\,(n-p+2)!\ldots(n-1)!\,n!}.$$

Man bemerke, dass bei der Anzahlfunction für *lineare* Räume Producte der Facultäten von Zahlen auftreten, die sich um eins unterscheiden, während bei den beiden durch die F. (43) und (44) dargestellten, auf Räume *zweiten* Grades bezüglichen Anzahlfunctionen Producte der Facultäten von Zahlen auftreten, die sich um *zwei* unterscheiden.

§ 8.

Anzahlfunction für $(a_0 a_1 \ldots a_p)\, \mu_1^{m_1} \mu_2^{m_2}$ beim R_p.

Der Weg, den der Verfasser beschreiten musste, um die Anzahlfunctionen für Räume zweiten Grades *aufzufinden*, ist länger, als der Weg, auf dem sie bewiesen werden können. Bei dem ersten Wege hat man von der oben behandelten Raumincidenz aus durch viele Ausartungen hindurch allmählig zum R_p voranzuschreiten. Wenn aber so erst einmal die Gestalt der gesuchten Anzahlfunction vorliegt, so kann ihr Beweis durch den Schluss von $m_k - 1$ auf m_k vermöge der Formel (9) geführt werden. Denn diese ergiebt:

$$(45)\quad (p+2-k)\mu_1^{m_1}\mu_2^{m_2}\ldots\mu_k^{m_k} = (p+1-k).\mu_1^{m_1}\mu_2^{m_2}\ldots\mu_{k-1}^{m_{k-1}+1}\mu_k^{m_k-1}$$
$$+ 2e\mu_1^{m_1}\mu_2^{m_2}\ldots\mu_k^{m_k-1} + \varphi_0\mu_1^{m_1}\mu_2^{m_2}\ldots\mu_k^{m_k-1},$$

wo links und bei jedem der drei Addenden rechts noch die Bedingung $(a_0 a_1 \ldots a_p)$ hinzuzudenken ist. Der Werth des zweiten Addenden rechts ergiebt sich dabei aus F. (5) und F. (30) bis (34), der des dritten Addenden aus F. (2). Für $m_k = 0$ muss die zu beweisende Anzahlfunction sich auf die für $(a_0 a_1 \ldots a_p)\, \mu_1^{m_1} \mu_2^{m_2} \ldots \mu_{k-1}^{m_{k-1}}$ gefundene reduciren, die vorher bewiesen sein muss. Ausserdem aber ist wegen des aus F. (2) folgenden dritten Addenden nothwendig. dass die zu beweisende Anzahlfunction für das denkbar kleinste p als richtig erkannt ist. Denn die Anwendung derselben auf φ_0 setzt voraus, dass sie für $p-1$ und $m_k - 1$ gültig ist. Das denkbar kleinste p aber ist, falls alle Bedingungen μ_1 bis μ_k gegeben sind, $p = k - 1$. Dann wird jedoch μ_k mit μ_{p+1} identisch und μ_{p+1} wird zu $2.e$. Denn e bedeutet, dass der $[p]$ des R_p einen gegebenen $[n-p-1]$ einpunktig trifft; und μ_{p+1} verlangt, dass der R_p einen gegebenen $[n-p-1]$ berührt, was der R_p nur dadurch vermag, dass der als doppelt vorausgesetzte $[p]$ den $[n-p-1]$ schneidet. Demnach kann man die Definition der μ_1 bis μ_p auch noch auf μ_{p+1} ausdehnen, indem man setzt:

$$(46)\qquad e = \frac{1}{2}\mu_{p+1}.$$

Hiernach muss die zu beweisende Anzahlfunction auch noch der Bedingung unterliegen, dass sie, für $p = k - 1$ specialisirt, die Gleichung (46) erfüllt.

Das hierdurch gekennzeichnete Beweisverfahren soll hier für $k = 2$ und in § 9 für $k = 3$ durchgeführt werden.

Um die vom Verfasser gefundene Anzahlfunction für

$$(a_0 a_1 \ldots a_p)\, \mu_1^{m_1} \mu_2^{m_2}$$

kürzer ausdrücken zu können, führen wir noch folgende abkürzende Bezeichnungen ein:

(47) $\psi \equiv \psi(a_0 a_1 \ldots a_p)$,

(48) $\psi_i \equiv \psi(a_0 a_1 \ldots a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_p)$,

(49) $\psi_{ik} \equiv \psi(a_0 a_1 \ldots a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_{k-1}, a_{k+1}, \ldots, a_p)$,

woraus sich die Bedeutung von ψ', ψ_i' und ψ_{ik}' von selbst ergiebt. Hiernach lautet die zu beweisende Formel:

$$(50)\qquad (a_0 a_1 \ldots a_p)\,\mu_1^{m_1}\mu_2^{m_2} = 2^{m_2}\,.\,\psi - \sum_{i=0}^{i=p}(-1)^{p-i}\,.\,D_i,$$

wo

$$D_i = 2^{a_i}\,.\,\psi_i\,.\sum_{l=0}^{l=a_i-m_1}(m_2)_l$$

ist.

Die Specialisirung auf $p = 1$ ergiebt:

$$(51)\qquad (a_0 a_1)\,\mu_1^{m_1}\mu_2^{m_2} = 2^{m_2}\,\psi(a_0, a_1)$$
$$-\,2^{a_1}\,.\,2^{a_0}\,.\,[(m_2)_0 + (m_2)_1 + \cdots + (m_2)_{a_1-m_1}]$$
$$+\,2^{a_0}\,.\,2^{a_1}\,.\,[(m_2)_0 + (m_2)_1 + \cdots + (m_2)_{a_0-m_1}].$$

Es ist also zu zeigen, ob diese F. (51) der Gleichung (46) genügt. Dies ergiebt sich auf folgende Weise, falls $a_0 > 0$ ist:

$$\begin{aligned}
e(a_0 a_1)\,\mu_1^{m_1}\mu_2^{m_2-1} &= 2^{m_2-1}\,.\,\psi(a_0-1, a_1) + 2^{m_2-1}\,.\,\psi(a_0, a_1-1)\\
&\quad - 2^{a_1}\,.\,2^{a_0-1}[(m_2-1)_0 + \cdots + (m_2-1)_{a_1-m_1}]\\
&\quad - 2^{a_1-1}\,.\,2^{a_0}\,.\,[(m_2-1)_0 + \cdots + (m_2-1)_{a_1-m_1-1}]\\
&\quad + 2^{a_0-1}\,.\,2^{a_1}[(m_2-1)_0 + \cdots + (m_2-1)_{a_0-m_1-1}]\\
&\quad + 2^{a_0}\,.\,2^{a_1-1}[(m_2-1)_0 + \cdots + (m_2-1)_{a_0-m_1}]\\
&= 2^{m_2-1}\,\psi(a_0 a_1) - 2^{a_1+a_0-1}[(m_2)_0 + \cdots + (m_2)_{a_1-m_1}]\\
&\quad + 2^{a_0+a_1-1}[(m_2)_0 + \cdots + (m_2)_{a_0-m_1}]\\
&= \frac{1}{2}(a_0 a_1)\,\mu_1^{m_1}\mu_2^{m_2}.
\end{aligned}$$

Wenn zweitens $a_0 = 0$ ist, so ergiebt sich die Bedingung (46) auf folgende Weise:

$$\begin{aligned}
e(0 a_1)\,\mu_1^{m_1}\mu_2^{m_2-1} &= 2^{m_2-1}\,.\,\psi(0, a_1-1)\\
&\quad - 2^{a_1-1}[(m_2-1)_0 + \cdots + (m_2-1)_{a_1-m_1-1}]\\
&\quad + 2^{a_1-1}[(m_2-1)_0 + \cdots + (m_2-1)_{0-m_1}],
\end{aligned}$$

woraus sich, da $m_2 - 1 = a_1 - m_1$ wegen F. (1) ist, ergiebt:

a) $e(0a_1)\,\mu_1^{m_1}\mu_2^{m_2-1} = 2^{a_1-1} - 2^{m_2-1}$, falls $m_1 > 0$ ist,

b) $e(0a_1)\,\mu_1^{m_1}\mu_2^{m_2-1} = 2^{a_1-1} - 2^{m_2-1} + 2^{a_1-1}$, falls $m_1 = 0$ ist.

Die rechte Seite von a) ist aber identisch mit:

$$2^{m_2-1} \, . \, (2^{a_1} - 1) - 2^{a_1-1}(2^{m_2} - 1)$$
$$= \tfrac{1}{2} \cdot 2^{m_2} \, \psi(0, \; a_1) - \tfrac{1}{2} \cdot 2^{a_1}[(m_2)_0 + \cdots + (m_2)_{a_1-m_1}]$$
$$= \tfrac{1}{2} \, (0, a_1) \, \mu_1^{m_1} \mu_2^{m_2}, \quad \text{falls} \quad m_1 > 0 \quad \text{ist.}$$

Ebenso ist die rechte Seite von b) identisch mit:

$$2^{m_2-1} \, . \, (2^{a_1} - 1) - 2^{a_1-1} \, . \, (2^{m_2} - 1) + 2^{a_1-1}$$
$$= \tfrac{1}{2} \cdot 2^{m_2} \, \psi(0, \; a_1) - \tfrac{1}{2} \cdot 2^{a_1}[(m_2)_0 + \cdots + (m_2)_{a_1-m_1}]$$
$$+ \tfrac{1}{2} \cdot 2^{a_1}[(m_2)_{0-m_1}]$$
$$= \tfrac{1}{2} \, (0, a_1) \, \mu_1^{m_1} \mu_2^{m_2}, \quad \text{falls} \quad m_1 = 0 \quad \text{ist.}$$

Somit gehorcht F. (50) der Bedingung (46).

Um zu zeigen, dass sie auch der Bedingung (45) für $k = 2$ gehorcht, unterwerfen wir zuerst nur den Minuendus $2^{m_2} \psi$ und dann erst jedes Glied D_i dieser Bedingung.

Die rechte Seite von (45) wird für $k = 2$:

$$(p-1) \, . \, (a_0 \, a_1 \, a_2 \ldots a_p) \, \mu_1^{m_1+1} \mu_2^{m_2-1} + 2 \, e(a_0 \, a_1 \ldots a_p) \, \mu_1^{m_1} \mu_2^{m_2-1}$$
$$+ \varphi_0 (a_0 \, a_1 \ldots a_p) \, \mu_1^{m_1} \mu_2^{m_2-1}.$$

Falls $a_0 > 0$ ist, wird hieraus bei Anwendung auf das Glied $2^{m_2} \, . \, \psi$:

$$(p - 1) \cdot 2^{m_2-1} \cdot \psi + 2 \cdot 2^{m_2-1} \, . \, \frac{p+1}{2} \cdot \psi + 0,$$

wo von F. (32) und von F. (2) Gebrauch gemacht ist, sodass sich in der That

$$p \, . \, 2^{m_2} \, . \, \psi$$

ergiebt, d. i. aber das, was die linke Seite von (45) bei $k=2$ verlangt. Falls $a_0 = 0$ ist, kommt:

$$(p - 1) \cdot 2^{m_2-1} \cdot \psi + 2 \cdot 2^{m_2-1} \, . \, \frac{p+1}{2} \cdot \psi - 2 \cdot 2^{m_2-1} \cdot \frac{1}{2} \, \psi(a_1 \, a_2 \ldots a_p)$$
$$+ 2^{m_2-1} \, . \, \psi(a_1 \, a_2 \ldots a_p),$$

wo von F. (33) und von F. (2) Gebrauch gemacht ist. Hieraus ergiebt sich wiederum $p \, . \, 2^{m_2} \, . \, \psi$. Damit ist gezeigt, dass der Minuendus von F. (50) der Gleichung (45) genügt. Wir müssen nun dasselbe von jedem der $p + 1$ Glieder D_i zeigen. Es sei zunächst $a_0 > 0$. Dann kommt:

$$(p - 1) \cdot 2^{a_i} \cdot \psi_i \cdot \sum_{l=0}^{l=a_i-m_1-1} (m_2 - 1)_l + 2 \cdot 2^{a_i-1} \cdot \psi_i \cdot \sum_{l=0}^{l=a_i-1-m_1} (m_2 - 1)_l$$
$$+ 2 \cdot 2^{a_i} \cdot \frac{p}{2} \cdot \psi_i \cdot \sum_{l=0}^{l=a_i-m_1} (m_2 - 1)_l + 0,$$

wo von F. (32) Gebrauch gemacht ist, nachdem man aus den Gliedern, die von $e(a_0 a_1 \ldots a_p)$ herstammen, das Glied $(a_0 a_1 \ldots a_i - 1,\ a_{i+1}, \ldots a_p)$ ausgesondert hat. Beachtet man nun noch, dass

$$(52)\qquad \sum_{l=0}^{l=a_i-m_1-1} (m_2-1)_l + \sum_{l=0}^{l=a_i-m_1} (m_2-1)_l = \sum_{l=0}^{l=a_i-m_1} (m_2)_l$$

ist, so ergiebt sich:

$$p \,.\, 2^{a_i} \,.\, \psi_i \,.\, \sum_{l=0}^{l=a_i-m_1} (m_2)_l = p \,.\, D_i,$$

wie die linke Seite von F. (45) verlangt.

Um D_i für $a_0 = 0$ zu prüfen, setzen wir zuerst $i > 0$ voraus. Dann kommt:

$$(p-1) \,.\, 2^{a_i} \,.\, \psi_i \,.\, \sum_{l=0}^{l=a_i-m_1-1} (m_2-1)_l + 2 \,.\, 2^{a_i-1} \,.\, \psi_i \,.\, \sum_{l=0}^{l=a_i-1-m_1} (m_2-1)_l$$

$$+ 2 \cdot 2^{a_i} \,.\, \psi_i \cdot \frac{p}{2} \cdot \sum_{l=0}^{l=a_i-m_1} (m_2-1)_l - 2 \cdot 2^{a_i} \cdot \frac{1}{2}\, \psi_i(a_1 a_2 \ldots a_p) \sum_{l=0}^{l=a_i-m_1} (m_2-1)_l$$

$$+ 2^{a_i} \,.\, \psi_i(a_1 a_2 \ldots a_p) \,.\, \sum_{l=0}^{l=a_i-m_1} (m_2-1)_l,$$

wo das dritte und vierte Glied aus der Anwendung von Formel (33), das fünfte Glied aus der von F. (2) hervorgegangen ist. Wendet man nun noch beim ersten und dritten Gliede F. (52) an, so erhält man:

$$p \,.\, 2^{a_i} \,.\, \psi_i \,.\, \sum_{l=0}^{l=a_i-m_1} (m_2)_l,$$

also das, was die linke Seite von F. (45) verlangt.

Falls $a_0 = 0$ und auch $i = 0$ ist, erhält man aus F. (50) das Glied:

$$\psi(a_1 a_2 \ldots a_p) \,.\, [(m_2)_{0-m_1}],$$

das nur dann von null verschieden ist, wenn $m_1 = 0$ ist. Aus diesem Gliede erhält man:

$$(p+1) \,.\, \psi(a_1 a_2 \ldots a_p) \,.\, [(m_2-1)_{0-m_1-1}]$$
$$+ 2 \cdot \frac{p}{2}\, \psi(a_1 a_2 \ldots a_p) \,.\, [(m_2)_{0-m_1}] + 0.$$

Hier ist das erste Glied immer null, das zweite nur dann von null verschieden, wenn $m_1 = 0$ ist. Also kommt null, wenn $m_1 > 0$ ist, und $p \,.\, \psi(a_1 a_2 \ldots a_p)$, wenn $m_1 = 0$ ist, in beiden Fällen also das, was F. (45) verlangt.

Somit ist nun von allen Gliedern, welche F. (50) enthält, gezeigt, dass sie der F. (45) unterliegen. Der Beweis der F. (50) ist also vollständig geführt, wenn noch gezeigt wird, dass sie für $m_2 = 0$ sich auf

die in § 7 bewiesene Formel $(a_0 a_1 \ldots a_p)\mu_1^{m_1} = \psi(a_0 a_1 \ldots a_p)$ reducirt. Dies ist der Fall, da alle Glieder D_i verschwinden müssen, weil in ihnen die obere Grenze des Summenzeichens Σ kleiner als die untere wird. Denn aus F. (1) folgt:

$$a_i - m_1 = -p - (a_0 + a_1 + \cdots + a_{i-1} + a_{i+1} + \cdots + a_p),$$

also eine in allen Fällen negative Zahl.

Es wird nicht überflüssig erscheinen, wenn wir F. (50) auf den Kegelschnitt und die Fläche zweiten Grades anwenden, d. h. sie für $p = 2$ und $p = 3$ specialisiren. Dabei sollen die auftretenden Glieder einzeln, d. h. ohne Summenzeichen, angeschrieben werden:

1) Für den *Kegelschnitt* ist:

$$(53)\quad \begin{aligned}(a_0 a_1 a_2)\mu_1^{m_1}\mu_2^{m_2} &= 2^{m_2}.\psi(a_0 a_1 a_2)\\ &- \psi(a_0 a_1).2^{a_2}.[(m_2)_0 + (m_2)_1 + \cdots + (m_2)_{a_2 - m_1}]\\ &+ \psi(a_0 a_2).2^{a_1}.[(m_2)_0 + (m_2)_1 + \cdots + (m_2)_{a_1 - m_1}]\\ &- \psi(a_1 a_2).2^{a_0}.[(m_2)_0 + (m_2)_1 + \cdots + (m_2)_{a_0 - m_1}].\end{aligned}$$

Diese Formel schliesst die Untersuchung für den Kegelschnitt schon ab, da derselbe ausser den auf die Lage seiner Ebene bezüglichen Bedingungen keine anderen elementaren Lagebedingungen als μ_1 und μ_2 besitzt. Beispielsweise entsteht die bekannte Zahl 92 der Kegelschnitte, welche acht in unserm Raume gegebene Strahlen schneiden, aus F. (53) in folgender Weise:

$$\begin{aligned}(1, 2, 3)\mu_1^0\mu_2^8 &= 2^8.\psi(1, 2, 3) - \psi(1, 2).2^3.[8_0 + 8_1 + 8_2 + 8_3]\\ &+ \psi(1, 3).2^2.[8_0 + 8_1 + 8_2] - \psi(2, 3).2^1.[8_0 + 8_1]\\ &= 2^8.4 - 3.2^3.93 + 10.2^2\cdot 37 - 10.2^1.9 = \mathbf{92}.\end{aligned}$$

2) Für die *Fläche zweiten Grades* ist:

$$(54)\quad \begin{aligned}(a_0 a_1 a_2 a_3)\mu_1^{m_1}\mu_2^{m_2} &= 2^{m_2}.\psi(a_0 a_1 a_2 a_3)\\ &- \psi(a_0 a_1 a_2).2^{a_3}.[(m_2)_0 + (m_2)_1 + \cdots + (m_2)_{a_3 - m_1}]\\ &+ \psi(a_0 a_1 a_3).2^{a_2}.[(m_2)_0 + (m_2)_1 + \cdots + (m_2)_{a_2 - m_1}]\\ &- \psi(a_0 a_2 a_3).2^{a_1}.[(m_2)_0 + (m_2)_1 + \cdots + (m_2)_{a_1 - m_1}]\\ &+ \psi(a_1 a_2 a_3).2^{a_0}.[(m_2)_0 + (m_2)_1 + \cdots + (m_2)_{a_0 - m_1}].\end{aligned}$$

Mit dieser Formel ist die Untersuchung für die Fläche zweiten Grades noch nicht abgeschlossen, da noch die Berücksichtigung der Bedingung μ_3 fehlt. Die allgemeinste Formel für die Fläche zweiten Grades ist F. (64) in § 10. Als numerisches Beispiel diene:

$$\begin{aligned}(0, 1, 2, 3)\mu_1^2\mu_2^7 &= 2^7.\psi(0, 1, 2, 3) - \psi(0, 1, 2).2^3.[7_0 + 7_1]\\ &+ \psi(0, 1, 3), 2^2.7_0 - 0 + 0\\ &= 2^7.1 - 1.2^3.8 + 4.2^2.1 = \mathbf{80},\end{aligned}$$

d. h. die Zahl der zwei gegebene Ebenen und sieben gegebene Strahlen berührenden Flächen zweiten Grades beträgt in unserm Raume 80.

§ 9.

Anzahlfunction für $(a_0 a_1 \ldots a_p)\mu_1^{m_1}\mu_2^{m_2}\mu_3^{m_3}$ beim R_p.

Der im Eingang von § 8 angedeutete Auffindungsweg führte den Verfasser schliesslich zu der folgenden auch μ_3 berücksichtigenden Anzahlfunction:

$$(55)\quad (a_0 a_1 \ldots a_p)\mu_1^{m_1}\mu_2^{m_2}\mu_3^{m_3} = 2^{m_2}.3^{m_3}.\psi - \sum_{i=0}^{i=p}(-1)^{p-i}.D_i$$
$$-\sum_{i=0,\,k=1}^{i=p-1,\,k=p}(-1)^{i+k-1}.E_{ik} + \sum_{i=0,\,k=1}^{i=p-1,\,k=p}(-1)^{i+k-1}.F_{ik},$$

wo D_i, E_{ik}, F_{ik} die folgende Bedeutung haben:

$$\text{a)}\qquad D_i = 2^{a_i}.\psi_i.\sum_{q=0}^{q=m_3}(m_3)_q.\sum_{l=0}^{l=a_i-m_1}(m_3-q+m_2)_l;$$

$$\text{b)}\qquad E_{ik} = \psi(a_i a_k).\psi_{ik}.\sum_{q=0}^{q=a_i+a_k+1-m_1-m_2}(m_3)_q.2^{m_2+q};$$

$$\text{c)}\qquad F_{ik} = 2^{a_i+a_k}.\psi_{ik}.\sum_{q=0}^{q=a_i+a_k+1-m_1-m_2}(m_3)_q.\sum_{l=a_i+1-m_1}^{l=a_k-m_1}(m_2+q)_l\,^{*)}$$

Diese Formel ist bewiesen, wenn sie den Formeln (45) und (46) Genüge leistet, und wenn sie für $m_3 = 0$ sich auf F. (50) reducirt. Das letztere erkennt man leicht, wenn man beobachtet, dass alle Glieder E_{ik} und F_{ik} für $m_3 = 0$ verschwinden müssen, weil bei E_{ik} und bei F_{ik} die obere Grenze des ersten Summenzeichens kleiner als die untere Grenze wird, und zwar wegen F. (1). Ferner bleibt von den Gliedern, die das erste Summenzeichen bei D_i umfasst, nur das erste $0_0 = 1$ übrig, das mit

$$\sum_{l=0}^{l=a_i-m_1}(0-0+m_2)_l$$

zu multipliciren ist. Demnach reducirt sich F. (55) auf die in § 8 bewiesene F. (50), sobald man $m_3 = 0$ setzt. Ausserdem ist noch zu beweisen, dass die obige Formel den Bedingungen (45) und (46) gehorcht. Diesen Beweis wollen wir nur für $a_0 > 0$ vollständig durchführen. Für $a_0 = 0$ ist die Untersuchung analog, nur dass immer zwei Gruppen von Gliedern noch hinzutreten, die eine dadurch, dass

---

*) Die in dieser Formel vorkommenden abkürzenden Zeichen ψ_i und ψ_{ik} sind schon in § 8 (Nr. 48 u. 49) erklärt.

nicht gleich

$$\psi'(0 a_1 \ldots a_p)$$

$$\frac{p+1}{2} \cdot \psi(0 a_1 \ldots, a_p)$$

sondern gleich

$$\frac{p+1}{2} \cdot \psi(0 a_1 \cdots a_p) - \tfrac{1}{2}\, \psi(a_1 a_2 \cdots a_p)$$

ist, die zweite Gruppe dadurch, dass bei $a_0 = 0$ φ_0 nicht null wird F. (2). Alle diese so hinzukommenden Glieder heben sich aber einander auf, gerade so, wie sich das auch in § 8 zeigte.

Wenn $a_0 > 0$ ist, wie also angenommen werden soll, so ist:

$$(56) \qquad e(a_0 a_1 \ldots a_p) = \sum_{i=0}^{i=p} (a_0, a_1, \ldots, a_i - 1, a_{i+1}, \ldots, a_p).$$

Hieraus ergiebt sich zunächst, dass das erste Glied von (55) der Formel (45) gehorcht, weil

$$(p-2) \cdot 2^{m_2+1} . 3^{m_3-1} . \psi + 2 \cdot 2^{m_2} . 3^{m_3-1} . \frac{p+1}{2}\, \psi$$

sich verwandelt in:

$$(p-1) . 2^{m_2} . 3^{m_3} . \psi .$$

Setzt man hier $p = 2$, so ergiebt sich, dass jenes erste Glied auch der Formel (46) gehorcht. Um dasselbe auch für D_i, E_{ik} und F_{ik} einzusehen, setzen wir abkürzend:

$$(57\text{a}) \qquad x_d = \sum_{q=0}^{q=m_1} (m_3)_q \cdot \sum_{l=0}^{l=a_i-m_1} (m_3 - q + m_2)_l ,$$

$$(57\text{b}) \qquad x_e = \sum_{q=0}^{q=a_i+a_k+1-m_1-m_2} (m_3)_q \, . \, 2^{m_2+q} ,$$

$$(57\text{c}) \qquad x_f = \sum_{q=0}^{q=a_i+a_k+1-m_1-m_2} (m_3)_q \cdot \sum_{l=a_i+1-m_1}^{l=a_k-m_1} (m_2 + q)_l ,$$

so dass also:

$$D_i = 2^{a_i} . \psi_i . x_d ; \quad E_{ik} = \psi(a_i a_k) . \psi_{ik} . x_e ; \quad F_{ik} = 2^{a_i + a_k} . \psi_{ik} . x_f$$

sein muss. Im Hinblick auf die Gestalt der Formeln (45), (46) und (56), erkennen wir, dass wir D_i, E_{ik} und F_{ik} in dreierlei Weise umzugestalten haben:

erstens, indem wir $m_3 - 1$ statt m_3, und $m_2 + 1$ statt m_2 setzen;

zweitens, indem wir $m_3 - 1$ statt m_3 setzen, jedes a, das *nicht* den Index i bezw. i oder k hat, um 1 vermindern, die erhaltenen Resultate addiren, und die Summe verdoppeln;

drittens, indem wir $m_3 - 1$ statt m_3 setzen, bei D_i a_i um 1 vermindern, und dann verdoppeln, bei E_{ik} und F_{ik} erst nur a_i, dann nur a_k um 1 vermindern, beide Resultate addiren und die Summe verdoppeln.

Was durch diese drei Umwandlungen aus D_i, E_{ik}, F_{ik} wird, wollen wir beziehungsweise mit

a) $$2^{a_i}.\psi_i.y_d, \quad 2^{a_i}.\psi_i.p.z_d, \quad 2^{a_i}.\psi_i.u_d;$$

b) $$\psi(a_i a_k).\psi_{ik}.y_e, \quad \psi(a_i a_k).\psi_{ik}.(p-1).z_e, \quad \psi(a_i a_k)\psi_{ik}.u_e;$$

c) $$2^{a_i+a_k}.\psi_{ik}.y_f, \quad 2^{a_i+a_k}.\psi_{ik}.(p-1).z_f, \quad 2^{a_i+a_k}.\psi_{ik}.u_f$$

bezeichnen. Wenn nun F. (45) erfüllt sein soll, so muss sein:

$$\begin{aligned}(p-2).y_d + p.z_d + u_d &= (p-1).x_d,\\ (p-2).y_e + (p-1).z_e + u_e &= (p-1).x_e,\\ (p-2).y_f + (p-1).z_f + u_f &= (p-1).x_f.\end{aligned}$$

Und wenn F. (46) erfüllt sein soll, so muss sein:

$$\begin{aligned}2z_d + u_d &= x_d,\\ z_e + u_e &= x_e,\\ z_f + u_f &= x_f.\end{aligned}$$

Diese sechs Gleichungen sind aber erfüllt, sobald die folgenden sechs Gleichungen befriedigt werden:

(58a) $$y_d + z_d = x_d,$$

(59a) $$z_d + u_d = y_d,$$

(58b) $$y_e + z_e = x_e,$$

(59b) $$u_e = y_e,$$

(58c) $$y_f + z_f = x_f,$$

(59c) $$u_f = y_f.$$

Nach dem Obigen ist:

(60a) $$y_d = \sum_{q=0}^{q=m_3-1} (m_3-1)_q . \sum_{l=0}^{l=a_i-m_1} (m_3-1-q+m_2+1)_l .$$

Für z_d ergiebt sich nach Anwendung von F. (32):

(61a) $$z_d = \sum_{q=0}^{q=m_3-1} (m_3-1)_q . \sum_{l=0}^{l=a_i-m_1} (m_3-1-q+m_2)_l .$$

Ferner erhält man:

$$(62\text{a}) \qquad u_d = \sum_{q=0}^{q=m_3-1} (m_3 - 1)_q \cdot \sum_{l=0}^{l=a_i-1-m_1} (m_3 - 1 - q + m_2)_l.$$

Da immer

$$(m_3 - 1 - q + m_2)_l + (m_3 - 1 - q + m_2)_{l-1} = (m_3 - q + m_2)_l$$

ist, und da

$$(m_3 - 1 - q + m_2)_0 = 1 = (m_3 - q + m_2)_0$$

ist, so ergiebt die Summe der rechten Seiten von (61a) und (62a) die rechte Seite von (60a), wodurch F. (59a) bewiesen ist. Um auch F. (58a) als erfüllt zu erkennen, hat man immer von (60a) und (61a) diejenigen Glieder zusammenzufassen, bei denen die zweite Summe identisch wird. Da dies immer solche zwei Glieder sind, die $(m_3 - 1)_q$ und $(m_3 - 1)_{q-1}$ als ersten Factor haben, so erhält man durch Addition von solchen zwei Gliedern:

$$(m_3)_q \cdot \sum_{l=0}^{l=a_i-m_1} (m_3 + m_2 - q)_l.$$

Beachtet man dabei noch bezüglich (61a), dass

$$(m_3 - 1)_{m_3-1} = 1 = (m_3)_{m_3}$$

ist, so erhält man durch Addition der rechten Seite von (60a) und (61a):

$$y_d + z_d = \sum_{q=0}^{q=m_3} (m_3)_q \cdot \sum_{l=0}^{l=a_i-m_1} (m_3 - q + m_2)_l, \quad \text{d. h.} \ = x_d.$$

Um die Formeln (58b) und (59b) zu beweisen, entnehmen wir aus den oben beschriebenen Umgestaltungen:

$$(60\text{b}) \qquad y_e = \sum_{q=0}^{q=a_i+a_k-m_1-m_2} (m_3 - 1)_q \cdot 2^{m_2+q+1};$$

$$(61\text{b}) \qquad z_e = \sum_{q=0}^{q=a_i+a_k+1-m_1-m_2} (m_3 - 1)_q \cdot 2^{m_2+q};$$

$$(62\text{b}) \qquad u_e = 2 \sum_{q=0}^{q=a_i+a_k-m_1-m_2} (m_3 - 1)_q \cdot 2^{m_2+q},$$

wo die rechte Seite von (62b) durch Addition zweier Summen unter Benutzung von

$$\psi(a_i - 1, a_k) + \psi(a_i, a_k - 1) = \psi(a_i a_k)$$

entstanden ist. Der Vergleich von (60b) mit (62b) zeigt unmittelbar

die Uebereinstimmung mit F. (59b). Um auch die F. (58b) als befriedigt zu erkennen, fassen wir von den rechten Seiten von y_e und z_e immer solche zwei Glieder zusammen, die gleiche Potenzen von 2 enthalten. Dadurch kommt, weil

$$(m_3 - 1)_{q-1} + (m_3 - 1)_q = (m_3)_q$$

ist:

$$y_e + z_e = \sum_{q=0}^{q=a_i+a_k-m_1-m_2+1} (m_3)_q . 2^{m_2+q}, \quad \text{d. h.} \quad = x_e.$$

Um endlich auch die Formeln (58c) und (59c) zu prüfen, gehen wir von den folgenden aus den obigen Festsetzungen resultirenden Formeln aus:

$$\text{(60c)} \qquad y_f = \sum_{q=0}^{q=a_i+a_k-m_1-m_2} (m_3 - 1)_q . \sum_{l=a_i+1-m_1}^{l=a_k-m_1} (m_2 + 1 + q)_l;$$

$$\text{(61c)} \qquad z_f = \sum_{q=0}^{q=a_i+a_k+1-m_1-m_2} (m_3 - 1)_q . \sum_{l=a_i+1-m_1}^{l=a_k-m_1} (m_2 + q)_l;$$

$$\text{(62c)} \qquad u_f = \sum_{q=0}^{q=a_i+a_k-m_1-m_2} (m_3 - 1)_q . \sum_{l=a_i-m_1}^{l=a_k-m_1} (m_2 + q)_l$$

$$+ \sum_{q=0}^{q=a_i+a_k-m_1-m_2} (m_3 - 1)_q . \sum_{l=a_i+1-m_1}^{l=a_k-1-m_1} (m_2 + q)_l .$$

Wendet man bei den beiden Addenden in (62c) die Formel

$$(m_2 + q)_{l-1} + (m_2 + q)_l = (m_2 + q + 1)_l$$

wiederholt an, so ergiebt sich daraus:

$$u_f = \sum_{q=0}^{q=a_i+a_k-m_1-m_2} (m_3 - 1)_q . \sum_{l=a_i+1-m_1}^{l=a_k-m_1} (m_2 + q + 1)_l, \quad \text{d. h.} \quad = y_f.$$

Somit ist F. (59c) erfüllt. Um zu zeigen, dass auch F. (58c) erfüllt ist, fassen wir wieder aus y_f und z_f solche zwei Glieder zusammen, welche dieselbe aus dem zweiten Summenzeichen resultirende Summe aufweisen. Eine solche Summe wird bei y_f mit $(m_3 - 1)_{q-1}$ und bei z_f mit $(m_3 - 1)_q$ multiplicirt. Da beide Coefficienten $(m_3)_q$ als Summe haben und da $(m_3 - 1)_0 = 1 = (m_3)_0$ ist, so erhält man:

$$y_f + z_f = \sum_{q=0}^{q=a_i+a_k+1-m_1-m_2} (m_3)_q . \sum_{l=a_i+1-m_1}^{l=a_k-m_1} (m_2 + q)_l, \quad \text{d. i.} \quad = x_f.$$

Hiermit ist gezeigt, dass die 6 Formeln in (58) und (59) erfüllt

werden, woraus folgt, dass auch den Formeln (45) und (46) von der an den Anfang dieses Paragraphen gestellten Anzahlfunction genügt wird.

Als Beispiel für die nunmehr bewiesene Anzahlfunction wählen wir $p=4$, $a_i=i$, $m_1=0$, $m_2=8$, $m_3=6$, d. h. die Anzahl derjenigen dreidimensionalen Räume zweiten Grades, welche, in einem vierdimensionalen linearen Raume liegend, 8 Ebenen und 6 Strahlen berühren, die auch in diesem [4] gelegen sind. Die gesuchte Anzahl ergiebt sich aus F. (55) in folgender Weise:

$$
\begin{aligned}
(0,1,2,3,4)\mu_1^0\mu_2^8\mu_3^6 = {} & 2^8.3^6.\psi(0,1,2,3,4)\\
& -2^4.\psi(0,1,2,3).[6_0.(14_0+14_1+14_2+14_3+14_4)\\
& \qquad +6_1(13_0+13_1+13_2+13_3+13_4)+\cdots\\
& \qquad +6_6(8_0+8_1+8_2+8_3+8_4)]\\
& +2^3.\psi(0,1,2,4).[6_0.(14_0+14_1+14_2+14_3)+\cdots\\
& \qquad +6_6(8_0+8_1+8_2+8_3)]\\
& -2^2.\psi(0,1,3,4),[6_0(14_0+14_1+14_2)+\cdots\\
& \qquad +6_6(8_0+8_1+8_2)]\\
& +2^1.\psi(0,2,3,4).[6_0(14_0+14_1)+\cdots+6_6(8_0+8_1)]\\
& -2^0.\psi(1,2,3,4).[6_0.14_0+\cdots+6_6.8_0]\\
& -\psi(3,4).\psi(0,1,2).[6_0.2^0]\\
& +2^{3+4}.\psi(0,1,2).[6_0.(8_4)]\\
& =186624.1-16.1.[1.1471+6.1093+15.794\\
& \qquad +20.562+15.386+6.256+1.163]\\
& +8.5.[1.470+6.378+15.299+20.232+15.176\\
& \qquad +6.130+1.93]\\
& -4.10.[1.106+6.92+15.79+20.67+15.56\\
& \qquad +6.46+1.37]\\
& +2.10.[1.15+6.14+15.13+20.12+15.11\\
& \qquad +6.10+1.9]\\
& -1.5[1+6+15+20+15+6+1]\\
& -35.1.1+128.1.70=186624-16.38668\\
& +40.15376-40.4336+20.768-5.64\\
& =186624-618688+615040-173440\\
& +15360-320=\mathbf{24576}.
\end{aligned}
$$

Der soeben berechneten Anzahl entspricht dual die Anzahl derjenigen R_4, welche 6 Ebenen und 8 Strahlen berühren, die in einem zu Grunde gelegten [4] liegen. Es ergiebt sich für diese Anzahl gemäss F. (55):

$$
\begin{aligned}
(0,1,2,3,4)\,\mu_1{}^0\mu_2{}^6\mu_3{}^8 = {} & 2^6.3^8.\psi(0,1,2,3,4) \\
& - 2^4.\psi(0,1,2,3).[8_0.(14_0+14_1+14_2+14_3+14_4) \\
& \qquad +8_1.(13_0+\cdots+13_4)+\cdots \\
& \qquad +8_8.(6_0+\cdots+6_4)] \\
& + 2^3.\psi(0,1,2,4).[8_0.(14_0+\cdots+14_3)+\cdots \\
& \qquad +8_8(6_0+\cdots+6_3)] \\
& - 2^2.\psi(0,1,3,4).[8_0.(14_0+14_1+14_2)+\cdots \\
& \qquad +8_8(6_0+6_1+6_2)] \\
& + 2^1.\psi(0,2,3,4).[8_0(14_0+14_1)+\cdots+8_8(6_0+6_1)] \\
& - 2^0.\psi(1,2,3,4).[8_0.14_0+\cdots+8_8.6_0] \\
& - \psi(3,4).\psi(0,1,2).[8_0.2^6+8_1.2^7+8_2.2^8] \\
& + \psi(2,4).\psi(0,1,3).[8_0.2^6+8_1.2^7] \\
& - \psi(1,4).\psi(0,2,3).[8_0.2^6] \\
& - \psi(2,3).\psi(0,1,4).[8_0.2^6] \\
& + 2^7.\psi(0,1,2).[8_1.(6_4)+8_1.(7_4)+8_2.(8_4)] \\
& - 2^6.\psi(0,1,3).[8_0.(6_3+6_4)+8_1.(7_3+7_4)] \\
& + 2^5.\psi(0,2,3).[8_0.(6_2+6_3+6_4)] \\
& + 2^5.\psi(0,1,4).[8_0.(6_3)] \\
& = 419904-16.1[1.1471+8.1093+28.794 \\
& \qquad +56.562+70.386+56.256 \\
& \qquad +28.163+8.99+1.57] \\
& + 8.5.[1.470+8.378+28.299+56.232+70.176 \\
& \qquad +56.130+28.93+8.64+1.42] \\
& - 4.10.[1.106+8.92+28.79+56.67+70.56 \\
& \qquad +56.46+28.37+8.29+1.22] \\
& + 2.10.[1.15+8.14+28.13+56.12+70.11 \\
& \qquad +56.10+28.9+8.8+1.7] \\
& - 1.5.[1+8+28+56+70+56+28+8+1] \\
& - 35.1.64.[1+8.2+28.4]+35.4.64.[1+8.2] \\
& - 25.6.64[1]-10.11.64[1] \\
& +128.1[1.15+8.35+28.70] \\
& - 64.4.[1.35+8.70]+32.6.[1.50] \\
& + 32.11[1.20]=419904-1771008+1904640 \\
& -583680+56320-1280-288960+152320 \\
& -9600-7040+288640-152320+9600 \\
& +7040=\mathbf{24576}.
\end{aligned}
$$

Diese Zahl ist wegen des Dualitätsprincips im [4] mit der resultirenden Zahl des vorigen Beispiels identisch.

§ 10.

Specialisirungen für den Kegelschnitt und für die Fläche zweiten Grades.

Setzt man in F. (55) $p = 2$, so erhält man eine Formel, welche alle durch das Symbol $(a_0 a_1 a_2)\mu_1^{m_1}\mu_2^{m_2}\mu_3^{m_3}$ zusammengefassten *Kegelschnitt*anzahlen ausdrückt. Dabei bedeutet $\mu_3^{m_3}$, dass die doppelt gedachte Ebene, in welcher der Kegelschnitt liegt, m_3 gegebene $[n-3]$ schneiden soll. Die so entstehende Formel ist also etwas allgemeiner, als die F. (53), weil sie für die Ebene des Kegelschnitts nicht bloss die Bedingung $(a_0 a_1 a_2)$, sondern auch noch die Bedingung μ_3 berücksichtigt. Wegen der Kleinheit von p lässt sich diese aus F. (55) entstehende allgemeinere Formel etwas vereinfachen, sodass sie in folgender Weise geschrieben werden kann:

$$(63)\quad (a_0 a_1 a_2)\mu_1^{m_1}\mu_2^{m_2}\mu_3^{m_3} = 2^{m_2}.3^{m_3}.\psi(a_0 a_1 a_2) - G_2 + G_1 - G_0,$$

wo

$$\begin{aligned} G_2 = {} & 2^{m_2}.2^{a_2}.\psi(a_0 a_1)[(m_3)_0 + (m_3)_1.2^1 + \cdots \\ & \qquad \cdots + (m_3)_{a_0+a_1-m_1-m_2+1}.2^{a_0+a_1-m_1-m_2+1}] \\ & + 2^{m_2}.2^{a_2}.\psi(a_0 a_1)[(m_3)_0 + (m_3)_1.2^1 + \cdots + (m_3)_{a_2-m_1-m_2}.2^{a_2-m_1-m_2}] \\ & + 2^{a_2}.\psi(a_0 a_1).\sum_{q=0}^{q=a_0+a_1+1}(m_3)_q.\sum_{l=0}^{l=a_2-m_1}(m_3 - q + m_2)_l \\ & + 2^{a_0+a_1+a_2}.\sum_{q=0}^{q=a_2}(m_3)_q.\sum_{l=a_1+1-m_1}^{l=a_2-m_1}(m_3 - q + m_2)_l; \end{aligned}$$

und wo G_1 und G_0 aus G_2 hervorgehen, wenn man statt des Index 2 bei a die Indices 1 und 0 bevorzugt.

Ebenso lässt sich die Formel vereinfachen, welche sich aus F. (55) für $p = 3$ ergiebt. Dadurch erhält man für die *Fläche zweiten Grades:*

$$\begin{aligned} (64)\quad (a_0 a_1 a_2 a_3)\mu_1^{m_1}\mu_2^{m_2}\mu_3^{m_3} = {} & 2^{m_2}.3^{m_3}.\psi(a_0 a_1 a_2 a_3) - A_{01} + A_{02} - A_{03} \\ & - A_{12} + A_{13} - A_{23} - B_{01} + B_{02} - B_{03} \\ & - B_{12} + B_{13} - B_{23}, \end{aligned}$$

wo

$$\begin{aligned} A_{01} = {} & 2^{m_2}\psi(a_0 a_1)\psi(a_2 a_3)[(m_3)_0 + (m_3).2^1 + \cdots \\ & \qquad \cdots + (m_3)_{a_0+a_1-m_1-m_2+1}.2^{a_0+a_1-m_1-m_2+1}], \end{aligned}$$

$$B_{01} = \psi(a_0 a_1).2^{a_2+a_3}.\sum_{q=0}^{q=a_0+a_1+1}(m_3)_q.\sum_{l=a_2+1-m_1}^{l=a_3-m_1}(m_3 + q + m_2)_l$$

ist und wo die übrigen A und die übrigen B aus A_{01} und B_{01} durch Analogie hervorgehen.

Als Beispiel wählen wir $(0, 2, 3, 4)\,\mu_1{}^4\mu_2{}^4\mu_3{}^4$. Hierfür ergiebt sich bei Fortlassung derjenigen Glieder, die gleich null werden:

$$
\begin{aligned}
&2^4.3^4.\psi(0,2,3,4) - \psi(0,2).\psi(3,4).2^4.4_0.2^0\\
&- \psi(0,2).2^7.[4_0.8_0+4_1.7_0+4_2.6_0+4_3.5_0]\\
&+ \psi(0,3).2^6.[4_0.8_0+4_1.7_0+4_2.6_0+4_3.5_0+4_4.4_0]\\
&- \psi(2,3).2^4.[4_0.8_0+4_1.7_0+4_2.6_0+4_3.5_0+4_4.4_0]\\
&= 1296.10 - 3.35.16 - 3.128.15 + 7.64.16 - 10.16.16 = \mathbf{10128};
\end{aligned}
$$

d. h. es giebt in einem [4] 10128 Flächen zweiten Grades, die den dreidimensionalen linearen Raum, in dem sie liegen, durch einen gegebenen Punkt schicken, und ausserdem 4 gegebene dreidimensionale lineare Räume, 4 gegebene Ebenen und 4 gegebene Strahlen berühren.

Der Vergleich der Formeln (29), (50), (55) zeigt, dass der Uebergang von $m_2 = m_3 = 0$ auf $m_2 > 0$ und $m_3 = 0$ sowie der weitere Uebergang zu dem Fall $m_2 > 0$ und $m_3 > 0$ neue Glieder hinzufügt, sodass anzunehmen ist, dass auch die Formel für

$$(a_0 a_1 a_2 \ldots a_p)\,\mu_1^{m_1}\mu_2^{m_2}\mu_3^{m_3}\mu_4^{m_4}$$

noch andere Glieder enthält, als solche, die durch Setzen von $m_4 = 0$ in die in F. (55) vorhandenen Glieder übergehen. Die Bestimmung dieser andern Glieder und überhaupt der ganz allgemeinen Formel für

$$(a_0\, a_1 \ldots a_p)\,\mu_1^{m_1}\,\mu_2^{m_2} \ldots \mu_p^{m_p}$$

muss einer späteren Untersuchung überlassen bleiben. Wohl aber lässt sich schon jetzt erkennen, dass diese letztere mit dem Gliede:

$$\psi.2^{m_2}.3^{m_3}.4^{m_4}\ldots p^{m_p}$$

beginnen muss, dass dann eine Gruppe von Gliedern folgt, welche aus den D_i der F. (55) so hervorgehen, wie diese aus den D_i der F. (50) entstanden sind, und dass darauf ebenso geartete Verallgemeinerungen der Glieder E_{ik} und F_{ik} folgen müssen.

In der vorliegenden Arbeit des Verfassers sind von den Bedingungen, die sich auf die Punkte, Tangenten, Tangentialebenen u. s. w. eines R_p beziehen, keine andern als die mit μ bezeichneten *einfachen* Bedingungen berücksichtigt. Was die vielfachen anbetrifft, so lassen sich diese leicht durch die Bedingungen μ und $(a_0\, a_1 \ldots a_p)$ ausdrücken, und zwar vermöge der *n-dimensionalen Incidenzformeln*, d. h. der Verallgemeinerungen der von mir im zweiten Abschnitt meines „Kalküls der abzählenden Geometrie“ aufgestellten Formeln. Zu solchen vielfachen elementaren Bedingungen gehört z. B. die i-fache Bedingung, dass der R_p mit einem $[n-p-i+1]$ einen Punkt gemeinsam haben soll, oder die $(2n-2p+1)$-fache Bedingung, dass der R_p einen im $[n]$ beliebig gegebenen Strahl als Tangente haben soll.

Alle Anzahlen, die sich auf derartige vielfache Bedingungen beziehen, lassen sich vermöge der n-dimensionalen Incidenzformeln durch die hier betrachteten Anzahlen ausdrücken.

§ 11.

Anzahlfunction für die kegelartigen Räume zweiten Grades.

Wenn man auf die in § 9 bewiesene Formel für

$$(a_0\, a_1\, \ldots\, a_p)\mu_1^{m_1}\mu_2^{m_2}\mu_3^{m_3}$$

die letzte der unter (3) zusammengefassten Formeln anwendet, so erhält man die Anzahlfunction für φ_{p-1}, und dadurch auch für das in § 2 mit S_{p-1} bezeichnete Gebilde. Da dieses Gebilde S_{p-1} dem R_{p-1} im $[p]$ dual entspricht, und in unserm Raume das zu R_2, d. h. zum Kegelschnitt, duale Gebilde „Kegel" genannt wird, so ist es gerechtfertigt, S_{p-1} als einen *kegelartigen* Raum zweiten Grades zu bezeichnen. Man erhält für dieses Gebilde:

$$(65)\quad (a_0 a_1 \ldots a_p)\mu_1^{m_1}\mu_2^{m_2}\mu_3^{m_3} = \sum_{i=0}^{i=p} D_i.(-1)^{p-i} - \sum_{i=0,\,k=1}^{i=p-1,\,k=p} E_{ik}.(-1)^{i+k-1},$$

wo

$$D_i = 2^{a_i}\cdot\psi_i.\sum_{q=0}^{q=m_1}(m_3)_q.(m_3-q+m_2)_{a_i-m_1}$$

und

$$E_{ik} = 2^{a_i+a_k}.\psi_{ik}.\sum_{q=0}^{q=a_i+a_k-m_1-m_2}(m_3)_q.[(m_2+q)_{a_k-m_1}-(m_2+q)_{a_i-m_1}]$$

ist. Hierbei bedeutet μ_1 die Bedingung, dass der Punkt, von dem der S_{p-1} ausgeht, auf einem gegebenen $[n-1]$ liege, und ist doppelt gerechnet, sodass die rechte Seite von F. (65) noch durch 2^{m_1} zu dividiren ist, wenn man dieses kegelartige Gebilde nicht als einen ausgearteten R_p, sondern für sich betrachten will.

Beispiele zu F. 65):

1) $(0, 1, 2, 3)\mu_1{}^0\mu_2{}^8\mu_3{}^0 = 2^3.\psi(0, 1, 2).0_0.8_3 - 2^2.\psi(0, 1, 3).0_0.8_2$
$+ 2^1.\psi(0, 2, 3).0_0.8_1 - 2^0.\psi(1, 2, 3).0_0.8_0$
$= 2^3.1.8_3 - 2^2.4.8_2 + 2^1.6.8_1 - 2^0.4.1 = \mathbf{92},$

d. h. es giebt in einem [3] 92 Kegel, welche acht gegebene Strahlen berühren.

2) $(0, 1, 2, 3)\mu_1{}^3\mu_2{}^1\mu_3{}^4 = 2^3.\psi(0, 1, 2).[4_0.5_0 + 4_1.4_0 + 4_2.3_0$
$+ 4_3.2_0 + 4_4.1_0]$
$- 2^{2+3}.\psi(0, 1).[4_0.(1_0) + 4_1.(2_0)]$
$+ 2^{1+3}.\psi(0, 2).[4_0.(1_0)] = 16 = 2^3.\mathbf{2},$

d. h. es giebt in einem [3] 2 Kegel, welche bei festem Scheitel einen gegebenen Strahl berühren und durch vier gegebene Punkte gehen.

$$3)\ (0,1,2,3,4)\mu_1^4\mu_2^2\mu_3^7 = 2^4.\psi(0,1,2,3).[7_0.9_0 + 7_1.8_0 + 7_2.7_0 \\ 7_3.6_0 + \cdots + 7_7.2_0] \\ - 2^{3+4}.\psi(0,1,2).[7_0.2_0 + 7_1.3_0] \\ + 2^{2+4}.\psi(0,1,3).[7_0.2_0] = 1280 = 2^4.\mathbf{80},$$

d. h. es giebt in einem [4] 80 kegelartige Räume zweiten Grades, welche bei festem Scheitel zwei gegebene Ebenen und sieben gegebene Strahlen berühren, ein Resultat, aus dem durch duale Umwandelung hervorgeht, dass es in einem [3] 80 Flächen zweiten Grades giebt, welche zwei Ebenen und sieben Strahlen berühren, die in diesem [3] gegeben sind.

$$4)\ (0,1,2,3,4)\mu_1^0\mu_2^{12}\mu_3^1 = 2^4.\psi(0,1,2,3).[1_0.13_4 + 1_1.12_4] \\ - 2^3.\psi(0,1,2,4).[1_0.13_3 + 1_1.12_3] \\ + 2^2.\psi(0,1,3,4).[1_0.13_2 + 1_1.12_2] \\ - 2^1.\psi(0,2,3,4).[1_0.13_1 + 1_1.12_1] \\ + 2^0.\psi(1,2,3,4).[1_0.13_0 + 1_1.12_0] \\ = 2^4.1.1210 - 2^3.5.506 + 2^2.10.144 \\ - 2^1.10.25 + 2^0.5.2 = \mathbf{4390}.$$

Das im [4] duale Analogon zu diesem Ergebniss lautet, dass es im [4] 4390 Flächen zweiten Grades giebt, welche 12 gegebene Strahlen schneiden und 1 gegebene Ebene berühren.

Anhang.

Tabelle aller elementaren Anzahlen für den in einem [4] liegenden dreidimensionalen Raum zweiten Grades.

Da bei weitergehenden Untersuchungen ausser den bekannten auf Kegelschnitte und Flächen zweiten Grades bezüglichen Anzahlen die durch das Bedingungssymbol $(0, 1, 2, 3, 4)\ \mu_1^{m_1}\mu_2^{m_2}\mu_3^{m_3}\mu_4^{m_4}$ zusammengefassten Anzahlen wohl am leichtesten, *auch ihren numerischen Werthen nach*, gebraucht werden könnten, so folgt hier zum Schluss eine vom Verfasser schon in den Mitth. der Hamb. Math. Ges. vom März 1889 veröffentlichte Tabelle dieser Anzahlen. Diejenigen unter ihnen, bei denen m_4 null ist, folgen unmittelbar aus der F. (55) des § 9. Aus ihnen und den bekannten auf Kegelschnitte und Flächen zweiten Grades bezüglichen Anzahlen ergeben sich vermöge der Formeln 3) dann

auch leicht diejenigen Anzahlen, bei denen m_4 nicht null ist. Der Kürze wegen ist von zwei wegen der Dualität gleichen Zahlen immer nur die eine geschrieben. *Es bedeutet also immer* $(m_1, m_2, m_3, m_4) = x$ *sowohl, dass es im* [4] x *Räume zweiten Grades giebt, von denen jeder durch* m_1 *gegebene Punkte geht,* m_2 *gegebene Strahlen,* m_3 *gegebene Ebenen und* m_4 *gegebene* [3] *berührt, als auch dass es im* [4] x *Räume zweiten Grades giebt, von denen jeder durch* m_4 *gegebene Punkte geht,* m_3 *gegebene Strahlen,* m_2 *gegebene Ebenen und* m_4 *gegebene* [3] berührt. Demnach enthält die Tabelle 344 Anzahlen, die aber 680 Bedingungssymbolen entsprechen.

(14, 0, 0, 0) = 1

(13, 1, 0, 0) = 2
(13, 0, 1, 0) = 3
(13, 0, 0, 1) = 4

(12, 2, 0, 0) = 4
(12, 1, 1, 0) = 6
(12, 1, 0, 1) = 8
(12, 0, 2, 0) = 9
(12, 0, 1, 1) = 12
(12, 0, 0, 2) = 16

(11, 3, 0, 0) = 8
(11, 2, 1, 0) = 12
(11, 2, 0, 1) = 16
(11, 1, 2, 0) = 18
(11, 1, 1, 1) = 24
(11, 1, 0, 2) = 32
(11, 0, 3, 0) = 27
(11, 0, 2, 1) = 36
(11, 0, 1, 2) = 48
(11, 0, 0, 3) = 44

(10, 4, 0, 0) = 16
(10, 3, 1, 0) = 24
(10, 3, 0, 1) = 32
(10, 2, 2, 0) = 36
(10, 2, 1, 1) = 48
(10, 2, 0, 2) = 64
(10, 1, 3, 0) = 54
(10, 1, 2, 1) = 72
(10, 1, 1, 2) = 96
(10, 1, 0, 3) = 88
(10 0, 4, 0) = 81
(10, 0, 3, 1) = 108
(10, 0, 2, 2) = 144
(10, 0, 1, 3) = 132
(10, 0, 0, 4) = 86

(9, 5, 0, 0) = 32
(9, 4, 1, 0) = 48
(9, 4, 0, 1) = 64
(9, 3, 2, 0) = 72
(9, 3, 1, 1) = 96
(9, 3, 0, 2) = 128
(9, 2, 3, 0) = 108
(9, 2, 2, 1) = 144
(9, 2, 1, 2) = 192
(9, 2, 0, 3) = 176
(9, 1, 4, 0) = 162
(9, 1, 3, 1) = 216
(9, 1, 2, 2) = 288
(9, 1, 1, 3) = 264
(9, 1, 0, 4) = 172
(9, 0, 5, 0) = 243
(9, 0, 4, 1) = 324
(9, 0, 3, 2) = 432
(9, 0, 2, 3) = 396
(9, 0, 1, 4) = 258
(9, 0, 0, 5) = 137

(8, 6, 0, 0) = 64
(8, 5, 1, 0) = 96
(8, 5, 0, 1) = 128
(8, 4, 2, 0) = 144
(8, 4, 1, 1) = 192
(8, 4, 0, 2) = 256
(8, 3, 3, 0) = 216
(8, 3, 2, 1) = 288
(8, 3, 1, 2) = 384
(8, 3, 0, 3) = 352
(8, 2, 4, 0) = 324
(8, 2, 3, 1) = 432
(8, 2, 2, 2) = 576
(8, 2, 1, 3) = 528
(8, 2, 0, 4) = 344
(8, 1, 5, 0) = 486
(8, 1, 4, 1) = 648
(8, 1, 3, 2) = 864
(8, 1, 2, 3) = 792
(8, 1, 1, 4) = 516
(8, 1, 0, 5) = 274
(8, 0, 6, 0) = 694
(8, 0, 5, 1) = 902

(8, 0, 4, 2) = 1156
(8, 0, 3, 3) = 1048
(8, 0, 2, 4) = 704
(8, 0, 1, 5) = 376
(8, 0, 0, 6) = 188

(7, 7, 0, 0) = 128
(7, 6, 1, 0) = 192
(7, 6, 0, 1) = 256
(7, 5, 2, 0) = 288
(7, 5, 1, 1) = 384
(7, 5, 0, 2) = 512
(7, 4, 3, 0) = 432
(7, 4, 2, 1) = 576
(7, 4, 1, 2) = 768
(7, 4, 0, 3) = 704
(7, 3, 4, 0) = 648
(7, 3, 3, 1) = 864
(7, 3, 2, 2) = 1152
(7, 3, 1, 3) = 1056
(7, 3, 0, 4) = 688
(7, 2, 5, 0) = 972
(7, 2, 4, 1) = 1296
(7, 2, 3, 2) = 1728
(7, 2, 2, 3) = 1584
(7, 2, 1, 4) = 1032
(7, 2, 0, 5) = 548
(7, 1, 6, 0) = 1388
(7, 1, 5, 1) = 1804
(7, 1, 4, 2) = 2312
(7, 1, 3, 3) = 2096
(7, 1, 2, 4) = 1408
(7, 1, 1, 5) = 752
(7, 1 0, 6) = 376
(7, 0, 7, 0) = 1802
(7, 0, 6, 1) = 2216
(7, 0, 5, 2) = 2628

(7, 0, 4, 3) = 2304
(7, 0, 3, 4) = 1552
(7, 0, 2, 5) = 848
(7, 0, 1, 6) = 424
(7, 0, 0, 7) = 212

(6, 8, 0, 0) = 256
(6, 7, 1, 0) = 384
(6, 7, 0, 1) = 512
(6, 6, 2, 0) = 576
(6, 6, 1, 1) = 768
(6, 6, 0, 2) = 1024
(6, 5, 3, 0) = 864
(6, 5, 2, 1) = 1152
(6, 5, 1, 2) = 1536
(6, 5, 0, 3) = 1408
(6, 4, 4, 0) = 1296
(6, 4, 3, 1) = 1728
(6, 4, 2, 2) = 2304
(6, 4, 1, 3) = 2112
(6, 4, 0, 4) = 1376
(6, 3, 5, 0) = 1944
(6, 3, 4, 1) = 2592
(6, 3, 3, 2) = 3456
(6, 3, 2, 3) = 3168
(6, 3, 1, 4) = 2064
(6, 3, 0, 5) = 1096
(6, 2, 6, 0) = 2776
(6, 2, 5, 1) = 3608
(6, 2, 4, 2) = 4624
(6, 2, 3, 3) = 4192
(6, 2, 2, 4) = 2816
(6, 2, 1, 5) = 1504
(6, 2, 0, 6) = 752
(6, 1, 7, 0) = 3604
(6, 1, 6, 1) = 4432
(6, 1, 5, 2) = 5256

(6, 1, 4, 3) = 4608
(6, 1, 3, 4) = 3104
(6, 1, 2, 5) = 1696
(6, 1, 1, 6) = 848
(6, 0, 8, 0) = 4166
(6, 0, 7, 1) = 4728
(6, 0, 6, 2) = 5024
(6, 0, 5, 3) = 4152
(6, 0, 4, 4) = 2736
(6, 0, 3, 5) = 1504

(5, 9, 0, 0) = 512
(5, 8, 1, 0) = 768
(5, 8, 0, 1) = 1024
(5, 7, 2, 0) = 1152
(5, 7, 1, 1) = 1536
(5, 7, 0, 2) = 2048
(5, 6, 3, 0) = 1728
(5, 6, 2, 1) = 2304
(5, 6, 1, 2) = 3072
(5, 6, 0, 3) = 2816
(5, 5, 4, 0) = 2592
(5, 5, 3, 1) = 3456
(5, 5, 2, 2) = 4608
(5, 5, 1, 3) = 4224
(5, 5, 0, 4) = 2752
(5, 4, 5, 0) = 3888
(5, 4, 4, 1) = 5184
(5, 4, 3, 2) = 6912
(5, 4, 2, 3) = 6336
(5, 4, 1, 4) = 4128
(5, 4, 0, 5) = 2192
(5, 3, 6, 0) = 5552
(5, 3, 5, 1) = 7216
(5, 3, 4, 2) = 9248
(5, 3, 3, 3) = 8384
(5, 3, 2, 4) = 5632

(5, 3, 1, 5)	= 3008
(5, 2, 7, 0)	= 7208
(5, 2, 6, 1)	= 8864
(5, 2, 5, 2)	= 10512
(5, 2, 4, 3)	= 9216
(5, 2, 3, 4)	= 6208
(5, 2, 2, 5)	= 3392
(5, 1, 8, 0)	= 8332
(5, 1, 7, 1)	= 9456
(5, 1, 6, 2)	= 10048
(5, 1, 5, 3)	= 8304
(5, 1, 4, 4)	= 5472
(5, 0, 9, 0)	= 8628
(5, 0, 8, 1)	= 8924
(5, 0, 7, 2)	= 8392
(5, 0, 6, 3)	= 6416
(5, 0, 5, 4)	= 4048

(4, 10, 0, 0)	= 1008
(4, 9, 1, 0)	= 1504
(4, 9, 0, 1)	= 2000
(4, 8, 2, 0)	= 2240
(4, 8, 1, 1)	= 2976
(4, 8, 0, 2)	= 3952
(4, 7, 3, 0)	= 3328
(4, 7, 2, 1)	= 4416
(4, 7, 1, 2)	= 5856
(4, 7, 0, 3)	= 5360
(4, 6, 4, 0)	= 4928
(4, 6, 3, 1)	= 6528
(4, 6, 2, 2)	= 8640
(4, 6, 1, 3)	= 7904
(4, 6, 0, 4)	= 5168
(4, 5, 5, 0)	= 7264
(4, 5, 4, 1)	= 9600
(4, 5, 3, 2)	= 12672
(4, 5, 2, 3)	= 11584
(4, 5, 1, 4)	= 7584
(4, 4, 6, 0)	= 10208
(4, 4, 5, 1)	= 13152
(4, 4, 4, 2)	= 16704
(4, 4, 3, 3)	= 15104
(4, 4, 2, 4)	= 10176
(4, 3, 7, 0)	= 13136
(4, 3, 6, 1)	= 16064
(4, 3, 5, 2)	= 18976
(4, 3, 4, 3)	= 16640
(4, 3, 3, 4)	= 11264
(4, 2, 8, 0)	= 15192
(4, 2, 7, 1)	= 17248
(4, 2, 6, 2)	= 18432
(4, 2, 5, 3)	= 15328
(4, 1, 9, 0)	= 15784
(4, 1, 8, 1)	= 16376
(4, 1, 7, 2)	= 15504
(4, 1, 6, 3)	= 11936
(4, 0, 10, 0)	= 14993
(4, 0, 9, 1)	= 14202
(4, 0, 8, 2)	= 12028
(4, 0, 7, 3)	= 8552

(3, 11, 0, 0)	= 1896
(3, 10, 1, 0)	= 2784
(3, 10, 0, 1)	= 3672
(3, 9, 2, 0)	= 4064
(3, 9, 1, 1)	= 5344
(3, 9, 0, 2)	= 7016
(3, 8, 3, 0)	= 5888
(3, 8, 2, 1)	= 7712
(3, 8, 1, 2)	= 10080
(3, 8, 0, 3)	= 9184
(3, 7, 4, 0)	= 8448
(3, 7, 3, 1)	= 11008
(3, 7, 2, 2)	= 14304
(3, 7, 1, 3)	= 13008
(3, 6, 5, 0)	= 11968
(3, 6, 4, 1)	= 15488
(3, 6, 3, 2)	= 19968
(3, 6, 2, 3)	= 18112
(3, 5, 6, 0)	= 16192
(3, 5, 5, 1)	= 20416
(3, 5, 4, 2)	= 25344
(3, 5, 3, 3)	= 22720
(3, 4, 7, 0)	= 20256
(3, 4, 6, 1)	= 24320
(3, 4, 5, 2)	= 28224
(3, 4, 4, 3)	= 24576
(3, 3, 8, 0)	= 23056
(3, 3, 7, 1)	= 25856
(3, 3, 6, 2)	= 27392
(3, 2, 9, 0)	= 23840
(3, 2, 8, 1)	= 24624
(3, 2, 7, 2)	= 23392
(3, 1, 10, 0)	= 22626
(3, 1, 9, 1)	= 21412
(3, 1, 8, 2)	= 18200
(3, 0, 11, 0)	= 20089
(3, 0, 10, 1)	= 17552
(3, 0, 9, 2)	= 13692

(2, 12, 0, 0)	= 3312
(2, 11, 1, 0)	= 4728
(2, 11, 0, 1)	= 6144
(2, 10, 2, 0)	= 6672
(2, 10, 1, 1)	= 8616
(2, 10, 0, 2)	= 11088
(2, 9, 3, 0)	= 9280
(2, 9, 2, 1)	= 11888
(2, 9, 1, 2)	= 15160
(2, 8, 4, 0)	= 12672
(2, 8, 3, 1)	= 16064

$(2, 8, 2, 2) = 20240$
$(2, 7, 5, 0) = 16896$
$(2, 7, 4, 1) = 21120$
$(2, 7, 3, 2) = 26176$
$(2, 6, 6, 0) = 21504$
$(2, 6, 5, 1) = 26112$
$(2, 6, 4, 2) = 31104$
$(2, 5, 7, 0) = 25536$
$(2, 5, 6, 1) = 29568$
$(2, 5, 5, 2) = 33024$
$(2, 4, 8, 0) = 27936$
$(2, 4, 7, 1) = 30336$
$(2, 3, 9, 0) = 28096$
$(2, 3, 8, 1) = 28256$
$(2, 2, 10, 0) = 26172$
$(2, 2, 9, 1) = 24248$
$(2, 1, 11, 0) = 22938$
$(2, 1, 10, 1) = 19704$
$(2, 0, 12, 0) = 19167$
$(2, 0, 11, 1) = 15396$

$(1, 13, 0, 0) = 5284$
$(1, 12, 1, 0) = 7256$
$(1, 12, 0, 1) = 9228$
$(1, 11, 2, 0) = 9784$
$(1, 11, 1, 1) = 12312$
$(1, 10, 3, 0) = 12896$
$(1, 10, 2, 1) = 16008$
$(1, 9, 4, 0) = 16512$
$(1, 9, 3, 1) = 20128$
$(1, 8, 5, 0) = 20352$
$(1, 8, 4, 1) = 24192$
$(1, 7, 6, 0) = 23808$
$(1, 7, 5, 1) = 27264$
$(1, 6, 7, 0) = 26112$
$(1, 6, 6, 1) = 28416$
$(1, 5, 8, 0) = 26688$
$(1, 4, 9, 0) = 25440$
$(1, 3, 10, 0) = 22784$
$(1, 2, 11, 0) = 19396$
$(1, 1, 12, 0) = 15854$
$(1, 0, 13, 0) = 12541$

$(0, 14, 0, 0) = 7703$
$(0, 13, 1, 0) = 10122$
$(0, 12, 2, 0) = 12988$
$(0, 11, 3, 0) = 16192$
$(0, 10, 4, 0) = 19488$
$(0, 9, 5, 0) = 22464$
$(0, 8, 6, 0) = 24576$
$(0, 7, 7, 0) = 25344$

Das vollständige Formensystem dreier cubischen binären Formen.

Von

Frhr. v. Gall in Darmstadt.

§ 1.

Einleitung und Präcisirung der Aufgabe.

Angeregt einerseits durch eine Bemerkung des Herrn Professor Dr. Fr. Meyer in Clausthal, der in seinem Berichte über den Stand der Invariantentheorie das Fehlen ausgeführter Untersuchungen über mehrfach simultane Systeme binärer Formen von höher als 2. Ordnung feststellte, andererseits aber durch die Ueberzeugung angetrieben, dass die Aufstellung eines mehrfach simultanen Systems die ausserordentliche Anwendungsfähigkeit der Syzygantentheorie zeigen könnte, entschloss ich mich das vollständige Formensystem dreier simultanen binären cubischen Formen:

$$f_x^3, \quad \varphi_x^3, \quad \psi_x^3$$

zu geben. Ich schliesse mich hierbei an meine im 31. Bande der Math. Annalen veröffentlichte Arbeit über

„die irreducibelen Syzyganten zweier cubischen binären Formen a_x^3 und α_x^3"

an. Ich ging dort von dem vollen System dieser 2 Formen aus, das bekanntlich aus nachfolgenden 26 *einfach simultanen Formen* besteht:

1) $A = (\Delta\Delta)^2$; $\quad B = (\nabla\nabla)^2$; $\quad C = (\Delta\nabla)^2$; $\quad D = (\Delta\Theta)^2$;
$E = (\nabla\Theta)^2$; $\quad J = (f\varphi)^3$; $\quad \omega = \frac{1}{2}(p\pi)$;

2) $p_x = (\varphi\Delta)^2$; $\quad \pi_x = (f\nabla)^2$; $\quad s_x = (\Delta p)^1$; $\quad t_x = (\Delta\pi)^1$;
$\sigma_x = (\nabla p)^1$; $\quad \tau_x = (\nabla\pi)^1$;

3) $\Delta_x^2 = (ff')^2$; $\quad \nabla_x^2 = (\varphi\varphi')^2$; $\quad \Theta_x^2 = (f\varphi)^2$; $\quad \lambda_x^2 = (fp)^1$;
$\mu_x^2 = (\varphi\pi)^1$; $\quad \nu_x^2 = (f\pi)^1 = -(\varphi p)^1 = -(\Delta\nabla)_1$;

4) $f_x^3 = a_x^3$; $\quad \varphi_x^3 = \alpha_x^3$; $\quad Q_x^3 = (f\Delta)^1$; $\quad K_x^3 = (\varphi\nabla)^1$;
$\xi_x^3 = (f\nabla)^1$; $\quad \xi_x^3 = (\varphi\Delta)^1$;

5) $\vartheta_x^4 = (f\varphi)^1$.

Dieses System wollen wir mit F, Φ und seine einzelnen Formen mit $G, G', G'' \ldots$ bezeichnen. Es bestehen für die Formen f_x^3 und ψ_x^3, sowie für die Formen φ_x^3 und ψ_x^3 die analogen Systeme von *einfach simultanen Formen*

$$F, \Psi \text{ und } \Phi, \Psi$$

bzw. mit den Grundformen

$$G_1' \; G_1'' \; G_1''' \ldots,$$
$$G_2' \; G_2'' \; G_2''' \ldots.$$

Es ist dann z. B.

$$\vartheta = (f\varphi)^1; \quad \vartheta_1 = (f\psi)^1; \quad \vartheta_2 = (\varphi\psi)^1.$$
$$\nabla = (\varphi\varphi')^2; \quad \nabla_1 = (\psi\psi')^2; \quad \nabla_2 = (\psi\psi')^2.$$
$$\pi = (f\nabla)^2; \quad \pi_1 = (f\nabla_1)^2; \quad \pi_2 = (\varphi\nabla_2)^2 \text{ u. s. f.}$$

Für die Grundformen der 3. cubischen Form ψ wählen wir die Bezeichnung

$$\psi_x^3; \quad \delta_x^2 = (\psi\psi')^2; \quad \varkappa_x^3 = (\psi\delta)^1; \quad \mathfrak{A} = (\delta\delta')^2.$$

Es sind dann im System F, Ψ folgende Formen als schon im System F, Φ enthalten auszulassen:

$$f_1 = f; \quad Q_1 = Q; \quad \Delta_1 = \Delta; \quad A_1 = A$$

und alsdann im System $\Phi\Psi$ die weiteren 8 Formen

$$f_2 = \varphi; \quad \varphi_2 = \psi; \quad Q_2 = K; \quad K_2 = \varkappa,$$
$$\Delta_2 = \nabla; \quad \nabla_2 = \delta; \quad A_2 = B; \quad B_2 = \mathfrak{A},$$

wenn wir nun das volle System der *simultanen Grundformen* der binären Formen f, φ, ψ entwickeln wollen. Es enthält dann dieses einen Bestand von

$$26 + 22 + 18 = 66$$

einfach simultanen Formen, zwischen denen selbstredend keine Beziehungen von der Form

$$G_i = \Sigma G^\alpha G_1^\beta G_2^\gamma$$

bestehen können.

Nach allbekannten Sätzen erhält man aber weiter alle *gemischt simultanen Grundformen* durch Ueberschiebungen der Producte

$$U = (G')^{\alpha_1} . (G'')^{\alpha_2} . (G''')^{\alpha_3} \ldots,$$
$$V = \psi^{\beta_1} . \delta^{\beta_2} . \varkappa^{\beta_3} . \mathfrak{A}^{\beta_4},$$

oder durch Faltung der Producte U und V. Enthält eine solche Ueberschiebung aber ein zerfallendes Glied, so ist sie durch niedere Ueberschiebungen darstellbar und daher auszulassen. Wir ordnen nun die Producte U und damit auch die Ueberschiebungen

$$(UV)^\varrho$$

nach der Ordnung der niedrigsten zwei in ihnen vorkommenden

Grundformen G und G'. Bezeichnen wir mit G_x^i, wie üblich, eine Grundform G von der Ordnung i, so erhalten wir als erste Gruppe von Ueberschiebungen diejenigen, bei denen

(1) $$U = G_x \,.\, G_x' \,.\, W$$

ist.

In meiner angeführten Arbeit wurde aber gezeigt, dass alle Producte $G_x \,.\, G_x'$ in der Form $\Sigma(\text{Inv. Cov.})$ darstellbar sind. Es müssen nur die dort gegebenen Syzyganten um eine weitere:

(352)

vermehrt werden. Wir hatten nämlich nur die beiden (352):

$$(352)_1{:}\quad 2\omega\nabla - p\tau + \pi\sigma = 0,$$
$$(352)_2{:}\quad -2\omega\nabla + C\mu - B\lambda - 2E\nu = 0.$$

Aus der ersteren folgt aber unsere Behauptung nur dann, wenn es gelingt eine weitere $(352)_3$ zu entwickeln. Hierzu gelangt man aber leicht durch die erste Ueberschiebung der Syzyganten:

$$(422){:}\quad p^2 = \Sigma\, \text{Inv. Cov.}$$

über Θ, mit der Berücksichtigung, dass

$$(\Theta p)^1 = \frac{1}{2} Jp - t$$

ist, in der Form:

$$(532)_3{:}\quad pt - \frac{1}{2} Jp^2 - \frac{1}{2} A\mu - \frac{1}{2}(C - J^2)\lambda - JD\Theta + \left(C - \frac{1}{2} J^2\right) J\Delta = 0,$$

$$(352)_3{:}\quad \pi\sigma + \frac{1}{2} J\pi^2 - \frac{1}{2} B\lambda - \frac{1}{2}(C - J^2)\mu + JE\Theta - \left(C - \frac{1}{2} J^2\right) J\nabla = 0.$$

Es führen daher mit $G_x \,.\, G_x'$ alle Ueberschiebungen von Producten:

$$U = G_x \,.\, G_x' \,.\, W$$

mit Producten V auf Theile von der Gestalt

$$\Sigma\, \text{Inv. Cov.},$$

und sind dieselben folglich sämmtlich auszulassen.

Wir kommen zunächst zu den Producten:

(2) $$U = G_x^1 \,.\, G_x'^2 \,.\, W.$$

Enthält nun V den Factor δ, so haben wir für jede Ueberschiebung zerfallende Theile von der Form

$$(G_x^2\, \delta)^i \,.\, W \quad (i = 1 \text{ od. } 2).$$

Ist aber in V kein Factor δ enthalten, sondern nur Factoren ψ und $\varkappa$, so giebt es stets zerfallende Theile

$$\left(G_x \,.\, G_x'^2,\ \begin{Bmatrix}\psi\\ \varkappa\end{Bmatrix}\right)^i \,.\, W \quad (i = 1, 2, 3).$$

(3) Das Product $U = G_x^1 . G_x'^3 . W$ liefert ebenfalls nur zerfallende Ueberschiebungen:

$$\left(G_x^3 \begin{Bmatrix}\psi\\ \varkappa\end{Bmatrix}\right)^i_{i=1,2,3} . W \quad \text{oder} \quad (G_x^1 . G_x'^3, \delta^2)^i_{i=1,2,34} . W.$$

(4) Ohne Weiteres erhellt, dass Producte $U = G_x^2 . G_x'^3 . W$ immer die zerfallenden Glieder ergeben

$$(G_x^2, \delta)^i W \quad \text{und} \quad \left(G_x^3, \begin{Bmatrix}\psi\\ \varkappa\end{Bmatrix}\right)^i . W.$$

(5) Da in Folge unserer Syzyganten ($ik5$) alle Producte

$$\vartheta . G_x^1 \equiv \Sigma G_x G_x' G_x''^3 + \Sigma G_x^2 G_x'^3 + \Sigma \,\text{Inv. Cov.} + \Sigma G_x G_x'^2 G_x''^2$$

sind, so gilt dies auch für die Producte

$$U = G_x^1 . G_x'^4 . W.$$

(6) Ist aber $U = G_x^2 . G_x'^2 . W$, so enthalten die Ueberschiebungen mit V immer ein zerfallendes Glied, wenn V den Factor δ besitzt. Im entgegengesetzten Falle erhalten wir für die 4 ersten Ueberschiebungen Theile von der Form

$$\left(G_x^2 . G_x'^2, \begin{Bmatrix}\psi^2\\ \psi\varkappa\\ \varkappa^2\end{Bmatrix}\right)^i . W.$$

Für höhere Ueberschiebungen können wir aus W noch einen zweiten Factor G_x^2 herausziehen, wenn nicht U zu den Formen

$$G_x^2 . G_x'^3 . W \quad \text{oder} \quad G_x^2 . G_x'^4 . W$$

gehören soll, und finden dann die *beizubehaltenden Theile*

$$(G_x^2 . G_x'^2 . G_x''^2, \psi^2)^i . W \quad \text{u. s. w.}$$

(7) Producte $U = G_x^2 . G_x''^2 . W$ geben für $V = \delta . V'$ immer ein zerfallendes Glied. Ist dies aber nicht der Fall, so haben wir bis 3. Ueberschiebung den Theil

$$(G_x^4, \psi)^i W$$

und für alle höheren den Theil

$$\left(G_x^2 . G_x'^4, \begin{Bmatrix}\psi^2\\ \psi\varkappa\\ \varkappa^2\end{Bmatrix}\right)^i . W \quad (i = 4, 5, 6).$$

(8) und (9) Ohne Weiteres ergeben sich zerfallende Ueberschiebungstheile für die Producte:

$$U = G_x^3 . G_x'^3 . W \quad \text{und} \quad U = G_x^3 . G_x'^4 . W.$$

(10) Wegen der Syzygante (228)

$$2\vartheta^2 + \Delta\varphi^2 - 2\Theta f\varphi + \nabla f^2 = 0$$

folgt dies auch für die Producte

$$U = G_x^4 \,.\, G_x'^4 \,.\, W.$$

Wir sehen also, dass alle Ueberschiebungen $(U, V)^\varrho$ auszulassen sind, wenn U mehr als zwei Factoren G enthält, den *einen Fall ausgenommen, dass U ein Product von 3 quadratischen Covarianten G* ist. Wir werden zunächst zeigen, dass auch dann die dabei auftretenden Ueberschiebungen

$$\left(G_x^2 \,.\, G_x'^2 \,.\, G_x''^2, \begin{Bmatrix} \psi^2 \\ \psi\varkappa \\ \varkappa^2 \end{Bmatrix}\right)^i, \quad (i = 5 \text{ oder } 6)$$

überflüssig sind.

Nach den vorangegangenen Untersuchungen kommen dabei aber alle Producte $G_x^2 \,.\, G_x'^2$ nicht in Betracht, die in Folge einer Syzygante auf Ausdrücke

$$\Sigma G_x^3 \,.\, G_x' \quad \text{und} \quad \Sigma \text{ Inv. Cov.}$$

zurückzuführen sind. Wegen der Syzyganten

$$(514)_1 \text{ und } (154)_1; \quad (334)_4 \text{ und } (334)_3; \quad (424)_2 \text{ und } (244)_2;$$
$$(424)_4 \text{ und } (244)_4; \quad (264)_3 \text{ und } (624)_3; \quad (444)_1 \text{ und } (444)_2;$$
$$(534)_1 \text{ und } (354)_1; \quad (334)_1$$

gilt dies aber für die Producte

$$\Delta\lambda \text{ und } \nabla\mu; \quad \Delta\mu \text{ und } \nabla\lambda; \quad \Delta\nu \text{ und } \nabla\nu; \quad \Theta\lambda \text{ und } \Theta\mu;$$
$$\Theta\nu, \;\; \lambda^2, \;\; \lambda\mu, \;\; \lambda\nu, \;\; \mu\nu, \;\; \mu^2, \;\; \nu^2.$$

Die Producte $G_x^2 \,.\, G_x'^2 \,.\, G''x^2$ reduciren sich mithin auf die unter dem Schema

$$\Delta^i \nabla^\varkappa \Theta^\lambda \quad (i + \varkappa + \lambda = 3)$$

enthaltenen. Es lässt sich aber leicht zeigen, dass ein jedes dieser Producte auf die Form

$$\Sigma G_x^3 \,.\, W$$

zu bringen ist. Durch meine Syzyganten

$$(066), \; (156), \; (606), \; (516), \; (336)_2, \; (426)_2, \; (246)_2$$

ergiebt sich die Behauptung sofort für

$$\nabla^3, \; \nabla^2\Theta, \; \Delta^3, \; \Delta^2\Theta, \; \Delta\nabla\Theta, \; \Delta^2\nabla, \; \nabla^2\Delta.$$

Es lassen sich aber die Syzyganten $(ik6)$ so ergänzen, dass dies auch für die übrig bleibenden Producte $\Theta^2\Delta$, $\Theta^2\nabla$ und Θ^3 gilt.

Wenden wir nämlich den Seite 426 der angeführten Arbeit gegebenen Aronhold'schen Process auf die Syzygante

$$(336)_2 : 2\xi\zeta + \Theta\Delta\nabla + Cf\varphi = 0$$

an, so ergeben sich die zwei weiteren:

$$(426)_4:)\ 2\Theta^2\Delta + 4\zeta^2 + 2J\zeta f + 2\xi Q + \Delta^2\nabla + 2Df\varphi + Cf^2 = 0,$$
$$(246)_4:)\ 2\Theta\nabla + 4\xi^2 - 2J\xi\varphi + 2\zeta K + \Delta\nabla^2 + 2Ef\varphi + C\varphi^2 = 0$$

und eine dritte durch nochmalige Anwendung desselben Processes auf die zweite:

$$(336)_4:)\ 4\Theta^3 + 8\Delta\nabla\Theta + 2QK + 22\xi\zeta + 6Jf\xi - 6J\varphi\zeta - 4J^2f\varphi + 10Cf\varphi + 2Ef^2 + 2D\varphi^2 = 0.$$

Bei dem Mangel einer Syzygante mit der Charakteristik Θ^2 ist, nebenbei bemerkt, letztere wieder ein Beispiel einer Grundsyzygante erster Art, *die nicht durch ein binäres Product $G \,.\, G'$ charakterisirt* ist. In Verbindung mit den Relationen für $\Delta^2\nabla$, $\Delta\nabla^2$ und $\Delta\nabla\Theta$ geben die 3 neu aufgestellten Beziehungen den Nachweis, dass auch die Producte Θ^3, $\Theta^2\Delta$ und $\Theta^2\nabla$ in der Form $\Sigma G_x^3 \,.\, W$ darstellbar sind und daher auch die Ueberflüssigkeit jeder Ueberschiebung:

$$(G_x^2 \,.\, G_x'^2 \,.\, G_x''^2,\ V)^\varrho.$$

Unser gemischt simultanes System der 3 Formen f, φ, ψ reducirt sich daher auf Formen von der Gestalt:

$$(G,\ V)^\varrho \quad \text{und} \quad (G \,.\, G',\ V)^\varrho.$$

§ 2.

Formen $(GG',\ V)^\varrho$.

1) Die Formen $(G_x \,.\, G_x',\ V)^\varrho$ führen sämmtlich wegen der Syzyganten $(ik2)$ auf zerfallende Formen

$$\Sigma\ \text{Inv. Cov.}$$

und sind daher auszulassen.

2) Von den Ueberschiebungen $(G_x \,.\, G_x'^2,\ V)^\varrho$ kommen nur die 3ten Ueberschiebungen in Betracht, da wir die Untersuchung aller $(G,\ V)^\varrho$ dem folgenden Paragraphen überlassen wollen. In Folge der Syzyganten $(ik3)$ führen aber sämmtliche Producte $G_x \,.\, G_x'^2$ mit Ausnahme von $p\Theta$ und $\pi\Theta$ auf Aggregate Σ Inv. W zurück. Es bleiben von dieser Gruppe *nur die Formen übrig:*

$$(p\Theta,\ \psi)^3;\quad (p\Theta,\ \varkappa)^3;\quad (\pi\Theta,\ \psi)^3;\quad (\pi\Theta,\ \varkappa)^3.$$

3) Bei den Ueberschiebungen $(G_x^2 \,.\, G_x'^2,\ V)^\varrho$ sind alle diejenigen auszulassen, bei denen $G_x^2 \,.\, G_x'^2$ nicht eines der Producte

$$\Delta^2,\ \Delta\nabla,\ \nabla^2,\ \Delta\Theta,\ \nabla\Theta \quad \text{oder} \quad \Theta^2$$

ist. Denn diese führen wegen unserer Syzyganten $(ik4)$ sämmtlich auf Producte $G_x \,.\, G_x'^3$ der nächsten Gruppe und auf Glieder von der Form Σ Inv. Cov. zurück. Die Syzygante (224):

$$2\Delta\nabla + 2J\vartheta^2 - 2\Theta^2 - \varphi p - f\pi = 0$$

zeigt aber auch die Ueberflüssigkeit des Productes $\Delta . \nabla$. Die Producte Δ^2 und ∇^2 liefern uns rein simultane Formen G_1 und G_2. Weiter können wir von allen Ueberschiebungen absehen, bei denen V den Factor δ enthält. Leicht überzeugt man sich daher, dass alle hierher gehörenden Formen entweder auf Formen der nächsten Gruppe (4) *oder auf die* 3^{ten} *Ueberschiebungen von*

$$\Theta\Delta, \; \Theta\nabla \text{ und } \Theta^2$$

mit ψ und $\varkappa$ zurückführen.

4) Auch bei den Formen:

$$[G_x \,.\, G_x'^3, \; V]^\varrho$$

reducirt sich die Möglichkeit der Combinationen ausserordentlich. Ohne wesentliche Rechnung ergeben nämlich wieder die Syzyganten ($ik4$), dass alle Producte $G_x \,.\, G_x'^3$, von zerfallenden Producten Σ Inv. Cov. abgesehen, auf die folgenden:

$$\varphi\pi; \;\; K\pi; \;\; \varphi p; \;\; f\tau; \;\; Kp; \;\; f\sigma;$$
$$fp; \;\; Qp; \;\; f\pi; \;\; \varphi s; \;\; Q\pi; \;\; \varphi\tau$$

zurückführbar sind. Ohne Weiteres ist klar, dass jede hierher gehörende Form zerfallende Theile liefert, wenn V den Factor ψ oder $\varkappa$ enthält, und dass von den Ueberschiebungen der vorstehenden Producte $G_x \,.\, G_x'^3$ mit V nur solche von der Form:

$$[G_x \,.\, G_x'^3, \; \delta^2]^4$$

übrig bleiben. Unter diesen ist aber

a) $(\varphi\pi, \; \delta^2)^4$ ersetzbar durch den Theil:

$$(\varphi\delta)^2 (\varphi\delta') (\pi\delta') = (\pi \,.\, \pi_2, \; \delta)^2.$$

Das Product $\pi \,.\, \pi_2$ lässt sich aber auch durch eine Syzygante in der Form Σ Inv. Cov. darstellen. Um dies zu beweisen benutzen wir den Process

$$dX = \sum \psi_i \frac{dX}{df_i},$$

für den man die Reductionsformeln:

$$df = \psi; \qquad d\varphi = 0, \qquad d\Delta = 2(f\psi)^2 = 2\Delta_1,$$
$$d\nabla = 0, \qquad d\pi = (\psi\nabla)^2 = \pi_2$$

ohne Weiteres findet.

Wenden wir diesen Process, dessen weitere Entwickelung hier nicht nöthig wird, auf die Syzygante

$$\pi^2 = B\Delta - 2E\Theta + (C - J^2)\nabla - J\mu$$

an, so erhalten wir

$$2\pi \,.\, \pi_2 = \Sigma \text{ Inv. Cov.}$$

und das Ausfallen von

$$(\varphi\pi, \; \delta^2)^4 \text{ und } (f, \; p, \; \delta^2)^4.$$

b) Ebenso leicht lässt sich das Zerfallen von $(K\pi,\ \delta^2)^4$ zeigen, indem wir diese Ueberschiebung durch den Theil:

$$[(K\delta)^2 . \pi,\ \delta']^2 = -(t_2 . \pi,\ \delta)^2 = -[(t_2\delta)^1 \pi]^1$$

ersetzen. Es ist aber $(t_2\delta)$ im System $\varphi\psi$ dieselbe Form wie $(t\nabla)$ im System $f\varphi$. In diesem besteht aber die Relation:

$$(t\nabla) = -A_{f\Theta}\, p - \frac{1}{2} A_{\Delta f}\, \pi - J\sigma = \Sigma \text{ Inv. Cov.}$$

Hierdurch ist aber die Ueberflüssigkeit der Formen:

$$(K\pi,\ \delta^2)^4 \text{ und } (Qp,\ \delta^2)^4$$

erwiesen.

c) Analoges ergiebt sich für die Ueberschiebungen:

$$(Kp,\ \delta^2)^4 \text{ und } (Q\pi,\ \delta^2)^4.$$

Ersetzen wir nämlich die erste durch den Theil

$$[(K\delta)^2 . p,\ \delta']^2 = -(t_2 . p,\ \delta)^2 = [(t_2\delta)\, p],$$

so können wir sofort die gleichen Schlussfolgerungen ziehen.

d) $(f\sigma,\ \delta^2)^4$ liefert den Theil:

$$[(f\delta)^2,\ (\sigma\delta')^1]^1.$$

Da wir aber im nächsten Paragraphen, der von den Formen $(G,\ V)^\varrho$ handelt, den Nachweis erbringen, dass

$$(\sigma\delta)^1 = \Sigma \text{ Inv. Cov.}$$

ist, so können wir auch die Formen:

$$(f\sigma,\ \delta^2)^4 \text{ und } (\varphi t,\ \delta^2)^4$$

auslassen. Ein Gleiches gilt für

$$(f\tau,\ \delta^2)^4 \text{ und } (\varphi s,\ \delta^2)^4.$$

e) *Es bleiben mithin in dieser Gruppe nur die gemischt simultanen Formen übrig:*

$$(\varphi p,\ \delta^2)^4 \text{ und } (f\pi,\ \delta^2)^4.$$

5) Die Ueberschiebungen:

$$(G_x^2 . G_x'^3,\ V)^\varrho$$

liefern stets Theile von der Form:

$$(G_x^2,\ \delta)^i . W \text{ und } (G_x^3,\ \psi)^i . W.$$

6) Dagegen bedürfen

$$(G_x^1 . G_x'^4,\ V)^\varrho \text{ d. i. } (G_x^1 . \vartheta,\ V)^\varrho$$

einer näheren Betrachtung. Enthält V den Factor δ, so liefern diese immer zerfallende Theile:

$$(G_x^4,\ \delta^2)^i . W.$$

Wir können daher voraussetzen, dass V nur Factoren ψ und $\varkappa$ besitzt. Wegen der Syzyganten $(235)_1$ und $(325)_1$ sind aber die Producte ϑp und $\vartheta\pi$ von der Gestalt

$$\Sigma G_x^3 . G_x'^2$$

und demnach ihre Ueberschiebungen mit der vorigen Gruppe überflüssig. Nach den Syzyganten $(255)_1$ und $(525)_1$ ist aber

$$\vartheta\tau \text{ und } \vartheta s = \Sigma \text{ Inv. Cov.}$$

und jede ihrer Ueberschiebungen zerfallend.

Wegen $(345)_1$ und $(435)_1$ hat man

$$\vartheta\sigma \text{ und } \vartheta t = \Sigma G_x \,.\, G_x'^2 \,.\, G_x''^2 + \Sigma G_x \cdot G_x' \,.\, G_x''^3.$$

Daher ergeben auch diese Producte nichts Neues.

7) Bei den

$$(G_x^3 \,.\, G_x'^3,\ V)^\varrho$$

kommen nur solche V in Betracht, die nur aus Potenzen von δ bestehen und, wenn keine zerfallende Theile auftreten sollen, nur solche, bei denen $V = \delta^{3+i}$ ist.

Dann ersetzen wir aber δ^3 durch:

$$\delta^3 = -2\varkappa^2 - \mathfrak{A}\psi^2,$$

und können dann stets wieder zerfallende Theile bilden.

8) Die Ueberschiebungen:

$$(G_x^2 \,.\, G_x'^4,\ V)^\varrho \text{ oder } (G_x^2 \,.\, \vartheta,\ V)^\varrho$$

bedürfen nur dann einer näheren Betrachtung, wenn V aus lauter Factoren ψ und $\varkappa$ besteht. Alsdann erlauben aber die Syzyganten $(ik6)$ den Ersatz der Producte $\vartheta \,.\, G_x^2$ durch

$$\Sigma\, G_x^3 \,.\, \text{Cov.} + \Sigma \text{ Inv. Cov. u. s. w.}$$

9) und 10). Die Ueberschiebungen

$$(G_x^3 \,.\, G_x'^4,\ V)^\varrho \text{ und } (\vartheta^2,\ V)^\varrho$$

endlich, letztere wegen der Syzygante (228), geben stets zerfallende Theile.

Von allen Ueberschiebungen

$$(G \,.\, G',\ V)^\varrho$$

sind daher nur beizubehalten die 6 Invarianten:

$$(p\Theta,\ \psi)^3,\quad (p\Theta,\ \varkappa)^3,\quad (\pi\Theta,\ \psi)^3 \text{ und } (\pi\Theta,\ \varkappa)^3,$$
$$(f\pi,\ \delta^2)^4,\quad (\varphi p,\ \delta^2)^4$$

und die 6 Covarianten erster Ordnung:

$$(\Theta\Delta,\ \psi)^3,\quad (\Theta\nabla,\ \psi)^3,\quad (\Theta^2,\ \psi)^3.$$
$$(\Theta\nabla,\ \varkappa)^3,\quad (\Theta\nabla,\ \varkappa)^3,\quad (\Theta^2,\ \varkappa)^3.$$

§ 3.

Die Ueberschiebungen $(G,\ V)^\varrho$.

1) Formen $(G_x^1,\ V)^\varrho$. *Von allen hierher gehörigen Formen bleiben uns die folgenden übrig:*

$$(p\psi)^1,\ (\pi\psi)^1,\ (p\varkappa)^1,\ (\pi\varkappa)^1,\ (p\delta)^1 \text{ und } (\pi\delta)^1.$$

Die Ueberflüssigkeit aller übrigen hängt wesentlich von der Eigenschaft der Ueberschiebung

$$(s\psi)^1$$

ab. Es lässt sich zeigen, dass diese ein Aggregat zerfallender Glieder ist. Diese allerdings etwas mühsame Zerlegung auszuführen gelingt mit alleiniger Anwendung der von Herrn Professor Gordan in seiner 1875 erschienenen Schrift:

„Ueber das Formensystem binärer Formen"

Seite 11 gegebenen Formel III, die wir abgekürzt durch das Symbol

$$\begin{pmatrix} r_1 & r_2 & r_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{pmatrix} \quad \text{oder kürzer} \quad \begin{pmatrix} r_1 & r_2 & r_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{pmatrix}$$

bezeichnen wollen und weiter durch die bekannten, meist von Gordan und mir gegebenen Entwickelungen von zerfallenden Formen:

$$(G, G')^\varrho.$$

Aus

$$\begin{pmatrix} \Delta^2 & \psi & \varphi \\ 4 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

erhält man:

$$[(\Delta^2\psi)^3\,\varphi]^1 = [(\Delta^2\varphi)^1\,\psi]^3 + \frac{6}{5}[(\Delta^2\varphi)^2\,\psi]^2 + \frac{1}{2}[(\Delta^2\varphi)^3\,\psi]^1.$$

Die rechts stehenden Glieder entwickelt man der Reihe nach, wie folgt:

Aus

$$\begin{pmatrix} \Delta & \Delta & \varphi \\ 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} \xi & \Delta & \psi \\ 3 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

erhält man:

$$[(\Delta^2\varphi)^1\,\psi]^3 = \frac{4}{5}(p\Delta_1\,\psi)^2 - \frac{3}{5}A\Theta_2 - \frac{1}{6}(s\psi)^1 - \Delta\,.\,(\xi\psi)^3.$$

$$\begin{pmatrix} \Delta & \Delta & \varphi \\ 2 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{giebt:} \quad [\Delta^2\varphi)^2\,\psi]^2 = (p\Delta,\,\psi)^2 - \frac{1}{3}A\Theta_2.$$

$[(\Delta^2\varphi)^3\,\psi]^1$ endlich ist $(s\psi)_1$. Die obige Identität geht daher über in:

$$[(\Delta^2\psi)^3\,\varphi]^1 = 2(p\Delta_1,\,\psi)^2 - A\Theta_2 + \frac{1}{3}(s\psi) - \Delta\,.\,(\xi\psi)_3.$$

Besondere Schwierigkeiten bereitet die Aufstellung einer zweiten Gleichung für

$$[(\Delta^2\psi)^3\,\varphi]^1.$$

Eine solche gründet sich auf die aus

$$\begin{pmatrix} \Delta^2 & \psi & \varphi \\ 4 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

folgende Gleichung

$$[(\Delta^2\psi)^2\varphi]^2 + \tfrac{2}{3}[(\Delta^2\psi)^3\varphi]^1 = [(\Delta^2\varphi)^2\psi]^2 + \tfrac{2}{3}[(\Delta^2\varphi)^3\psi]^1.$$

Die Entwickelung des ersten Gliedes der linken Seite:

$$[(\Delta^2\psi)^2\varphi]^2$$

bedarf wieder breiterer Rechnung.

Aus $\begin{pmatrix} \Delta & \Delta & \psi \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ findet man leicht:

$$(\Delta^2, \psi)^2 = \Delta . p_1 - \tfrac{1}{3} A\psi.$$

Die alsdann nöthige 2-Ueberschiebung von Δp_1 ergiebt sich aus

$$\begin{pmatrix} \Delta & p_1 & \varphi \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} \Delta & p_1 & \varphi \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

in der Gestalt:

$$[\Delta p_1, \varphi]^2 = \tfrac{5}{9} p \cdot p_1 + \tfrac{2}{3}(\xi p_1)^1,$$

und man hat daher schliesslich:

$$[(\Delta^2\psi)^2\varphi]^2 = \tfrac{5}{9} p \cdot p_1 + \tfrac{2}{3}(\xi p_1)^1 - \tfrac{1}{3} A\Theta_2.$$

Die vorstehende zweite Relation für

$$[(\Delta^2\psi)^3\varphi]^1$$

geht dann über in:

$$[(\Delta^2\psi)^3\varphi]^1 = \tfrac{3}{2}[(\Delta^2\varphi)^2\psi]^2 + [(\Delta^2\varphi)^3\psi]^1 - \tfrac{3}{2}\Big[\tfrac{5}{9} p p_1 + \tfrac{2}{3}(\xi p_1)^1 - \tfrac{1}{3} A\Theta_2\Big].$$

Die Entwickelung der zwei ersten Glieder rechts ist oben gegeben. Es erübrigt also nur noch die Darstellung von

$$(\xi p_1)^1.$$

Hierzu liefern die Formeln

$$\begin{pmatrix} \Delta & \psi & \xi \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} \xi & \Delta & \psi \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

die Identität:

$$(\xi p_1)^1 = \Delta . (\xi\psi)^3 + 2[(\Delta\xi)^1\psi]^2 - \tfrac{1}{3}[(\Delta\xi)^2\psi]_1.$$

Der Theorie der simultanen Formen zweier f_x^3 entnehmen wir die Gleichungen:

$$(\Delta\xi)^1 = -\frac{2}{3}\Delta p + \frac{1}{2}A\varphi,$$

$$(\Delta\xi)^2 = -\frac{1}{3}s,$$

und finden dann:

$$(\xi p_1)^1 = \Delta.(\xi\psi)^3 - \frac{4}{3}(p\Delta,\psi)^2 + A\Theta_2 + \frac{1}{9}(s\psi)^1.$$

Die gesuchte zweite Relation für

$$[(\Delta^2\psi)^3\varphi]^1$$

lautet dann:

$$[(\Delta^2\psi)^3\varphi]^1 = \frac{17}{6}(p\Delta,\psi)^2 - A\Theta_2 + \frac{8}{9}(s\psi)^1 - \Delta(\xi\psi)^3 - \frac{5}{6}pp_1.$$

Durch Verbindung der beiden Relationen für

$$[(\Delta^2\psi)^3\varphi]^1$$

erhält man endlich:

$$(p\Delta,\psi)^2 + \frac{2}{3}(s\psi)^1 - pp_1 = 0.$$

Da aber unter den Formen $(GG', V)^\varrho$ das erste Glied der linken Seite nicht enthalten ist, bedarf dasselbe noch der Zerlegung. Dieselbe wird sofort erreicht, wenn wir meine Syzygante (413) zweimal über ψ schieben und berücksichtigen, dass nach Analogie des Formensystems von $f\varphi$

$$(Q\psi)^2 = -\frac{1}{2}\lambda_1 + \frac{1}{2}J_1 . \Delta$$

ist.

Man findet:

$$(p\Delta,\psi)^2 = -\frac{2}{2}D\Theta_1 + \frac{2}{3}A . \Theta_2 + \frac{1}{3}J\lambda_1 - \frac{1}{3}JJ_1\Delta$$

und schliesslich die gesuchte Zerlegungsformel:

$$(s\psi)^1 = D\Theta_1 - A\Theta_2 - \frac{1}{2}J\lambda_1 + \frac{1}{2}JJ_1\Delta + \frac{3}{2}pp_1,$$

sowie deren Gegenbild:

$$(\tau\psi)^1 = E\Theta_2 - B\Theta_1 + \frac{1}{2}J\lambda_2 - \frac{1}{2}JJ_2\nabla + \frac{3}{2}\pi p_2.$$

Für eine Reihe weiterer Untersuchungen ist es von Vortheil, den eben gefundenen Werth $(Q\psi)^2$ nicht zu substituiren. Man hat alsdann:

$$(s\psi)_1 = D\Theta_1 - A\Theta_2 + J.(Q\psi)^2 + \frac{3}{2}pp_1$$

und

$$(\tau\psi)_1 = E\Theta_2 - B\Theta_1 - J(K\psi)^2 + \frac{3}{2}\pi p_2.$$

Der Seite 426 meiner Veröffentlichung im 31. Band der Annalen beschriebene Aronhold'sche Process

$$\partial X = \sum f_i \frac{\partial X}{\partial \varphi_i}$$

auf die zweite Darstellung $(\tau\psi)^1$ angewandt, giebt mit Hinzunahme der Gleichungen:

$$\partial\Theta_2 = \Theta_1;\quad \partial\Theta_1 = 0;\quad \partial p_2 = 2(\Theta\psi)^2,$$

$$(\sigma\psi)^1 = -\tfrac{1}{3}J(\pi\psi)^1 - C\Theta_2 + E\Theta_1 + J.(\xi\psi)^2 + \tfrac{1}{2}p p_2 - \pi.(\Theta\psi)^2,$$

und

$$(\tau\psi)^1 = \tfrac{1}{3}J(p\psi)^1 - C\Theta_1 + D\Theta_2 + J\,(\xi\psi)^2 + \tfrac{1}{2}\pi p_1 - p(\Theta\psi)^2.$$

Obgleich hiermit auch schon, wegen der Allgemeinheit von ψ, das Zerfallen der ersten Ueberschiebungen von s, t, σ, τ über $\varkappa$ erwiesen ist, wollen wir doch die leicht auszuführenden Entwickelungen derselben explicite geben. Analog $(s\psi)^1$ hat man:

$$(s\varkappa)^1 = D.(f\varkappa)^2 - A(\varphi\varkappa)^2 + J.(Q\varkappa)^2 + \tfrac{3}{2}p(\varkappa\Delta)^2.$$

In Uebereinstimmung mit den Reductionsformeln für das simultane System $f\varphi$ findet man

$$\begin{aligned}
(f\varkappa)^2 &= -\tfrac{1}{2}\mu_1 - \tfrac{1}{2}J_1\delta,\\
(\varphi\varkappa)^2 &= -\tfrac{1}{2}\mu_2 - \tfrac{1}{2}J_2\delta,\\
(\Delta\varkappa)^2 &= -\sigma_1,\\
(\varkappa Q)^2 &= -\tfrac{1}{2}C_1\Theta_1 + \tfrac{1}{2}E_1\Delta - \tfrac{1}{2}J_1\nu_1 + \tfrac{1}{2}D_1\delta
\end{aligned}$$

und schliesslich

$$\begin{aligned}
(s\varkappa)^1 = &-\tfrac{1}{2}\delta(DJ_1 - JD_1 - AJ_2) - \tfrac{1}{2}D\mu_1 + \tfrac{1}{2}A\mu_2\\
&-\tfrac{1}{2}J(C_1\Theta_1 - E_1\Delta + J_1\nu_1) - \tfrac{3}{2}p\sigma_1,
\end{aligned}$$

sowie:

$$\begin{aligned}
(\tau\varkappa)^1 = &-\tfrac{1}{2}\delta(EJ_2 + JD_2 - BJ_1) - \tfrac{1}{2}E\mu_2 + \tfrac{1}{2}B\mu_1\\
&+\tfrac{1}{2}J(C_2\Theta_2 - E_2\nabla - J_2\nu_2) - \tfrac{3}{2}\pi\sigma_2.
\end{aligned}$$

Auch die Ueberschiebungen von s, t, σ, τ mit δ lassen sich ohne grösseren Aufwand von Rechnung zerlegen. Da aus der Entwickelung von

$$\begin{pmatrix}\psi & s & \psi\\ 3 & 1 & 3\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix}$$

die Relation

$$[(s\psi]^1\psi]_2 = (s\delta)^1$$

folgt, so haben wir zur Darstellung von $(s\delta)^1$ die Gleichung für $(s\psi)^1$ nur zweimal über ψ zu schieben und erhalten:

$$(s\delta)^1 = D(\Theta_1\psi)^2 - A(\Theta_2\psi)^2 + J[(Q\psi)^2\psi]^2 + \tfrac{3}{2}(pp_1, \psi)^2.$$

Die Anwendung des in seinen Anfängen leicht zu übersehenden Processes

$$\partial X = \sum \psi_i \frac{\partial X}{\partial \varphi_i}$$

auf die Syzygante (422):

$$p^2 = \Sigma \text{Inv. Cov.}$$

giebt mit Hülfe der Reductionsformeln:

$$\partial\varphi = \psi; \quad \partial\Delta = 0; \quad \partial p = \partial(\varphi\Delta)^2 = (\psi\Delta)^2 = p_1$$

die Identität:

$$2p.p_1 = \Sigma \text{Inv. Cov.}$$

und weiter die gesuchten Zerlegungen:

$$(s\delta)^1 = \Sigma \text{Inv. Cov.}$$

und

$$(\tau\delta)^1 = \Sigma \text{Inv. Cov.}$$

Unterwerfen wir aber die zweite dem schon öfter angewandten Process (pag. 426 des 31. B. der Ann.)

$$\partial X = \sum f_i \frac{\partial X}{\partial \varphi_i},$$

so ergiebt sich, wegen:

$$\partial\tau = -J\pi - 3\sigma,$$

die Relation:

$$-J(\pi\delta) - 3(\sigma\delta) = \Sigma \text{Inv. Cov.}$$

oder:

$$(\sigma\delta) \text{ und } (\tau\delta) \text{ ebenfalls} = \Sigma \text{Inv. Cov.}$$

Die weitere Ausführung der Rechnung kann leicht nach vollständiger Entwickelung des ersten der eben gebrauchten Aronhold'schen Processe gegeben werden.

2) *Formen* $(G_{\varkappa^2+i}, V)^\varrho$.

Diese liefern, von rein simultanen Ueberschiebungen abgesehen, die Formen:

1) $(\Theta, \psi)^i [i = 1, 2, 3]$; $(\Theta, \varkappa)^i [i = 2, 3]$; $(\Theta, \delta)^i [i = 1, 2]$,

$$\left.\begin{matrix}(\lambda, \psi)^2\\(\mu, \psi)^2\\(\nu, \psi)^2\end{matrix}\right\}; \quad \left.\begin{matrix}(\lambda, \varkappa)^2\\(\mu, \varkappa)^2\\(\nu, \varkappa)^2\end{matrix}\right\}; \quad \left.\begin{matrix}(\lambda, \delta)^2\\(\mu, \delta)^2\\(\nu, \delta)^2\end{matrix}\right\}.$$

2) $\left.\begin{matrix}(\xi, \psi)^i \\ (\xi, \varkappa)^i\end{matrix}\right\}; \left.\begin{matrix}(\zeta, \psi)^i \\ (\zeta, \varkappa)^i\end{matrix}\right\}$; $[i = 2$ und $3]$ $\left.\begin{matrix}(\xi, \delta)^2 \\ (\zeta, \delta)^2\end{matrix}\right\}; \left.\begin{matrix}(\xi, \delta^2)^3 \\ (\zeta, \delta^2)^3\end{matrix}\right\}.$

3) $(\vartheta, \psi)^i$ und $(\vartheta, \varkappa)^i$ [für $i = 2$ und 3];
$(\vartheta, \delta)^2$; $(\vartheta, \delta^2)^3$; $(\vartheta, \psi^2)^4$; $(\vartheta, \psi\varkappa)^4$; $(\vartheta, \psi\delta)^4$; $(\vartheta, \delta^2)^4$; $(\vartheta, \delta\varkappa)^4$.

Die Ueberschiebung $[\vartheta, \varkappa^2]^4$ ist wegen der Syzygante:

$$2\varkappa^2 + \delta^3 + \mathfrak{A}\psi^2 = 0$$

auszulassen.

§ 4.

Reduction der erhaltenen gemischt simultanen Grundformen und der Ersatz der übrigen durch symmetrische Formen.

1) Invarianten.

Nach den vorigen 2 Abschnitten erhielten wir folgende 15 Invarianten gemischt simultanen Charakters:

a) $(\Theta\delta)^2$; $(\xi\psi)^3$; $(\zeta\psi)^3$.
(112) (121) (211)

b) $(\lambda\delta)^3$; $(\mu\delta)^2$; $(\xi\varkappa)^3$; $(\zeta\varkappa)^3$; $(p\Theta, \psi)^3$; $(\pi\Theta, \psi)^3$.
(312) (132) (123) (213) (321) (231)

c) $(\nu\delta)^2$.
(222)

d) $(p\Theta, \varkappa)^3$; $(\pi\Theta, \varkappa)^3$.
(323) (233)

e) $(\vartheta\delta^2)^4$.
(114)

f) $(\varphi p, \delta^2)^4$; $(f\pi, \delta^2)^4$.
(224) (224)

Die Invarianten der Gruppe a) sind ersetzbar durch:

a′) $(\Theta\delta)^2$; $(\Theta_1\nabla)^2$; $(\Theta_2\Delta)^2$;

denn aus $\begin{pmatrix} f & \nabla & \psi \\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} \varphi & \Delta & \psi \\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}$ folgen sofort die Relationen

$$(\xi\psi)^3 = -(\Theta_1\nabla)^2 \quad \text{und} \quad (\zeta\psi)^3 = -(\Theta_2\Delta)^2.$$

Diejenigen der nächsten Gruppe sind identisch mit:

b′) $(\xi\varkappa)^3$; $(\zeta\varkappa)^3$; $(\xi_1 K)^3$; $(\zeta_1 K)^3$; $(\xi_2 Q)^3$ und $(\zeta_2 Q)^3$.
(123) (213) (132) (231) (312) (321)

Man findet nämlich mittelst $\binom{\varphi\,\delta\,Q}{1\;2\;1}$ und der Identität:

$$(\varphi Q)^2 = -\tfrac{1}{2}\lambda + \tfrac{1}{2}J\Delta$$

die Gleichungen:

$$(\lambda\delta)^2 = 2(\xi_2 Q)^3 + JC_1,$$

und

$$(\mu\delta)^2 = 2(\xi_1 K)^3 - JC_2.$$

Wegen meiner Syzygante (323) ist jede Ueberschiebung von $p\Theta$ gleichwerthig mit der von $\pi\Delta$ bis auf Glieder von der Form Σ Inv. Cov. Es ergiebt aber $\binom{\nabla\,\psi\,Q}{2\;1\;1}$ nebst

$$(Q\nabla) = \tfrac{1}{2}\Delta\pi - \tfrac{1}{2}Cf$$

sofort:

$$(\Delta\pi, \psi)^3 = 2(\xi_2 Q)^3 + CJ_1$$

und

$$(\nabla p, \psi)^3 = 2(\xi_1 K)^3 + CJ_2.$$

c) Die Invariante $(\nu\delta)^2$ erscheint in der für die 3 Formen symmetrischen Gestalt

c') $$(\Delta\nabla)(\Delta\delta)(\nabla\delta).$$

Alle übrigen Invarianten sind, wie leicht zu zeigen, überflüssig.

d) $\underset{(323)}{(p\Theta, \varkappa)^3}$ oder das mit ihr gleichwerthige $(\pi\Delta, \varkappa)^3$ oder $[(\Delta\varkappa)^2\pi]^1$ ist identisch mit: $(\sigma_1\pi)^1$ oder:

$$-(\delta p_1)(\delta\pi) = -(p_1 . \pi, \delta)^2.$$

Es lässt sich aber leicht zeigen, dass letztere Form mit

$$p_1 . \pi = \Sigma \text{ Inv. Cov.}$$

ist. Wir hatten nämlich früher die Relationen bewiesen:

$$\pi . \pi_2 = (f\nabla)^2 . (\varphi\delta)^2 = \Sigma J . C.$$

Analog ist aber:

$$p_1 . \pi = (\psi\Delta)^2 . (f\nabla)^2 = \Sigma J . C.$$

Mit $(p\Theta, \varkappa)^3$ ist dann auch $(\pi\Theta, \varkappa)^3$ auszulassen.

e) Die Invariante $(114) = (\vartheta\delta^2)^4$ ist wegen $\binom{f\,\delta^2\,\varphi}{2\;1\;2}$ ersetzbar durch

$$[(f\delta^2)^2\varphi]^3$$

und diese, wegen der aus $\binom{\delta\,f\,\delta}{0\,0\,2}$ hervorgehenden Relation:

$$(f\delta^2)^2 = \pi_1 . \delta - \tfrac{1}{3}\mathfrak{A}f,$$

durch

$$[\pi_1 \,.\, \delta, \varphi]^3.$$

Wie $\pi \,.\, \nabla$ wegen der Syzygante (143) von der Form Σ Inv. Cov. ist, so gilt dies auch für $\pi_1 \,.\, \delta$. Es ist daher auch $(\vartheta\delta^2)^4$ eine überflüssige Form.

f) Es erübrigt noch die Betrachtung der Ueberschiebung:

$$(\varphi p, \delta^2)^4 = [(\varphi\delta^2)^3 p]^1 = -(\tau_2, p)^1.$$

Aus $\begin{pmatrix}\varphi & \Delta & \tau_2 \\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$ folgt aber:

$$(p\tau_2)^1 = [(\varphi\tau_2)^1 \Delta]^2,$$

und mit

$$(f\tau)^1 = \frac{1}{2}(B\Delta - C\nabla) - \pi^2 = \Sigma \text{ Inv. Cov.}$$

haben wir daher:

$$(\varphi\tau_2) = \Sigma \text{ Inv. Cov.}$$

und die Ueberflüssigkeit der beiden Invarianten

$$(\varphi p, \delta^2)^4 \quad \text{und} \quad (f\pi, \delta^2)^4.$$

2) Covarianten 1. Ordnung.

Unsere frühere Betrachtung ergab das Vorhandensein der nachfolgenden Formen:

a) $\underset{(111)}{(\Theta\psi)^2}$ und $\underset{(111)}{(\vartheta\psi)^3}$.

b) $\underset{(311)}{(\lambda\psi)^2}$; $\underset{(131)}{(\mu\psi)^2}$; $\underset{(113)}{(\Theta\varkappa)^2}$; $\underset{(113)}{(\vartheta\varkappa)^3}$; $\underset{(311)}{(\Theta\Delta, \psi)^3}$; $\underset{(131)}{(\Theta\nabla, \psi)^3}$ und $\underset{(113)}{(\vartheta, \psi\delta)^4}$.

c) $\underset{(221)}{(\nu\psi)^2}$; $\underset{(122)}{(\xi\delta)^2}$; $\underset{(212)}{(\zeta\delta)^2}$; $\underset{(212)}{(p\delta)^1}$; $\underset{(122)}{(\pi\delta)^1}$ und $\underset{(221)}{(\Theta^2, \psi)^3}$.

d) $\underset{(313)}{(\lambda\varkappa)^2}$; $\underset{(133)}{(\mu\varkappa)^2}$; $\underset{(313)}{(\Theta\Delta, \varkappa)^3}$; $\underset{(133)}{(\Theta\nabla, \varkappa)^3}$.

e) $\underset{(223)}{(\nu\varkappa)^2}$; $\underset{(223)}{(\Theta^2, \varkappa)^3}$.

f) $\underset{(124)}{(\xi\delta^2)^3}$; $\underset{(214)}{(\zeta\delta^2)^3}$.

g) $\underset{(115)}{(\vartheta, \delta\varkappa)^4}$.

a) Die 2 Covarianten der ersten Gruppe ersetzen wir durch die 3 symmetrischen

a¹) $$(\Theta\psi)^2; \quad (\Theta_1\varphi)^1; \quad (\Theta_2 f)^2,$$

zwischen denen eine lineare Beziehung besteht.

Unsere Behauptung ergiebt sich aus der Entwickelung von $\binom{f\,\varphi\,\psi}{1\,2\,1}$ und den 3 Gleichungen

$$(\vartheta\psi)^3+\tfrac{1}{2}(\Theta\psi)^2=-(\Theta_1\varphi)^2,$$
$$-(\vartheta\psi)^3+\tfrac{1}{2}(\Theta\psi)^2=-(\Theta_2 f)^2,$$
$$(\Theta\psi)^2+(\Theta_1\varphi)^2+(\Theta_2 f)^2=0.$$

b) Die sieben Covarianten (113) u. s. w. lassen sich auf die sechs folgenden zurückführen:

b′) $$(\Theta\varkappa)^2=(113);\quad(\Theta_1 K)^2=(131);\quad(\Theta_2 Q)^2=(311);$$
$$(\vartheta\varkappa)^3=(113);\quad(\vartheta_1 K)^3=(131);\quad(\vartheta_2 Q)^3=(311).$$

Aus der Relation:

$$(\varphi Q)^2=-\tfrac{1}{2}\lambda+\tfrac{1}{2}J\Delta$$

und der Entwickelung $\binom{\varphi\,Q\,\psi}{1\,1\,2}$ folgern wir nämlich zunächst:

$$(\lambda\psi)^2=\quad Jp_1+2(\vartheta_2 Q)^3+(\Theta_2 Q)^2$$

und

$$(\mu\psi)^2=-Jp_2+2(\vartheta_1 K)^3+(\Theta_1 K)^2.$$

Weiter ergeben die Entwickelung von $\binom{\varphi\,Q\,\psi}{1\,2\,1}$ und die Gleichung

$$(\varphi Q)^1=\tfrac{1}{2}(fp-\Delta\Theta):$$

$$\tfrac{1}{2}(fp,\psi)^3-\tfrac{1}{2}(\Delta\Theta,\psi)^3-\tfrac{1}{4}(\lambda\psi)^2+\tfrac{1}{4}Jp_1=-(\Theta_2 Q)^2.$$

Da aber aus $\binom{f\,\psi\,p}{0\,0\,3}$ die weitere folgt:

$$(fp,\psi)^3=J_1.p-\tfrac{3}{4}(\lambda\psi)^2,$$

so ist hiermit auch die Zurückführung von $(\Theta\Delta,\psi)^3$ und $(\Theta\nabla,\psi)^3$ auf die neu gewählten Covarianten geleistet. Eingehendere Rechnung beansprucht die Reduction der letzten Covariante (113)

$$(\vartheta,\psi\delta)^4.$$

Die Entwickelung von $\binom{f\;\;\psi.\delta\;\;\varphi}{2\;\;1\;\;2}$ giebt zunächst:

$$(\vartheta,\psi.\delta)^4=[(f,\psi.\delta)^2\varphi]^3+\tfrac{1}{4}[(f,\psi.\delta)^3\varphi]^2.$$

Der erste Term der rechten Seite ist die 3. Ueberschiebung von

$(f, \psi\delta)^2$ über φ. Für $(f, \psi\delta)^2$ erhält man aber aus $\begin{pmatrix}\psi f \delta\\ 0\,0\,2\end{pmatrix}$, mit Berücksichtigung der Beziehung

$$(f\varkappa)^1 = \tfrac{1}{2}(\psi\pi_1 - \delta\Theta_1),$$

die Gleichung:

$$(f, \psi\delta)^2 = \tfrac{3}{5}\Theta_1.\delta + \tfrac{2}{5}\psi\pi_1.$$

Mit Hinzunahme der aus $\begin{pmatrix}\psi\ \pi_1\ \varphi\\ 0\ 3\ 0\end{pmatrix}$ fliessenden Relation:

$$(\psi\pi, \varphi)^3 = -J_2.\pi_1 - \tfrac{3}{4}(\mu_1\varphi)^2$$

geht daher *der erste Term* rechts über in

$$[(f, \psi\delta)^2\varphi]^3 = \tfrac{3}{5}(\Theta_1\delta, \varphi)^3 - \tfrac{2}{5}J_2\pi_1 - \tfrac{3}{10}(\mu_1\varphi)^2.$$

Die Umformung des zweiten Termes aber knüpft an die aus $\begin{pmatrix}\psi f \delta\\ 1\,0\,2\end{pmatrix}$ resultirende Gleichung

$$(f, \psi\delta)^3 = (\Theta_1\delta)^1 + \tfrac{2}{5}(f\varkappa)^2$$

an, die wegen der bekannten Reductionsformeln:

$$(\Theta_1\delta) = -\tfrac{1}{2}\mu_1$$

und

$$(f\varkappa)^2 = -\tfrac{1}{2}\mu_1 - \tfrac{1}{2}J_1\delta$$

übergeht in:

$$(f, \psi\delta)^3 = -\tfrac{7}{10}\mu_1 - \tfrac{1}{5}J_1\delta.$$

Daher wird *der 2. Term rechts*

$$[(f, \psi\delta)^3\varphi]^2 = -\tfrac{7}{10}(\mu_1\varphi)^2 - \tfrac{1}{5}J_1\pi_2.$$

Wenden wir aber auf $(\mu_1\varphi)^2$ und $(\Theta_1\delta, \psi)^3$ die vorstehend für $(\mu\psi)^2$ und $(\Theta\nabla, \psi)^2$ gegebenen Darstellungen an, so folgt sofort die Zurückführbarkeit von $(\vartheta, \psi\delta)^3$ auf die gegebenen 6 Covarianten.

c) Die Covarianten dieser Gruppe sind auf die folgenden 6 symmetrischen zurückführbar.

$$(\xi\delta)^2 = (122);\quad (\xi_1\nabla)^2 = (122);\quad (\xi_2\Delta)^2 = (212),$$
$$(\zeta\delta)^2 = (212);\quad (\zeta_1\nabla)^2 = (221);\quad (\zeta_2\Delta)^2 = (221).$$

Dies beansprucht aber ebenfalls einige Rechnung. $\begin{pmatrix}\psi\ \Delta\ \nabla\\ 0\ 2\ 1\end{pmatrix}$ liefert die Gleichung:

$$(\zeta, \nabla)^2 + \frac{2}{3}(p_1\nabla)^1 = (p_2\Delta)^1$$

und $\begin{pmatrix} \Delta & \nabla & \psi \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ die zwei weiteren

$$-(\nu\psi)^2 = (\zeta_1\nabla)^2 - \frac{1}{3}(p_1\nabla)^1,$$

$$+(\nu\psi)^2 = (\zeta_2\Delta)^2 - \frac{1}{3}(p_2\Delta)^1.$$

Die Combination der beiden letzteren:

$$(\zeta_1\nabla)^2 - \frac{1}{3}(p_1\nabla)^1 = -(\zeta_2\Delta)^2 + \frac{1}{3}(p_2\Delta)^1$$

giebt in Verbindung mit der ersteren:

$$(p_1\nabla)^1 = \frac{6}{5}(\zeta_1\nabla)^2 + \frac{9}{5}(\zeta_2\Delta)^2$$

und

$$(p_2\Delta)^1 = \frac{6}{5}(\zeta_2\Delta)^2 + \frac{9}{5}(\zeta_1\nabla)^2.$$

Diesen entsprechen aber die gesuchten Reductionsgleichungen:

$$(p\,\delta)^1 = \frac{6}{5}(\zeta\,\delta)^2 = \frac{9}{5}(\xi_2\Delta)^2,$$

$$(\pi\,\delta)^1 = \frac{6}{5}(\xi\,\delta)^2 + \frac{9}{5}(\xi_1\nabla)^2,$$

$$(\nu\psi)^2 = \frac{5}{5}\left\{(\zeta_2\Delta)^2 - (\zeta_1\nabla)^2\right\}.$$

Um endlich die Covariante $(\Theta^2, \psi)^3$ auf die 6 neuen zurückzuführen, schieben wir die Syzygante (224) dreimal über ψ und erhalten:

$$2(\Theta^2, \psi)^3 = 2J(\vartheta\psi)^3 + 2(\Delta\nabla, \psi)^3 - (\varphi p, \psi)^3 - (f\pi, \psi)^3.$$

Da sich aber aus $\begin{pmatrix} \Delta & \nabla & \psi \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} \varphi & p & \psi \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ die Gleichungen ergeben:

$$(\Delta\nabla, \psi)^3 = (p_1\nabla)^1 + \frac{1}{2}(\nu\psi)^2$$

und

$$(\varphi p, \psi)^3 = J_2 \cdot p \quad + \frac{3}{4}(\nu\psi)^2,$$

$$(f\pi, \psi)^3 = J_1 \cdot \pi \quad - \frac{3}{4}(\nu\psi)^2$$

so ist hiermit auch unsere Behauptung für die letzte Covariante $(\Theta^2, \psi)^3$ erwiesen. —

d) Die Covarianten dieser Gruppe sind alle überflüssig, was sich ohne grössere Rechnung ergiebt. Wir knüpfen diesen Nachweis an die bekannte Gleichung an:

$$(\Delta\Theta) = \frac{1}{2}\lambda.$$

Aus $\begin{pmatrix}\Delta\,\Theta\,\varkappa\\ 1\;1\;1\end{pmatrix}$ und mit Benützung der aus der Theorie zweier f_x^3 bekannten Formeln:

$$(\varkappa\Delta)^1 = \tfrac{1}{2}\,\delta p_1 - \tfrac{1}{2}\,C_1\,\psi$$

und

$$(\varkappa\Delta)^2 = -\,\sigma_1$$

erhält man dann:

$$\tfrac{1}{2}\,(\lambda\,\varkappa)^2 = \tfrac{1}{2}\,(\delta p_1\,,\,\Theta)^2 - \tfrac{1}{2}\,C_1.(\psi\,\Theta)^2 + \tfrac{1}{3}\,(\sigma_1\,\Theta)^1.$$

Wegen $\begin{pmatrix}\delta\,p_1\,\Theta\\ 0\;2\;0\end{pmatrix}$ ist aber:

$$(\delta p_1,\,\Theta)^2 + \tfrac{2}{3}\,(\sigma_1\,\Theta)^1 = (\delta\,\Theta)^2\,.\,p_1$$

und

$$(\lambda\,\varkappa)^2 \quad \text{wie} \quad (\mu\,\varkappa)^2 = \Sigma\,\text{Inv. Cov.}$$

Das bei dieser Entwickelung auf beiden Seiten mit gleichen Coefficienten auftretende $(\sigma_1\,\Theta)^1$ zerlegt sich wegen $\begin{pmatrix}f\;\varphi\;\sigma_1\\ 0\;1\;2\end{pmatrix}$ in:

$$-\,(\sigma_1\,\Theta)^1 = [(f\sigma_1)^2\varphi]^2 - \tfrac{1}{2}\,J\sigma_1 = \Sigma\,\text{Inv. Cov.}$$

weil mit

$$(f\sigma) = -\,E\Delta + C\Theta - p\pi$$

auch

$$(f\sigma_1) = \Sigma\,\text{Inv. Cov.}$$

zu setzen ist. Da aber aus $\begin{pmatrix}\Delta\,\Theta\,\varkappa\\ 1\;2\;0\end{pmatrix}$ die Gleichung folgt:

$$(\Theta\,\Delta,\,\varkappa)^3 + \tfrac{1}{4}\,(\lambda\,\varkappa)^2 = -\,(\sigma_1\,\Theta)^1,$$

so zerfallen dann auch die beiden letzten Covarianten der Gruppe d):

$$(\Theta\,\Delta,\,\varkappa)^3 + (\Theta\,\nabla,\,\varkappa)^3.$$

Aber auch die Formen der Gruppen e), f) und g) sind auszulassen.

e) Die erste derselben $(\nu\,\varkappa)^2$ zerlegt sich wegen $\begin{pmatrix}\Delta\,\nabla\,\varkappa\\ 1\;1\;1\end{pmatrix}$ in:

$$(\nu\,\varkappa)^2 = \tfrac{1}{2}\,(C_1 p_2 - C_2\,p_1) + \tfrac{1}{6}\,(\sigma_1\,\nabla)^1.$$

Da aber mit $(\sigma\delta)^1$ auch $(\sigma_1\,\nabla)^1 = \Sigma\,\text{Inv. Cov.}$ ist, so gilt dasselbe auch für $(\nu\,\varkappa)^2$.

Die nächste Covariante $(\Theta^2,\,\varkappa)^3$ ist wegen der Syzygante (224) durch die 3^{ten} Ueberschiebungen von $\varkappa$ mit $\Delta\nabla$, φp und $f\pi$ ersetzbar. Diese zerfallen aber sämmtlich wegen $\begin{pmatrix}\Delta\,\nabla\,\varkappa\\ 1\;2\;0\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}\varphi\,p\,\varkappa\\ 0\;3\;0\end{pmatrix}$, mithin auch die zu untersuchende Form.

f) Die beiden folgenden Grundformen $(\xi\delta^2)^3$ und $(\zeta\delta^2)^3$ erledigen sich gemeinsam.

Aus $\begin{pmatrix} f & \delta^2 & \nabla \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ folgern wir zunächst die Gleichung:

$$-(\xi\delta^2)^3 = [(f\delta^2)\nabla]^2 + \tfrac{1}{3}[(f\delta^2)^3\nabla]^1.$$

Nun ist aber, wie sich aus $\begin{pmatrix} \delta & \delta & f \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ ohne weiteres ergiebt,

$$(f\delta^2)^2 = \pi_1 . \delta - \tfrac{1}{3}\mathfrak{A} f$$

und mithin das erste Glied der rechten Seite mit $\pi\nabla$ und $\pi_1\delta$ (Vergl. die Syz. (143)) von der Form Σ Inv. Cov.

Aus $\begin{pmatrix} \delta & \delta & f \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ folgt weiter, dass das 2. Glied auf $(\tau_1\nabla)^1$ zurückführt, das mit $(\tau\delta)$ ebenfalls zerfällt. Es ist daher auch $(\xi\delta^2)^3$ und

$$(\zeta\delta^2)^3 = \Sigma \text{ Inv. Cov.}$$

g) Aehnlich lässt sich auch das Zerfallen der letzten Covariante

$$(\vartheta, \delta\varkappa)^4 = (115)$$

beweisen.

Die Entwickelung von $\begin{pmatrix} f, & \varkappa\delta, & \varphi \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ giebt nämlich:

$$(\vartheta, \varkappa\delta)^4 = M + \tfrac{1}{4}N = [(f, \varkappa\delta)^2\varphi]^3 + \tfrac{1}{4}[(f, \varkappa\delta)^3\varphi]^2.$$

Da aber wegen $\begin{pmatrix} \delta & \varkappa & f \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ das Zerfallen von $(f, \varkappa\delta)^3$ in Σ Inv. Cov. folgt, so gilt dies auch für N. Um dasselbe für M zu beweisen, entwickeln wir $\begin{pmatrix} \delta & \varkappa & f \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ in:

$$(\delta\varkappa, f)^2 - \tfrac{3}{6}B_1\vartheta_1 = \pi_1\varkappa.$$

Jede 3. Ueberschiebung von $\varkappa.\pi_1$ über eine Form $g_x{}^3$ liefert aber wegen $\begin{pmatrix} \varkappa & \pi_1 & g \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ nur Glieder von der Form Σ Inv. Cov. Es ist mithin auch:

$$[(\delta\varkappa, f)^2\varphi]^3 = M = \Sigma \text{ Inv. Cov.}$$

3) Covarianten 2. Ordnung.

Wir hatten hier die Formen:

a)	$(p\psi)^1$;	$(\pi\psi)^1$;	$(\xi\psi)^1$;	$(\zeta\psi)^1$;	$(\vartheta\delta)^2$;	$(\vartheta\psi^2)^4$;	$(\Theta\delta)^1$,
	(211)	(121)	(121)	(211)	(112)	(112)	(112)

b) $(p\varkappa)^1$; $(\pi\varkappa)^1$; $(\xi\varkappa)^2$; $(\zeta\varkappa)^2$,
(213) (123) (123) (213)

c) $(\vartheta, \psi\varkappa)^4$; $(\vartheta\delta^2)^3$.
(114) (114)

a) Die 7 Formen der ersten Gruppe reduciren sich auf die 6 symmetrischen Formen

$$\text{a}')\quad \begin{aligned}(121) &= (\xi\ \psi)^2; & (211) &= (\zeta\ \psi)^2.\\ (112) &= (\xi_1\varphi)^2; & (211) &= (\zeta_1\varphi)^2,\\ (112) &= (\xi_2 f)^2; & (121) &= (\zeta_2 f)^2.\end{aligned}$$

Diese Zurückführungen erfordern noch einmal eingehendere Rechnung.
Diese Zerlegungen knüpfen wir an die Entwickelungen:

$$\begin{pmatrix}\nabla & f & \psi\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}\nabla & f & \psi\\ 1 & 2 & 0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}f & \psi & \nabla\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$$

und die aus ihnen folgenden Gleichungen:

$$-(\xi\psi)^2 + \tfrac{1}{3}(\pi\psi)^1 = -(\zeta_2 f)^2 + \tfrac{1}{3}(p_2 f)^1;$$

$$(f.\nabla, \psi)^3 - \tfrac{4}{5}(\xi\psi)^2 + \tfrac{1}{6}(\pi\psi)^1 = -(p_2 f)^1;$$

$$J_1.\nabla = (f.\nabla, \psi)^3 + \tfrac{6}{5}(\xi\ \psi)^2 + \tfrac{1}{2}(\pi\psi)^1.$$

Aus diesen folgt sofort durch Elimination von $(p_2 f)^1$ und $(f\nabla, \psi)^3$:

$$\tfrac{2}{9}(\pi\psi)^1 = \tfrac{5}{3}(\xi\psi)^2 - (\zeta_2 f)^2 - \tfrac{1}{3}J_1\nabla,$$

$$\tfrac{2}{9}(p\psi)^1 = \tfrac{5}{3}(\zeta\ \psi)^2 - (\zeta_1\varphi)^2 - \tfrac{1}{3}J_2\Delta$$

und die Reduction der beiden ersten Covarianten der Gruppe auf die neu eingeführten. Die vorstehenden Gleichungen sind einfach übertragbar auf $(p_1\varphi)^1$ und $(\pi_1\varphi)^1$. Damit können wir auch die Ersetzbarkeit der Covarianten $(\Theta\delta)^1$ und $(\vartheta\delta)_2$ ohne weiteres folgern. Aus $\begin{pmatrix}f & \varphi & \delta\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}f & \varphi & \delta\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$ erhalten wir die solches beweisenden Relationen:

$$(\vartheta\delta)^2 + (\Theta\delta)^1 = (\pi_1\varphi)^1$$

und

$$(\Theta\delta)^1 + \tfrac{1}{2}J\delta = (\xi_1\varphi)^2 + \tfrac{2}{3}(\pi_1\varphi)^1.$$

Nicht so einfach gestaltet sich dieser Nachweis für

$$(\vartheta\psi^2)^4.$$

Wegen $\begin{pmatrix} f\,\psi^2\,\varphi \\ 2\;1\;2 \end{pmatrix}$ haben wir:

$$(\vartheta\psi^2)^4 = M + \tfrac{2}{5}N = [(f\psi^2)^2\,\varphi]^3 + \tfrac{2}{5}[(f\psi^2)^3\varphi]^2.$$

und wegen $\begin{pmatrix} \psi\,f\,\psi \\ 0\,0\,2 \end{pmatrix}$:

$$(f\psi^2)^2 = \Theta_1.\psi - \tfrac{3}{10}f\delta$$

und

$$M = R - \tfrac{3}{10}S = (\Theta_1\psi,\,\varphi)^3 - \tfrac{3}{10}(f\delta,\,\varphi)^3.$$

Mit Zuhilfenahme der bekannten Beziehungen:

$$(\psi\Theta_1)^1 = \xi_1 - \tfrac{1}{2}J_1\psi$$

und

$$(\psi\Theta_1) = -\tfrac{1}{2}\pi_1$$

giebt dann $\begin{pmatrix} \psi\;\varphi\;\Theta_1 \\ 0\;0\;3 \end{pmatrix}$

$$R = (\Theta_1\psi,\,\varphi)^3 = -J_2\Theta_1 + \tfrac{3}{5}J_1\Theta_2 - \tfrac{6}{5}(\xi_1\varphi)^2 + \tfrac{1}{4}(\pi_1\varphi)^1.$$

Aus $\begin{pmatrix} f\;\varphi\;\delta \\ 0\;0\;3 \end{pmatrix}$ folgt weiter:

$$S = (f\delta,\,\varphi)^3 = J\delta - \tfrac{6}{5}(\xi_1\varphi)^2 - \tfrac{1}{2}(\pi_1\varphi)^1$$

und die zu beweisende Zurückführbarkeit von M. Dasselbe folgt aus $\begin{pmatrix} \psi\,f\,\psi \\ 0\,0\,3 \end{pmatrix}$ mit den Gleichungen

$$(f\psi^2)^3 = J_1.\psi - \tfrac{3}{10}\xi_1$$

und

$$[(f\psi^2)^3\varphi]^2 = J_1\Theta_2 - \tfrac{3}{10}(\xi_1\varphi)^2$$

auch für N und mithin auch für $(\vartheta\psi^2)^4$.

b) Die 4 Covarianten dieser Gruppe zerfallen sämmtlich.

Aus $\begin{pmatrix} f\;\nabla\;\varkappa \\ 0\;1\;2 \end{pmatrix}$ erhalten wir nämlich

$$(\pi\varkappa)^1 = [(f\varkappa)^1\nabla]^2 + [(f\varkappa)^2\nabla]^1 + \tfrac{1}{3}[f\varkappa]^3.\nabla.$$

Es ist aber

$$(f\varkappa)^1 = \tfrac{1}{2}\left(\psi\pi_1 - \tfrac{1}{9}\delta\Theta_1\right),$$

$$(f\varkappa)^2 = -\tfrac{1}{2}(\mu_1 + J_1\delta),$$

$$(f\varkappa)^3 = E_1.$$

Da aber $(\mu_1 \nabla)^1$ wegen bekannter Eigenschaften der Functionaldeterminanten zerfällt, haben wir ein Gleiches nur nachzuweisen für die zweiten Ueberschiebungen von $\psi\pi_1$ und $\delta\Theta_1$ mit ∇.

Dies folgt aber aus den Entwickelungen von $\begin{pmatrix}\psi & \nabla & \pi_1\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}\delta & \nabla & \Theta_1\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$ mit den Gleichungen

$$(\psi\pi_1, \nabla)^2 = p_2\pi_1 - \tfrac{1}{2}(\mu_1\nabla)^1$$

und

$$(\delta\Theta_1, \nabla)^2 = C_2\Theta_1 - \tfrac{1}{2}(\mu_1\nabla)^1 - \tfrac{1}{3}E_1\nabla$$

ohne weiteres. Es sind also auch $(p\varkappa)^1$ und $(\pi\varkappa)^1$ auszulassen. Aus $\begin{pmatrix}f & \nabla & \varkappa\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix}$ entnehmen wir dann die Gleichung:

$$(\xi\varkappa)^2 + \tfrac{2}{3}(\pi\varkappa)^1 = -\tfrac{1}{2}(\mu_1\nabla)^1 - \tfrac{1}{2}J_1\nu_2 + \tfrac{1}{2}E_1\nabla$$

und die Ueberflüssigkeit der Formen

$$(\xi\varkappa)^2 \quad \text{und} \quad (\zeta\varkappa)^2.$$

Aber auch die beiden Covarianten der letzten Gruppe sind auszulassen.

c) Die Zerlegung von $(\vartheta, \psi\varkappa)^4$ knüpfen wir an die aus $\begin{pmatrix}f, & \varphi, & \psi.\varkappa\\ 2 & 2 & 1\end{pmatrix}$ folgende Gleichung:

$$(\vartheta, \psi\varkappa)^4 = M + \tfrac{2}{5}N = [(f, \psi\varkappa)^2\varphi]^3 + \tfrac{2}{5}[(f, \psi\varkappa)^3\varphi]^2.$$

Die Reduction von M verlangt die nähere Betrachtung von $(f, \psi\varkappa)^2$.

Aus $\begin{pmatrix}\psi & \varkappa & f\\ 0 & 2 & 0\end{pmatrix}$ folgern wir aber für diese Ueberschiebung die Gleichung:

$$(\psi\varkappa, f)^2 = \Theta_1.\varkappa - \tfrac{1}{2}\xi_1\delta = \Sigma g_x^2.h_x^3.$$

Da aber in Folge der Entwickelung von $\begin{pmatrix}h & g & \varphi\\ 0 & 3 & 0\end{pmatrix}$ für jede 3. Ueberschiebung von $g.h$ über φ die Gleichung besteht:

$$(hg, \varphi)^3 = (h\varphi)^3.g - \tfrac{6}{5}[(hg)^1\varphi]^2 - \tfrac{1}{2}[(hg)^2\varphi]^1$$

und

$$(\varkappa\Theta_1)^1 = -\tfrac{1}{4}\pi_1\delta - \tfrac{1}{2}E_1\psi; \quad (\varkappa\Theta_1)^2 = \tfrac{1}{2}\tau_1;$$

$$(\xi_1\delta)^1 = \tfrac{2}{3}\pi_1\delta - \tfrac{1}{2}\mathfrak{A}f; \quad (\xi_1\delta)^2 = -\tfrac{1}{3}\tau_1$$

ist, so führt M ausser Gliedern von der Form Σ Inv. Cov. auf

$$(\pi_1\delta, \varphi)^2 \quad \text{und} \quad (\tau_1\delta)^1$$

zurück. Diese sind aber beide ebenfalls von dieser Gestalt wegen der Syzygante (143) und der Relation

$$(\tau_1 \delta) = \frac{1}{2} \mathfrak{A} . \pi_1 .$$

Zur Zerlegung von N entwickeln wir $\begin{pmatrix} \psi \varkappa f \\ 0\,3\,0 \end{pmatrix}$ und finden:

$$(f, \psi \varkappa)^3 = - J_1 . \varkappa - \frac{3}{4} \pi_1 \delta + \frac{1}{4} \mathfrak{A} f$$

und das Zerfallen von N.

Aus der Entwickelung von $\begin{pmatrix} f \varphi \delta^2 \\ 1\;2\;1 \end{pmatrix}$ folgt dann auf gleiche Art die Ueberflüssigkeit der letzten Covariante:

$$(\vartheta \delta^2)^3 .$$

Denn wir erhalten die Gleichung:

$$(\vartheta \delta^2)^3 + \frac{1}{2} (\Theta \delta^2)^2 = - [(f \delta^2)^2 \varphi]^2 - \frac{1}{3} [(f \delta^2)^3 \varphi]^1 ,$$

die wegen

$$(\Theta \delta^2)^2 = (\Theta \delta)^2 \delta - \frac{1}{3} \mathfrak{A} \Theta ,$$

$$(f \delta^2)^2 = \pi_1 . \delta - \frac{1}{3} \mathfrak{A} f ,$$

$$(f \delta^2)^3 = - \tau_1$$

lauter zerfallende Glieder giebt.

4) Covarianten 3. Ordnung.

Wir haben die gemischt simultanen Covarianten erhalten:

a) $(111) = (\Theta \psi)^1 ; \quad (111) = (\vartheta \psi)^2 ;$

b) $(113) = (\vartheta \varkappa)^2 .$

Die Formen der ersten Gruppe führen auf die symmetrischen Gebilde:

a') $(\Theta \psi)^1 , \; (\Theta_1{}^1 \varphi)^1$ und $(\Theta_2 f)^1$

zwischen denen eine lineare Beziehung besteht. Wegen $\begin{pmatrix} f\;\varphi\;\psi \\ 0\;2\;1 \end{pmatrix}$ bestehen nämlich die Gleichungen:

$$(\vartheta \psi)^2 + (\Theta \psi)^1 + \frac{1}{3} J \psi = (\Theta_1 \varphi)^1 + \frac{1}{2} J_1 . \varphi ,$$

$$- (\vartheta \psi)^2 + (\Theta \psi)^1 - \frac{1}{3} J \psi = (\Theta_2 f)^1 + \frac{1}{2} J_2 . f$$

und

$$2 (\Theta \psi)^1 = (\Theta_1 \varphi)^1 + (\Theta_2 f)^1 + \frac{1}{2} J_1 \varphi + \frac{1}{2} J_2 f ,$$

die unsere Behauptung erweisen.

Die Ueberflüssigkeit der Covariante $(\vartheta \varkappa)^2$ endlich folgern wir sofort aus $\begin{pmatrix} f & \varphi & \varkappa \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$:

$$(\vartheta \varkappa)^2 + (\Theta \varkappa)^1 + \tfrac{1}{3} J \varkappa = [(f\varkappa)^2 \varphi]^1 + \tfrac{1}{2} E_1 \cdot \varphi$$

mit der Ueberlegung, dass

$$(f\varkappa)^2 = -\tfrac{1}{2}\mu_1 - \tfrac{1}{2} J_1 \delta$$

und μ_1 Functionaldeterminante ist.

§ 5.

Uebersicht über die gemischt simultanen Grundformen.

Das gemischt simultane System von Grundformen enthält mithin:

1) die 3 Invarianten

$$(\Theta\delta)^2, \quad (\Theta_1\nabla)^2, \quad (\Theta_2\Delta)^2$$

2) die 6 Invarianten:

$$(\xi\varkappa)^3,\ (\zeta\varkappa)^3,\ (\xi_1 K)^3,\ (\zeta_1 K)^3,\ (\xi_2 Q)^3,\ (\zeta_1 Q)^3,$$

3) die Invariante:

$$(\Delta\nabla)\,(\Delta\delta)\,(\nabla\delta);$$

4) die 3 Covarianten 1. Ordnung:

$$(\Theta\psi)^2, \quad (\Theta_1\varphi)^2, \quad (\Theta_2 f)^2,$$

zwischen denen eine lineare Relation besteht,

5) die 6 Covarianten 1. Ordnung:

$$(\Theta\varkappa)^2,\ (\Theta_1 K)^2,\ (\Theta_2 Q)^2,\ (\vartheta\varkappa)^2,\ (\vartheta_1 K)^3,\ (\vartheta_2 Q)^3;$$

6) die 6 Covarianten 1. Ordnung:

$$(\xi\delta)^2,\ (\zeta\delta)^2,\ (\xi_1\nabla)^2,\ (\zeta_1\nabla)^2,\ (\xi_2\Delta)^2,\ (\zeta_2\Delta)^2.$$

7) die 6 Covarianten 2. Ordnung:

$$(\xi\psi)^2,\ (\zeta\psi)^2,\ (\xi_1\varphi)^2,\ (\zeta_1\varphi)^2,\ (\xi_2 f)^2,\ (\zeta_2 f)^2 \quad \text{und}$$

6) die 3 Covarianten 3. Ordnung:

$$(\Theta\psi)^1, \quad (\Theta_1\varphi)^1, \quad (\Theta_2 f)^1,$$

zwischen denen ebenfalls eine lineare Beziehung besteht.

Der weitere Ausbau der Theorie dieses Systems, insbesondere die Aufstellung der zwischen den Grundformen bestehenden einfachsten Syzyganten, verlangt vor allem die eingehende Betrachtung des

wiederholt in seinen einfachsten Formen benutzten Aronhold'schen Processes

$$\partial X = \sum \psi_i \frac{\partial X}{\partial \varphi_i}$$

und des mit ihm verwandten

$$\partial X = \sum \varkappa_i \frac{\partial X}{\partial \varphi_i}.$$

Die hierzu nöthigen Formeln bedürfen der Zerlegung vieler zerfallender Ueberschiebungen, zu denen aber das meiste Material in den von uns deshalb mit grösserer Ausführlichkeit gegebenen Reductionen bereits enthalten ist. Doch wollen wir diese Betrachtung einer späteren Publication vorbehalten.

Darmstadt, im Februar 1894.

Beiträge zur Auflösung von linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit linearen Coefficienten sowie von Differentialgleichungen zweiter Ordnung, denen gewisse bestimmte Integrale genügen.

Von

J. H. Graf in Bern.

Herr L. Pochhammer wies in seiner Arbeit „Ueber einige besondere Fälle der linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit linearen Coefficienten"*) darauf hin, dass die allgemeine Gleichung

$$(1) \qquad (A_0 x + B_0)\frac{d^2y}{dx^2} + (A_1 x + B_1)\frac{dy}{dx} + (A_2 x + B_2) y = 0$$

sich stets auf die Formen

$$x\frac{d^2y}{dx^2} + (a_1 x + b_1)\frac{dy}{dx} + (a_2 x + b_2) y = 0,$$

$$(2) \qquad \frac{d^2y}{dx^2} + (a_1 x + b_1)\frac{dy}{dx} + (a_2 x + b_2) y = 0,$$

$$(3) \qquad x\frac{d^2y}{dx^2} - (x - \varrho)\frac{dy}{dx} - \alpha y = 0,$$

$$(4) \qquad x\frac{d^2y}{dx^2} + \varrho\frac{dy}{dx} - y = 0,$$

reduciren lasse. In einem spätern Artikel „Ueber eine specielle Differentialgleichung 2ter Ordnung mit linearen Coefficienten"**) bestimmt er die particulären Integrale von (4)

$$y_1 = \Gamma(1-\varrho)\,F(\varrho, x), \quad \text{wo} \quad F(\varrho, x) = 1 + \frac{x}{1.\varrho} + \frac{x^2}{1.2.\varrho(\varrho+1)} + \cdots,$$

$$y_2 = \Gamma(\varrho - 1)\,x^{1-\varrho}\,F(2-\varrho, x)$$

---

*) Math. Annalen Bd. 38, S. 228 ff.

**) Math. Annalen Bd. 41, S. 174 ff.

und sodann weist er auf den Zusammenhang mit den Bessel'schen Functionen hin, da abgesehen von einem constanten Factor

$$\overset{\lambda}{J}(x) = x^\lambda F\left(\lambda+1, -\frac{x^2}{4}\right)$$

gesetzt werden kann.

Im Nachfolgenden wollen wir noch auf einige Gleichungen aufmerksam machen, welche mit der Gleichung (4) zusammengebracht werden können.

A.

Wir gehen aus von der Form

$$(5)\quad \begin{cases} x\dfrac{d^2y}{dx^2} + (a+1)\dfrac{dy}{dx} - y = 0 \\ \text{oder} \\ \dfrac{d}{dx}\left(x\dfrac{d}{dx} + a\right)y - y \quad = 0. \end{cases}$$

Wenn

$$F(a, x) = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} \frac{x^\lambda}{\lambda!\,\Gamma(a+\lambda+1)}\text{*)},$$

so sind die beiden particulären Integrale dieser Gleichung

$$y_1 = F(a, x);\quad y_2 = x^{-a}F(-a, x).$$

1) $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2} + 2x\dfrac{dy}{dx} + \left(x^2 - r(r+1)\right)y = 0$**).

Es sei

$$x\frac{d}{dx} = D;$$

da

$$x^2\frac{d^2}{dx^2} = D(D-1),$$

so folgt

$$\left(D^2 + D - r(r+1)\right)y + x^2y = 0,$$

$$(D-r)(D+r+1)\,y + x^2y = 0;$$

dividiren wir nun durch 4 und führen

$$D = x\frac{d}{dx}$$

ein, so folgt:

$$\left(\frac{x}{2}\frac{d}{dx} - \frac{r}{2}\right)\left(\frac{x}{2}\frac{d}{dx} + \frac{r+1}{2}\right) + \frac{x^2}{4}y = 0.$$

---

*) Vergl. L. Schläfli: Sopra un teorema di Jacobi recato a forma più generale ed applicato alla funzione cilindrica. Annali di Mat. Ser. II^a, Tom. V^0, p. 203, 1871 und schon vorher in: Sulle relazioni tra diversi integrali definiti che giovano ad esprimere la soluzione generale della equazione di Riccati. Annali di Math. II. Ser. Tom. III, p. 232.

**) J. Dienger, Differential- und Integralrechnung. Stuttgart 1857, S. 347.

Nun sei

$$\frac{x^2}{4} = t,$$

dann ist

$$\frac{1}{2} x \frac{d}{dx} = t \frac{d}{dt};$$

somit lautet die Gleichung

$$\left(t \frac{d}{dt} - \frac{r}{2}\right)\left(t \frac{d}{dt} + \frac{r+1}{2}\right) y + ty = 0.$$

Nun sei $y = t^{\frac{r}{2}} z$, worauf folgt

$$\frac{d}{dt}\left(t \frac{d}{dt} + r + \frac{1}{2}\right) z + z = 0.$$

Die Gleichung hat die Form des Typus (5)

$$\frac{d}{dx}\left(x \frac{d}{dx} + a\right) y - y = 0.$$

Um die particulären Integrale zu erhalten, setzen wir

$$a = r + \tfrac{1}{2}, \quad x = -t,$$

(I) $$z_1 = F\left(r + \tfrac{1}{2}, -t\right) = F\left(r + \tfrac{1}{2}, -\tfrac{x^2}{4}\right),$$

(II) $$z_2 = \left(\frac{x^2}{4}\right)^{-r-\frac{1}{2}} F\left(-r - \tfrac{1}{2}, -\tfrac{x^2}{4}\right).$$

Nun ist

$$y_1 = t^{\frac{r}{2}} z_1 = \left(\frac{x^2}{4}\right)^{\frac{r}{2}} z_1 = \left(\frac{x}{2}\right)^r z_1,$$

also

$$y_1 = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^r \left(-\frac{x^2}{4}\right)^\lambda}{\lambda!\,\Gamma\left(r + \frac{1}{2} + \lambda + 1\right)} = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} \frac{(-1)^\lambda \left(\frac{x}{2}\right)^{r+2\lambda}}{\lambda!\,\Gamma\left(r + \frac{1}{2} + \lambda + 1\right)}$$

$$= x^{-\frac{1}{2}} \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} \frac{(-1)^\lambda \left(\frac{x}{2}\right)^{r+\frac{1}{2}+2\lambda}}{\lambda!\,\Gamma\left(r + \frac{1}{2} + \lambda + 1\right)},$$

$$y_1 = x^{-\frac{1}{2}} \overset{r+\frac{1}{2}}{J}(x).$$

Ferner

$$y_2 = \left(\frac{x}{2}\right)^r z_2 = \left(\frac{x}{2}\right)^r \left(\frac{x}{2}\right)^{-2r-1} F\left(-r - \tfrac{1}{2}, -\tfrac{x^2}{4}\right),$$

$$y_2 = \left(\frac{x}{2}\right)^{-r-1} \cdot \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} \frac{\left(-\frac{x^2}{4}\right)^\lambda}{\lambda!\,\Gamma\left(-r-\frac{1}{2}+\lambda+1\right)}$$

$$= \left(\frac{x}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} \frac{(-1)^\lambda \left(\frac{x}{2}\right)^{-r-\frac{1}{2}+2\lambda}}{\lambda!\,\Gamma\left(-r-\frac{1}{2}+\lambda+1\right)},$$

$$y_2 = \left(\frac{x}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} \overset{-r-\frac{1}{2}}{J}(x).$$

Die vorliegende Differentialgleichung hat also als allgemeines Integral dasjenige der Differentialgleichung für Bessel'sche Functionen I. Art. Es muss somit die Gleichung auch so gelöst werden können, dass man dieselbe in die Form der Differentialgleichung für Bessel'sche Functionen I. Art verwandelt und dies ist möglich:

Die Gleichung

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + 2x\frac{dy}{dx} + \left(x^2 + r(r+1)\right) y = 0$$

wurde in die Form gebracht

$$(D-r)(D+r+1)y + x^2 y = 0.$$

Nun nach der Formel

$$p\,q = \left(\frac{p+q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p-q}{2}\right)^2,$$

ist

$$(D-r)(D+r+1) = \left(\frac{2D+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{2r+1}{2}\right)^2$$

$$= \left(D+\frac{1}{2}\right)^2 - \left(r+\frac{1}{2}\right)^2;$$

somit nimmt die Differentialgleichung die Gestalt an

$$\left\{\left(D+\frac{1}{2}\right)^2 - \left(r+\frac{1}{2}\right)^2 + x^2\right\} y = 0.$$

Nun soll das Symbol D um $\frac{1}{2}$ vermindert werden; zu dem Behufe setzen wir

$$y = x^{-\frac{1}{2}} V,$$

dann ist

$$\left(D+\frac{1}{2}\right)^2 V = x^{\frac{1}{2}} \frac{dV}{dx} + x^{\frac{3}{2}} \frac{d^2V}{dx^2},$$

also lautet die Differentialgleichung

$$x^{\frac{3}{2}} \frac{d^2 V}{dx^2} + x^{\frac{1}{2}} \frac{dV}{dx} - \left(r + \tfrac{1}{2}\right)^2 x^{-\frac{1}{2}} V + x^2 . x^{-\frac{1}{2}} V = 0$$

multiplicirt mit $x^{\frac{1}{2}}$

$$x^2 \frac{d^2 V}{dx} + x \frac{dV}{dx} - \left(r + \tfrac{1}{2}\right)^2 V + x^2 V = 0,$$

$$D^2 V - \left(r + \tfrac{1}{2}\right)^2 V + x^2 V = 0,$$

$$x^2 \frac{d^2 V}{dx^2} + x \frac{dV}{dx} + \left(x^2 - \left(r + \tfrac{1}{2}\right)^2\right) V = 0,$$

was die Differentialgleichung für Bessel'sche Functionen ist, deren particuläre Integrale

$$V_1 = \overset{r+\frac{1}{2}}{J}(x) \quad \text{und} \quad V_2 = \overset{-r-\frac{1}{2}}{J}(x)$$

sind; somit hat unsere erste Differentialgleichung, da

$$y = x^{-\frac{1}{2}} V,$$

die particulären Integrale

$$y_1 = x^{-\frac{1}{2}} \overset{r+\frac{1}{2}}{J}(x) \quad \text{und} \quad y_2 = x^{-\frac{1}{2}} \overset{-r-\frac{1}{2}}{J}(x),$$

wie früher, abgesehen von einem constanten Factor.

---

(1) II) $x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + (a+1) x \frac{dy}{dx} - b x^r y = 0$*),

da

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} = D(D-1),$$

so folgt

$$\big(D(D-1) + (a+1) D - b x^r\big) y = 0,$$

(2) $$\big(D(D+a) - b x^r\big) y = 0.$$

Nun sei $p = x^r$, $\log p = r \log x$

$$\frac{dp}{r} = r \frac{dx}{x}, \quad p \frac{d}{dp} = \frac{1}{r} x \frac{d}{dx} = \frac{D}{r} = \delta.$$

Dividiren wir (2) durch r^2, so folgt

$$\frac{D}{r}\left(\frac{D}{r} + \frac{a}{r}\right) y - \frac{b}{r^2} x^r y = 0,$$

$$\delta\left(\delta + \frac{a}{r}\right) y - \frac{b}{r^2} p y = 0.$$

*) Dienger, S. 173.

Nun setze man

$$t = \frac{b}{r^2} x^r,$$

dann ist

$$\frac{D}{r} = \delta = t\frac{d}{dt}$$

$$t\frac{d}{dt}\left(t\frac{d}{dt} + \frac{a}{r}\right)y - t\,y = 0,$$

$$\frac{d}{dt}\left(t\frac{d}{dt} + \frac{a}{r}\right)y - \;y = 0, \tag{3}$$

und (3) ist nichts anderes als der Typus (5), wenn $\frac{a}{r}$ durch a ersetzt wird. Somit folgen als particuläre Integrale

$$y_1 = F\left(\frac{a}{r},\, t\right) = F\left(\frac{a}{r},\, \frac{b}{r^2} x^r\right),$$

$$y_2 = t^{-\frac{a}{r}} F\left(-\frac{a}{r},\, \frac{b}{r^2} x^r\right) = \frac{b^{-\frac{a}{r}} x^{-a}}{r^{-\frac{2a}{r}}} F\left(-\frac{a}{r},\, \frac{b}{r} x^r\right),$$

$$y_2 = \frac{1}{x^a} \sqrt[r]{\frac{r^{2a}}{b^a}}\, F\left(-\frac{a}{r},\, \frac{b}{r} x^2\right).$$

Ein Fall muss besonders behandelt werden, nämlich $r = 0$, dann heisst die Gleichung

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + (a+1)\,x\frac{dy}{dx} - by = 0,$$

oder

$$(D^2 + aD - b)\,y = 0.$$

Die Wurzeln der quadratischen Gleichung $D^2 + aD - b = 0$ seien m und n, dann folgt

$$(D - m)\,(D - n)\,y = 0,$$

wo

$$m = \frac{-a + \sqrt{a^2 + 4b}}{2}$$

$$n = \frac{-a - \sqrt{a^2 + 4b}}{2}.$$

Die particulären Integrale sind in diesem Fall

$$y_1 = x^m = x^{\frac{-a + \sqrt{a^2 + 4b}}{2}},$$

$$y_2 = x^n = x^{\frac{-a - \sqrt{a^2 + 4b}}{2}}.$$

Uebrigens kann man noch direct zeigen, dass für den Fall $r = 0$ die particulären Integrale der Hauptgleichung sich in diejenigen der Nebengleichung verwandeln.

B.

Man kann bei der Integration solcher Differentialgleichungen auch den indirecten Weg einschlagen, d. h. eine Differentialgleichung bilden, der eine bestimmte Integralform zukommt.

Die Differentialgleichung n^{ter} Ordnung mit linearen Coefficienten laute

$$(1)\quad (a_0 x + b_0)\frac{\partial^n y}{\partial x^n} + (a_1 x + b_1)\frac{\partial^{n-1} y}{\partial x} + \cdots + (a_{n-1}x + b_{n-1})\frac{\partial y}{\partial x} + (a_n x + b_n)\, y = 0$$

und

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n,$$
$$g(x) = b_1 x^n + b_1 x^{n-1} + \cdots + b_{n-1} x + b_n,$$

so folgt für (1)

$$(2)\quad x f\left(\frac{d}{dx}\right) y + g\left(\frac{d}{dx}\right) y = 0.$$

Dieser Gleichung versuche man durch ein bestimmtes Integral zu genügen von der Form

$$y = \int e^{xt} \frac{h(t)}{f(t)}\, dt,$$

wo die Grenzen constant und noch aus den Bedingungen zu finden sind, $h(t)$ eine noch zu bestimmende Function von t allein ist. Da nun

$$f\left(\frac{d}{dx}\right) e^{xt} = e^{xt} f(t),$$

ebenso

$$g\left(\frac{d}{dx}\right) e^{xt} = e^{xt} g(t)$$

so giebt die Anwendung von (2) auf das Integral die Bedingung

$$(3)\quad \int e^{xt} h(t)\, x\, dt + \int e^{xt} h(t) \frac{g(t)}{f(t)}\, dt = 0.$$

Den ersten Term integriren wir partiell und finden ihn

$$\int e^{xt} h(t)\, x\, dt = \{e^{xt} h(t)\} - \int e^{xt} h'(t)\, dt,$$

eingesetzt erhalten wir als Bedingung

$$\{\underbrace{e^{xt} h(t)}_{\mathrm{I}}\} + \int e^{xt} h(t) \underbrace{\left\{\frac{g(t)}{f(t)} - \frac{h'(t)}{h(t)}\right\}}_{\mathrm{II}} dt = 0.$$

Diese Bedingung erfüllt man am bequemsten dadurch, dass die Grenzen so ausgewählt werden, dass der Ausdruck in $\{\mathrm{I}\}$ verschwindet und dass längs des ganzen Weges der Ausdruck II das gleiche thut.

Wir haben somit

$$\frac{g(t)}{f(t)} - \frac{h'(t)}{h(t)} = 0,$$

daraus schliesslich

$$\operatorname{Log} h(t) = \int \frac{g(t)}{f(t)} dt.$$

Der leichteste Fall ist offenbar der, wo alle Wurzeln der Gleichung $f(t) = 0$ verschieden und wirklich in der Zahl n vorhanden sind. Da somit a_0 nicht verschwindet, so kann man die Variable x so um eine additive Constante verändern, dass b_0 verschwindet, so dass also die Function $g(t)$ den $(n-1)^{\text{ten}}$ Grad nicht übersteigt. Schliesslich steht es noch frei $a_0 = 1$ zu setzen, dann ist

$$f(t) = \Pi(t-\alpha), \quad \frac{g(t)}{f(t)} = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} \frac{A_\lambda}{t-\alpha_\lambda}.$$

Nun ist

$$A = \frac{g(\alpha)}{g_1(\alpha)}, \quad h(t) = \Pi(t-\alpha)^A.$$

Die Grenzen sind so zu wählen, dass

$$e^{xt}\,\Pi(t-\alpha)^A$$

verschwindet.

Angenommen nun, auch alle Exponenten A wären negativ, so giebt es doch immer eine Gegend des Horizonts, wo e^{xt} in einer alle algebraischen Ordnungen übertreffenden Kleinheit verschwindet. Von dieser Gegend aus könnte man um jeden der n Pole α besonders eine Schlinge werfen. Einer jeden solchen Schlinge entspricht eines der n particulären Integrale von der Form

$$y = \int e^{xt}\,\Pi(t-\alpha)^{A-1}\,dt.$$

C.

Nach diesen allgemeinen Bemerkungen gehen wir zur Betrachtung der Gleichung

$$(1) \qquad (A_0 x + B_0)\frac{d^2y}{dx^2} + (A_1 x + B_1)\frac{dy}{dx} + (A_2 x + B_2)y = 0\text{*})$$

über. Ohne der Allgemeinheit der Untersuchung zu schaden, darf man $B_0 = 0$ setzen und dann die ganze Gleichung durch A_0 dividiren, also

$$(2) \qquad x\frac{d^2y}{dx^2} + (ax + c)\frac{dy}{dx} + (bx + g)\,y = 0\text{*}).$$

Die Gleichung

$$f(t) = t^2 + at + b$$

kann zwei ungleiche oder zwei gleiche Wurzeln haben.

*) Vergl. L. Pochhammer, diese Annalen Bd. 38, S. 224 ff. und A. Weiler, Crelle's Journal Bd. 51, S. 107 ff.

I. Unter-Fall: Die Wurzeln der Gleichung $t^2 + at + b = 0$ seien ungleich z. B. gleich α und β, dann ist $a = -(\alpha+\beta)$, $b = \alpha\beta$, somit lautet die Differentialgleichung

$$x\frac{d^2y}{dx^2} + (-\alpha x - \beta x + c)\frac{dy}{dx} + (\alpha\beta + g)y = 0$$

oder

$$x\left(\frac{d}{dx} - \alpha\right)\left(\frac{d}{dx} - \beta\right)y + \left(c\frac{d}{dx} + g\right)y = 0.$$

Nun setzen wir $y = e^{\beta x}z$, dann wird die Differentialgleichung zu

$$x\left[\frac{d}{dx} - (\alpha - \beta)\right]\frac{dz}{dx} + \left(c\frac{d}{dx} + c\alpha + g\right)z = 0$$

oder

(3) $$x\frac{d^2z}{dx^2} - \Big[(\alpha - \beta)x - c\Big]\frac{dz}{dx} + (c\alpha + g)z = 0.$$

Wir setzen nun

$$x = \frac{w}{\alpha - \beta}$$

und

$$c\alpha + g = -(\alpha - \beta)h;$$

so folgt

$$\frac{w}{\alpha-\beta}(\alpha-\beta)^2\frac{d^2z}{dw^2} - \left[\frac{w}{\alpha-\beta}(\alpha - \beta) - c\right](\alpha-\beta)\frac{dz}{dw} - (\alpha-\beta)hz = 0,$$

$$w\frac{d^2z}{dw^2} - (w - c)\frac{dz}{dw} - hz = 0$$

mit andern Worten, die Untersuchung kommt auf die Auflösung von

(4) $$x\frac{d^2y}{dx^2} - (x - c)\frac{dy}{dx} - ay = 0$$

zurück, was den Typus (3) von Herrn Pochhammer darstellt.

Der Vortheil dieser Reduction liegt auf der Hand. Die 6 constanten Elemente wurden zunächst auf 4, sodann nach Gleichung (4) auf 2 reducirt.

Wenn wir nun die allgemeine Vorschrift der Auflösung befolgen, so ist

$$f(t) = t(t-1),\quad g(t) = ct - a,$$

also

$$\frac{g(t)}{f(t)} = \frac{ct - a}{t(t-1)} = \frac{c-a}{t-1} + \frac{a}{t},\quad h(t) = t^a(t-1)^{c-a},\quad y = \int e^{xt}t^{a-1}(t-1)^{c-a-1}dt,$$

wenn

$$\left\{e^{xt}t^a(t-1)^{c-a}\right\}$$

an den Grenzen verschwindet.

Sind die recp.*) a, wie von $c - a$ positiv, so kann man 0 und 1 als Grenzen wählen und e^{xt} entwickeln. Es folgt

*) reellen Componenten.

$$(5)\ y=\int_0^1 t^{a-1}(t-1)^{c-a-1}.\sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty}\frac{x^\lambda t^\lambda}{\lambda!}\,dt=\sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty}\int_0^1 t^{\lambda+a-1}(1-t)^{c-a-1}.\frac{x^\lambda}{\lambda!}\,dt$$

$$=\sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty}\frac{x^\lambda}{\lambda!}\int_0^1 t^{\lambda+a-1}(1-t)^{c-a-1}dt=\sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty}\frac{\Gamma(\lambda+a)\,\Gamma(c-a)}{\Gamma(\lambda+c)}\cdot\frac{x^\lambda}{\lambda!}.$$

Bezeichnen wir analog wie jene Function mit einem Parameter

$$F(a,x)=\sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty}\frac{x^\lambda}{\lambda!\,\Gamma(a+\lambda+1)}$$

nun als Function mit zwei Parametern

$$(6)\qquad F(a,c,x)=\sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty}\frac{\Gamma(\lambda+a)}{\Gamma(a)\,\Gamma(\lambda+c)}\,\frac{x^\lambda}{\lambda!},$$

so folgt als *erstes particuläres Integral* der Differentialgleichung (4), wenn wir (5) und (6) mit einander vergleichen

$$(7)\qquad y_1=F(a,c,x)=\frac{1}{\Gamma(a)\,\Gamma(c-a)}\int_0^1 e^{xt}(1-t)^{c-a-1}t^{a-1}.dt.$$

Setzen wir in

$$y=\int_0^1 e^{xt}\,t^{a-1}(1-t)^{c-a-1}\,dt$$

statt t den Werth $1-u$, so folgen als Grenzen des Integrals

$$t=0,\quad u=1,$$
$$t=1,\quad u=0,$$

also

$$y=\int_1^0 e^{x-xu}(1-u)^{a-1}u^{c-a-1}.-du=e^x\int_0^1 e^{-xu}u^{c-a-1}(1-u)^{a-1}\,du$$

$$=e^x\int_0^1 u^{c-a-1}(1-u)^{a-1}\cdot\sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty}\frac{(-1)^\lambda x^\lambda u^\lambda}{\lambda!}\,du$$

$$=e^x\sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty}\frac{(-1)^\lambda x^\lambda}{\lambda!}\int_0^1 u^{c+\lambda-a-1}(1-u)^{a-1}du=e^x\sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty}\frac{\Gamma(c+\lambda-a)\,\Gamma(a)}{\Gamma(c+\lambda)}\cdot\frac{(-x)^\lambda}{\lambda!}$$

$$=\Gamma(a)\,\Gamma(c-a).e^x\sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty}\frac{\Gamma(c-a+\lambda)}{\Gamma(c-a)\,\Gamma(c+\lambda)}\cdot\frac{(-x)^\lambda}{\lambda!}$$

$$=\Gamma(a)\,\Gamma(c-a).e^x\,F(c-a,c,-x).$$

Wir haben somit als 2te Form des I. particulären Integrals von (4)

(8) $$y_1 = \Gamma(a)\,\Gamma(c-a)\,e^x\,F(c-a,\ c,\ -x),$$

und so direct die Relation beider F-Functionen

(9) $$F(a,c,x) = e^x\,F(c-a,\ c,\ -x).$$

Um das zweite particuläre Integral von (4) zu erhalten, wählen wir, ausgehend von

$$y = \int e^{xt}\,t^{a-1}(t-1)^{c-a-1}\,dt,$$

die Gegend des Horizonts, wo xt negativ ist und werfen von da aus eine Schlinge rechtläufig um beide Pole $+1$ und 0 herum, also

$$y = \frac{1}{2i\pi}\int_{-N \circlearrowleft 0\,1} e^{xt}\,t^{a-1}(t-1)^{c-a-1}\,dt,$$

wo N eine sehr grosse zum unendlich werden bestimmte Zahl ist.

Nun sei $t = \frac{u}{x}$, also Pole $= 0, x$

$$y = \frac{1}{2i\pi}\int_{-N \circlearrowleft 0\,x} e^u\left(\frac{u}{x}\right)^{a-1}\left(\frac{u}{x}-1\right)^{c-a-1}\cdot\frac{du}{x}$$

$$= \frac{1}{2i\pi}\,x^{1-c}\int_{-N \circlearrowleft 0\,x} e^u\,u^{c-2}\left(1-\frac{x}{u}\right)^{c-a-1}du.$$

Man kann es nun stets so einrichten, dass u abs. $> x$ längs des ganzen Weges, folglich darf man das Binom $\left(1-\frac{x}{u}\right)^{c-a-1}$ entwickeln

$$\left(1-\frac{x}{u}\right)^{c-a-1} = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty}(-1)^\lambda\binom{c-a-1}{\lambda}\left(\frac{x}{u}\right)^\lambda.$$

Nun ist

$$(-1)^\lambda\binom{c-a-1}{\lambda} = \frac{(a-c+\lambda)!}{(a-c)!\,\lambda!} = \frac{\Gamma(a-c+\lambda+1)}{\Gamma(a-c+1)\cdot\lambda!},$$

somit $$\left(1-\frac{x}{u}\right)^{c-a-1} = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty}\frac{\Gamma(a-c+\lambda+1)}{\Gamma(a-c+1)\cdot\lambda!}\,x^\lambda\,u^{-\lambda},$$

$$y = \frac{1}{2i\pi}\,x^{1-c}\sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty}\frac{\Gamma(a-c+\lambda+1)}{\Gamma(a-c+1)}\cdot\frac{x^\lambda}{\lambda!}\int_{-N \circlearrowleft 0\,x} e^u\,u^{c-2-\lambda}\,du.$$

Nun ist aber $\frac{1}{2i\pi}\int\limits_{-N\overleftarrow{0x}} e^u u^{c-2-\lambda}\,du = \frac{1}{\Gamma(\lambda+2-c)}$

$$y = x^{1-c}\sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty}\frac{\Gamma(a-c+\lambda+1)}{\Gamma(a-c+1)\,\Gamma(\lambda+2-c)}\cdot\frac{x^\lambda}{\lambda!},$$

(10) $$y = x^{1-c}F(a-c+1,\ 2-c,\ x).$$

Dies ist das 2^{te} *particuläre Integral* von Gleichung (4), für welches nach der Relation (9)

$$F(a-c+1,\ 2-c,\ x) = e^x F(1-a,\ 2-c,\ -x)$$

gesetzt werden darf

(10a) $$y = e^x\,x^{1-c}F(1-a,\ 2-c,\ -x).$$

Es sei uns gestattet gerade hier noch einige Darstellungen der Function

$$F(a,c,x) = \frac{1}{\Gamma(a)\,\Gamma(c-a)}\int_0^1 e^{xt}\,t^{a-1}(1-t)^{c-a-1}\,dt$$

einzuschalten.

Die 2^{te} Form ist

(11) $$F(a,c,x) = \frac{e^x}{\Gamma(a)\,\Gamma(c-a)}\int_0^1 e^{-xt}\,t^{c-a-1}(1-t)^{a-1}\,dt.$$

Die 3^{te} Form

(12) $$F(a,c,x) = \frac{1}{2i\pi}\int\limits_{-N\overleftarrow{0x}} e^t\,t^{a-1}(t-x)^{-a}\,dt$$

und die 4^{te} Form

(13) $$F(a,c,x) = \frac{e^x}{2i\pi}\int\limits_{-N\overleftarrow{-x0}} e^t\,t^{-a}(t+x)^{a-c}\,dt.$$

Die Formeln (12) und (13) gelten immer wie auch die Parameter a und c beschaffen sein mögen.

Wir stellen nun noch folgende Frage:

Wann unterscheiden sich die zwei particulären Integrale von Differentialgleichung (4) nur durch eine multiplicative Constante und reichen daher zur Darstellung des allgemeinen Integrals nicht aus?

Damit dies eintreten kann, müssen die zwei Summenreihen übereinstimmen, daher muss unbedingt der Exponent $1-c$ des Factors x^{1-c} der 2^{ten} Function eine ganze Zahl sein. Wir können $1-c$ entweder als Null oder negativ ganz annehmen, dann ist c positiv ganz z. B. $= n+1$, wo $n = 0, 1, 2, 3\ldots$ ist. Dann geht

$$x^{1-c}\,F(a-c+1,\ 2-c,\ x)$$

über in

$$x^{-n}\,F(a-n,\ -n+1,\ x) = \sum_{\lambda=n}^{\lambda=\infty} \frac{\Gamma(\lambda+a-n)}{\Gamma(a-n)\cdot\lambda!\,(\lambda-n)!}\,x^{\lambda-n}.$$

Ich stelle diese Summe deshalb so dar, weil im Nenner $\Gamma(\lambda-n+1)$ unendlich gross wird, so lange $\lambda < n$ ist. Es ist deshalb angezeigt, $\lambda = n+\mu$ zu setzen; dann wird

$$x^{1-c}\,F(a-c+1,\ 2-c,\ x)$$

zu

$$\sum_{\mu=0}^{\mu=\infty} \frac{\Gamma(\mu+a)}{\Gamma(a-n)\cdot(\mu+n)!\,\mu!}\,x^{\mu} = \frac{\Gamma(a)}{\Gamma(a-n)} \sum_{\mu=0}^{\mu=\infty} \frac{\Gamma(a+\mu)}{\Gamma(a)\,\Gamma(\mu+n+1)}\,\frac{x^{\mu}}{\mu!}$$

$$= \frac{\Gamma(a)}{\Gamma(a-n)}\,F(a,\ n+1,\ x).$$

Mit anderen Worten: Unter der Voraussetzung, dass c positiv ganz, ist

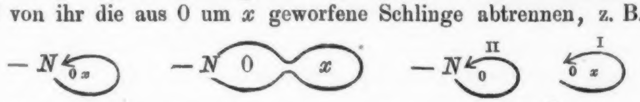
$$(14)\qquad x^{1-c}F(a-c+1,\ 2-c,\ x) = \frac{\Gamma(a)}{\Gamma(a-n)}\,F(a,c,x)$$

und der Factor, um welchen sich die beiden particulären Lösungen in diesem Fall unterscheiden, ist $\frac{\Gamma(a)}{\Gamma(a-n)}$, wo n pos. ganz. Giebt es noch eine 3[te] particuläre Lösung der Differentialgleichung (4), die auch dann nicht mit $F(a,c,x)$ zusammenfällt, wenn c eine ganze Zahl ist? Eine solche lässt sich am leichtesten aus den zwei bestimmten Integralen herleiten. Nehmen wir der Einfachheit halber, damit der Pol 0 zugänglich werde, a als pos. an und gehen aus von

$$y = x^{1-c}\,F(a-c+1,\ 2-c,\ x) = \frac{x^{1-c}}{2i\pi}\int_{-N\,(0\,x)} e^{u}\,u^{c-2}\left(1-\frac{x}{u}\right)^{c-a-1} du$$

$$= \frac{x^{1-c}}{2i\pi}\int_{-N\,(0\,x)} e^{u}\,u^{a-1}\,(u-x)^{c-a-1}\,du.$$

Nun können wir die Schlinge um den Pol $u=0$ zusammenschnüren und von ihr die aus 0 um x geworfene Schlinge abtrennen, z. B. so



Nun mitteln wir zuerst, wenn $y = S_1 + S_2$ gesetzt wird,

$$S_1 = \frac{x^{1-c}}{2i\pi}\int_{0\,(x)} e^{u}\,u^{a-1}(u-x)^{c-a-1}\,du$$

aus. Da der Nullpunkt zugänglich ist, so ziehen wir den Weg auf die Strecke 0 bis x zusammen

und setzen recp.*) $c-a$ pos. voraus

$$S_1 = \frac{1}{2i\pi}\left(e^{-i\pi(c-a-1)} - e^{i\pi(c-a-1)}\right) \cdot x^{1-c}\int_0^x e^u\, u^{a-1}(x-u)^{c-a-1}\,dx$$

$$= \frac{e^{i\pi(c-a)} - e^{-i\pi(c-a)}}{2i\pi} \cdot x^{1-c}\int_0^x$$

$$= \frac{2i\sin\pi(c-a)}{2i\pi} \cdot x^{1-c}\int_0^x$$

$$= \frac{\sin\pi(c-a)}{\pi} \cdot x^{1-c}\int_0^x = \frac{x^{1-c}}{\Gamma(c-a)\,\Gamma(a-c+1)}\int_0^x e^u u^{a-1}(x-u)^{c-a-1}\,dx.$$

Nun setzen wir $u = xt,\quad u = 0,\quad t = 0,$
$u = x,\quad t = 1,$

$$S_1 = \frac{x^{1-c}}{\Gamma(c-a)\,\Gamma(a-c+1)}\int_0^1 e^{xt}(xt)^{a-1}(x-xt)^{c-a-1}\,x\,dt$$

$$= \frac{1}{\Gamma(c-a)\,\Gamma(a-c+1)}\int_0^1 e^{xt}\,t^{a-1}(1-t)^{c-a-1}\,dt.$$

Nun ist

$$\int_0^1 e^{xt}\,t^{a-1}(1-t)^{c-a-1}\,dt = \Gamma(a)\,\Gamma(c-a)\,F(a, c, x)$$

somit
$$S_1 = \frac{\Gamma(a)}{\Gamma(a-c+1)}\,F(a, c, x).$$

Nun folgt
$$S_2 = \frac{x^{1-c}}{2i\pi}\int_{-N,\,0} e^u\,u^{a-1}(u-x)^{c-a-1}\,du.$$

Wir ziehen den Weg ebenfalls auf die Strecke $-N$ bis 0 zusammen

$$S_2 = \frac{1}{2i\pi}\left(e^{-i\pi(a-1+c-a-1)} - e^{+i\pi(a-1+c-a-1)}\right)\cdot x^{1-c}\int_{-\infty}^0 e^u u^{a-1}(u-x)^{c-a-1}\,du$$

$$= \frac{1}{2i\pi}\left(e^{-i\pi c} - e^{i\pi c}\right)\cdot x^{1-c}\int_{-\infty}^0 e^u\,u^{a-1}(u-x)^{c-a-1}\,du.$$

$$S_2 = -\frac{1}{2i\pi}\cdot 2i\sin\pi c\cdot x^{1-c}\int_{-\infty}^0 e^u\,u^{a-1}(u-x)^{c-a-1}\,du.$$

---

*) recp. = reelle Componente; der Kreis sollte ganz an x herangerückt sein.

Nun sei $u = -xt$

$$u = 0, \qquad t = 0,$$
$$u = -\infty, \qquad t = \infty$$

$$= -\frac{\sin \pi c}{\pi} \cdot x^{1-c} \int\limits_{\infty}^{0} e^{-xt}\, x^{a-1}\, t^{a-1} (1+t)^{c-a-1}\, x^{c-a-1} \cdot -x\,dt$$

$$= -\frac{\sin \pi c}{\pi} \cdot \int\limits_{0}^{\infty} e^{-xt}\, t^{a-1} (1+t)^{c-a-1}\, dt,$$

somit folgt im Ganzen

$$(15)\quad \left\{\begin{aligned} & x^{1-c} F(a-c+1,\ 2-c,\ x) = \frac{\Gamma(a)}{\Gamma(a-c+1)} F(a, c, x) \\ & \qquad\qquad - \frac{\sin \pi c}{\pi} \int\limits_{0}^{\infty} e^{-xt} t^{a-1} (1+t)^{c-a-1} dt, \\ & \qquad\qquad\qquad \text{oder} \\ & x^{1-c} F(a-c+1,\ 2-c,\ x) - \frac{\Gamma(a)}{\Gamma(a-c+1)} F(a, c, x) \\ & \qquad\qquad = -\frac{\sin \pi c}{\pi} \int\limits_{0}^{\infty} e^{-xt} t^{a-1} (1+t)^{c-a-1} dt. \end{aligned}\right.$$

Das Integral rechts hat nur dann einen Sinn, wenn die reelle Componente von x positiv ist. Wenn ferner c eine ganze Zahl ist, so verschwindet $\sin \pi c$; damit folgt, dass auch der Unterschied der beiden Functionen auf der linken Seite wegfällt und diese zwei Functionen einander gleich werden, ein Resultat, das sich mit dem früher erhaltenen Ergebniss deckt. Nun aber ist

$$\int\limits_{0}^{\infty} e^{-xt}\, t^{a-1} (t+1)^{c-a-1}\, dt,$$

unter der Voraussetzung von a pos., gleich

$$\frac{x^{1-c}}{2i \sin \pi a} \int\limits_{-N \circlearrowleft 0x} e^{u}\, u^{a-1} \cdot x(u-x)^{c-a-1}\, du$$

ein particuläres Integral von Differentialgleichung (4), welches nie mit $F(a, c, x)$ zusammenfällt. Wir wollen versuchen, dasselbe durch eine Summenreihe darzustellen, wenn c gleich einer ganzen positiven Zahl $(n+1)$ ist.

Wir gehen aus von

$$S = \int\limits_{0}^{\infty} e^{-xt}\, t^{a-1} (t+1)^{c-a-1}\, dt$$

$$= -\frac{\pi}{\sin \pi c} \left\{ x^{1-c} F(a-c+1,\ 2-c,\ x) - \frac{\Gamma(a)}{\Gamma(a-c+1)} F(a, c, x) \right\}.$$

Denken wir uns einen Grenzübergang, indem wir $n+1+\varepsilon$ statt c einsetzen, wo ε zum Verschwinden bestimmt ist, so folgt

$$S = \lim_{\varepsilon=0} -\frac{\pi}{\sin(\pi(n+1+\varepsilon))}\Big\{x^{-n-\varepsilon} F(a-n-\varepsilon,\ 1-n-\varepsilon,\ x) \\ - \frac{\Gamma(a)}{\Gamma(a-n-\varepsilon)} F(a,\ n+1+\varepsilon,\ x)\Big\}.$$

Nun ist

$$-\frac{\pi}{\sin(\pi(n+1+\varepsilon))} = (-1)^\lambda \frac{\pi}{\sin(\pi(\lambda+1-n-\varepsilon))} \\ = (-1)^\lambda \Gamma(\lambda+1-n-\varepsilon)\,\Gamma(n-\lambda+\varepsilon).$$

Darauf gestützt handelt es sich nun darum, den allgemeinen Term des Ausdrucks rechts anzugeben. Derselbe wird zu

$$(-1)^\lambda \cdot \Gamma(\lambda+1-n-\varepsilon)\,\Gamma(n-\lambda+\varepsilon) \\ \times \Big\{\frac{\Gamma(\lambda+a-n-\varepsilon)}{\Gamma(a-n-\varepsilon)\Gamma(\lambda+1-n-\varepsilon)} \cdot \frac{x^{\lambda-n-\varepsilon}}{\lambda!} - \frac{\Gamma(\lambda+a)}{\Gamma(a-n-\varepsilon)\Gamma(\lambda+n+1+\varepsilon)} \cdot \frac{x^\lambda}{\lambda!}\Big\}.$$

Der 1te Theil des I. Terms wird für $\lambda = 1, 2, 3 \ldots n-1$ zu

$$(-1)^\lambda \frac{\Gamma(\lambda+a-n-\varepsilon)\,\Gamma(n-\lambda+\varepsilon)}{\Gamma(a-n-\varepsilon)} \cdot \frac{x^{\lambda-n-\varepsilon}}{\lambda!}$$

und dies geht für $\varepsilon = 0$ über in

$$\binom{n-a}{\lambda} \frac{(n-\lambda-1)!}{x^{n-\lambda}}.$$

Nun bleibt noch die Ausmittlung des 2ten Theiles vom I. Term nämlich für $\lambda \overline{\gtrless} n$ und des II. Terms für $\lambda = 0, 1, 2, 3 \ldots.$ Wir gehen so vor:

Wenn $\lambda \overline{\gtrless} n$, so setze man in der Entwicklung des ersten Terms

$$\lambda = n + \mu, \quad \text{wo} \quad \mu = 0, 1, 2, 3, \ldots.$$

Der allgemeine Term wird dann zu

$$(-1)^{n+\mu} \cdot \frac{\Gamma(\mu+a-\varepsilon)\,\Gamma(-\mu+\varepsilon)}{\Gamma(a-n-\varepsilon)\,\Gamma(\mu+n)!}\, x^{\mu-\varepsilon} \\ -(-1)^\mu \frac{\Gamma(\mu+1-n-\varepsilon)\,\Gamma(n-\mu+\varepsilon)\,\Gamma(\mu+a)}{\Gamma(a-n-\varepsilon)\,\Gamma(\mu+n+1+\varepsilon)} \frac{x^\mu}{\mu!}$$

$$= \lim_{\varepsilon=0} \frac{(-1)^n}{\varepsilon} \Big\{\frac{\Gamma(\mu+a-\varepsilon)\cdot x^{\mu-\varepsilon}}{\Gamma(a-n-\varepsilon)\cdot(\mu+n)!\,\Gamma(\mu+1-\varepsilon)} \\ - \frac{\Gamma(\mu+a)}{\Gamma(a-n-\varepsilon)\,\Gamma(\mu+n+1+\varepsilon)} \cdot \frac{x^\mu}{\mu!}\Big\}.$$

Setzen wir

$\Lambda(x) = \dfrac{\partial \operatorname{Log}\Gamma(x)}{\partial x}$, so wird dieser Ausdruck

$$= \frac{(-1)^n}{\Gamma(a-n)} \cdot \frac{\Gamma(\mu+a)}{\mu!\,(\mu+n)!}\, x^\mu \Big\{-\operatorname{Log} x - \Lambda(\mu+a) + \Lambda(\mu+1) \\ + \Lambda(\mu+n+1)\Big\}.$$

Nun ist

$$\frac{(-1)^n}{\Gamma(a-n)} = (-1)^n \frac{\Gamma(n-a+1)}{\Gamma(n-a+1)\,\Gamma(a-n)}$$
$$= (-1)^n \frac{\sin\pi(a-n)}{\pi}\,\Gamma(n-a+1)$$
$$= \frac{\sin\pi a}{\pi}\,\Gamma(n-a+1)$$
$$= \frac{\Gamma(n-a+1)}{\Gamma(a)\,\Gamma(1-a)}.$$

Wir erhalten somit:

$$S = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=n-1} \binom{n-a}{\lambda} \frac{(n-\lambda-1)!}{x^{n-\lambda}} - \frac{\Gamma(n+1-a)}{\Gamma(1-a)} \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} \frac{\Gamma(\lambda+a)}{\Gamma(a)\,(\lambda+n)!}\,\frac{x^\lambda}{\lambda!}\Big(\operatorname{Log} x + \Lambda(\lambda+a) - \Lambda(\lambda+1) - \Lambda(\lambda+n+1)\Big). \tag{16}$$

Wenn der Coefficient von $\frac{d^2y}{dx^2}$ constant ist, so geht die Differentialgleichung (2) in den Typus (2) von Pochhammer über und dieser kann auf die Form des Typus (3) gebracht werden. Die Gleichung sei

$$\begin{aligned} &A\frac{d^2y}{dx^2} + (Bx+C)\frac{dy}{dx} + (Dx+E)\,y = 0,\\ &\frac{d^2y}{dx^2} + (Ax+B)\frac{dy}{dx} + (Cx+D)\,y = 0. \end{aligned} \tag{17}$$

Anders geordnet

$$\frac{d^2y}{dx^2} + Ax\Big(\frac{d}{dx} + \frac{C}{A}\Big)y + \Big(B\frac{d}{dx} + D\Big)y = 0.$$

Nun sei

$$y = -e^{-\frac{C}{A}x}\,z.$$

$$\frac{dy}{dx} = -e^{-\frac{C}{A}x}\frac{dz}{dx} + \frac{C}{A}e^{-\frac{C}{A}x}z$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -e^{-\frac{C}{A}x}\Big(\frac{d^2z}{dx^2} - 2\frac{C}{A}\frac{dz}{dx} + \frac{C^2}{A^2}z\Big)$$

$$Ax\Big(\frac{d}{dx} + \frac{C}{A}\Big)y = -e^{-\frac{C}{A}x}\Big(Ax\frac{dz}{dx} - Cxz + Cxz\Big)$$

$$\Big(B\frac{d}{dx} + D\Big)y = -e^{-\frac{C}{A}x}\Big(B\frac{dz}{dx} - \frac{BC}{A}z + Dz\Big)$$

$$\frac{d^2z}{dx^2} + \Big(Ax + B - \frac{2C}{A}\Big)\frac{dz}{dx} + \Big(D - \frac{BC}{A} + \frac{C^2}{A^2}\Big)z = 0.$$

Nun sei $a^2 = -A$, $b = -\frac{AB - 2C}{A\sqrt{-A}}$, $c = BC - \frac{D}{A} - \frac{C^2}{A}$

$$\frac{d^2z}{dx^2} - (a^2x + ab)\frac{dz}{dx} + a^2cz = 0,$$
$$\frac{d^2z}{dx^2} - a^2\left(x + \frac{b}{a}\right)\frac{dz}{dx} + a^2cz = 0.$$

Ich führe nun $x + \frac{b}{a}$ als unabhängige Variable ein, da

$$d\left(x + \frac{b}{a}\right) = dx.$$

Wir verbinden damit noch einen constanten Factor um die Constante a^2 wegzubringen und setzen

$$\left(x + \frac{b}{a}\right)^2 = \frac{2s}{a^2}, \qquad x = \frac{\sqrt{2s} - b}{a}.$$

Dann lautet die Differentialgleichung

$$(18) \qquad s\frac{d^2z}{ds^2} - \left(s - \frac{1}{2}\right)\frac{dz}{ds} + \frac{1}{2}cz = 0.$$

Geht nach Typus (3). Die beiden particulären Integrale sind

$$z_1 = F\left(-\frac{1}{2}c,\ \frac{1}{2},\ s\right),$$
$$z_2 = s^{\frac{1}{2}}\,F\left(\frac{1-c}{2},\ \frac{3}{2},\ s\right),$$

und wenn man die ursprünglichen Werthe berücksichtigt

$$y_1 = e^{-\frac{C}{A}x}\,F\left(\frac{A^2D - ABC + C^2}{2A^3},\ \frac{1}{2},\ -\frac{\left(Ax + B - 2\frac{C}{A}\right)^2}{2A}\right),$$
$$y_2 = e^{-\frac{C}{A}x}\left(Ax + B - 2\frac{C}{A}\right)\times$$
$$F\left(\frac{2A^3 + A^2D - ABC + C^2}{2A^3},\ \frac{3}{2},\ -\frac{\left(Ax + B - 2\frac{C}{A}\right)^2}{2A}\right).$$

II. Unter-Fall: Bei der Differentialgleichung (2) seien die Wurzeln der Functionalgleichung

$$t^2 + at + b = 0$$

einander gleich, z. B.

$$a = -2\alpha, \quad b = \alpha^2.$$

Wir setzen in (2)

$$y = e^{\alpha x}z$$

ein, dann ist

$$x\frac{d^2y}{dx^2} = xe^{\alpha x}\left(\frac{d^2z}{dx^2} + 2\alpha\frac{dz}{dx} + \alpha^2z\right),$$
$$(ax + c)\frac{dy}{dx} = e^{\alpha x}\left(\quad -2\alpha x\frac{dz}{dx} \quad - 2\alpha^2xz + c\frac{dz}{dx} + c\alpha z\right),$$
$$(bx + g)\,y = e^{\alpha x}\left(\qquad\qquad \alpha^2xz \qquad + gz\right)$$

somit lautet die Differentialgleichung

$$x\frac{d^2z}{dx^2}+c\frac{dz}{dx}+(c\alpha+g)z=0.$$

Um den Coefficienten von z wegzuschaffen, sei $x=-\frac{w}{c\alpha+g}$

$$-w(c\alpha+g)\frac{d^2z}{dw^2}-c(c\alpha+g)\frac{dz}{dw}+(c\alpha+g)z=0$$

oder

$$w\frac{d^2z}{dw^2}+c\frac{dz}{dw}-z=0.$$

Nun haben wir wieder die Form des Typus (5), nur ist in den particulären Lösungen

$$a+1=c,\quad a=c-1$$

zu setzen. Es folgt somit

$$z_1=F(c-1,\ w),$$
$$z_2=x^{1-c}F(1-c,\ w).$$

$y=e^{\alpha x}z$, schliesslich, wenn $w=-(c\alpha+g)x$

$$y_1=e^{\alpha x}F\big(c-1,\ -(c\alpha+g)x\big),$$
$$y_2=e^{\alpha x}x^{1-c}F\big(1-c,\ -(c\alpha+g)x\big).$$

Zum Schlusse dieses Abschnittes bemerken wir, dass sich leicht eine Uebereinstimmung unserer Resultate mit denjenigen des Hrn. L. Pochhammer nachweisen lässt; diese gedrängtere, ohne weitere Hilfsmittel vorgenommene Auflösung wird sicher neben der Methode des Hrn. Pochhammer von Interesse sein, abgesehen davon, dass einige besondere Arten der Darstellungen und einige Eigenschaften klar gelegt worden sind.

Wir fügen gleich noch einen Abschnitt bei, der die directe Methode Euler's illustrirt. Dienger hat schon in seinem Lehrbuch „die Differential- und Integralrechnung, Stuttgart 1857“, darauf aufmerksam gemacht und wir folgen bis zu einem gewissen Punkt seiner Anleitung, um dann die particulären Integrale theils mit Hilfe der vorher behandelten Typen, theils durch hypergeometrische Reihen darzustellen.

D.

Bei der Auflösung von Differentialgleichungen kann man auch den directen Weg einschlagen d. h. eine Differentialgleichung bilden, der eine bestimmte Integralform zukommt, ein Verfahren, das schon Euler angegeben hat.

Es sei

$$y=\int T(t-x)^n\,dt \tag{1}$$

und dieses Integral genüge der Differentialgleichung

$$\square y = L\frac{d^2y}{dx^2} + M\frac{dy}{dx} + Ny = 0,$$

wo L, M, N gegebene Functionen von x allein, T ein Polynom von t allein und n constant ist.

Ueben wir $\square$ auf obiges Integral aus, so kommt bloss in Betracht

$$T\cdot\square(t-x)^n = T(t-x)^{n-2}\cdot V$$

und die Bedingung ist, dass

$$\int T\cdot V(t-x)^{n-2}\,dt = 0$$

ist, zwischen den Grenzen genommen.

Nun ist

$$V = n(n-1)L - nM(t-x) + N(t-x)^2,$$
$$V = Nt^2 - (2Nx + nM)t + Nx^2 - nMx + n(n-1)L.$$

Nun sei längs des Integrationsweges

$$T\cdot V(t-x)^{n-2}\,dt = d\big(P(t-x)^{n-1}\big),$$

wo P eine Function von t allein ist

$$T\cdot V(t-x)^{n-2} = \frac{d}{dt}\big(P(t-x)^{n-1}\big)$$
$$= (t-x)^{n-1}\frac{dP}{dt} + (n-1)P(t-x)^{n-2},$$

$$TV(t-x)^{n-2} = (t-x)^{n-2}\Big[(t-x)\frac{dP}{dt} + (n-1)P\Big]$$

und hieraus

$$TV = (t-x)\frac{dP}{dt} + (n-1)P. \tag{2}$$

Aus (2) ersehen wir, dass V in Bezug auf x eine Function 1ten Grades und in Bezug auf t vom 2ten Grade ist. Somit dürfen wir setzen

$$V = (Ax + a)t^2 + (Bx + b)t + Cx + c. \tag{3}$$

Diesen Werth für V in (2) substituirt folgt, dass der Coefficient von x in (2) auf der linken Seite

$$= (At^2 + Bt + C)T$$

und auf der rechten Seite

$$= -\frac{dP}{dt}$$

ist, also

$$-\frac{dP}{dt} = (At^2 + Bt + C)T. \tag{4}$$

Analog folgt

$$t\frac{dP}{dt} + (n-1)\,P = (at^2 + bt + c)\,T,$$

somit

$$(n-1)\,P = (at^2 + bt + c)T + (At^3 + Bt^2 + Ct)\,T,$$

(5) $$(n-1)\,P = [At^3 + (B+a)\,t^2 + (C+b)\,t + c]\,T.$$

Nun dividire man (4) durch (5)

$$-\frac{dP}{dt}\cdot\frac{1}{(n-1)}\cdot\frac{1}{P} = \frac{At^2 + Bt + C}{At^3 + (B+a)\,t^2 + (C+b)\,t + c},$$

(6) $$\frac{d\log P}{dt} = -(n-1)\,\frac{At^2 + Bt + C}{At^3 + (B+a)\,t^2 + (C+b)\,t + c}.$$

$$d\log P = -(n-1)\,F(t)\,dt,$$

wo

$$F(t) = \frac{At^2 + Bt + C}{At^3 + (B+a)\,t^2 + (C+b)\,t + c},$$

$$P = e^{-(n-1)\int F(t)\,dt} + \text{Const.}$$

Aus (5) finden wir dann

$$T = \frac{(n-1)\,P}{At^3 + (B+a)\,t^2 + (C+b)\,t + c},$$

und somit lässt sich auch, wenn in (1) substituirt wird, y angeben:

$$y = \int \frac{(n-1)\,P\,(t-x)^n}{At^3 + (B+a)\,t^2 + (C+b)\,t + c}\,dt$$

und die Integration der Differentialgleichung ist somit möglich.*)

Wir wollen nun L, M und N bestimmen. Es ist einerseits

(7) $$\begin{cases} V = n(n-1)\,L - nM(t-x) + N(t-x)^2, & \text{andererseits nach (3)} \\ V = (Ax+a)\,t^2 + (Bx+b)\,t + Cx + c, \end{cases}$$

also hieraus

$$N = Ax + a,$$

$$-Mn - 2Nx = Bx + b, \qquad M = -\frac{2A}{n}x^2 - \frac{B+2a}{n}x - \frac{b}{n}.$$

Setzt man im System (7) $t = x$, so folgt

$$n(n-1)\,L = Ax^3 + (B+a)\,x^2 + (C+b)\,x + c,$$

$$L = \frac{Ax^3 + (B+a)\,x^2 + (C-c)\,x + c}{n(n-1)}.$$

Nachdem wir die Differentialgleichung noch mit $n(n-1)$ multiplicirt haben, setzen wir die gefundenen Ausdrücke darin ein:

*) Vergleiche Dienger, S. 349.

$$(8)\qquad [Ax^3+(B+a)x^2+(C+b)x+c]\frac{\partial y^2}{\partial x^2}$$
$$-(n-1)[2Ax^2+(B+2a)x+b]\frac{\partial y}{\partial x}+n(n-1)(Ax+a)y=0.$$

Dieser Gleichung genügt das Integral

$$y=\int\frac{(n-1)P(t-x)^n dt}{At^3+(B+a)t^2+(C+b)t+c},$$

wo P nach früherer Formel bestimmt wird und die einzige Bedingung die ist, dass

$$\{P(t-x)^{n-1}\}=0$$

zwischen den gegebenen Grenzen genommen.

Vorausgesetzt, A sei nicht Null, so folgt nach Division durch A aus (8)

$$(9)\qquad (x^3+\alpha x^2+\beta x+\gamma)\frac{d^2y}{dx^2}-2(n-1)(x^2+\delta x+\varepsilon)\frac{dy}{dx}$$
$$+n(n-1)(x+2\delta-\alpha)y=0;$$

denn wenn

$$\alpha=\frac{B+a}{A},\quad \delta=\left(\frac{B}{2}+a\right)\frac{1}{A},$$

so ist

$$\frac{a}{B}=2\delta-\alpha,$$

und wenn

$$\beta=\frac{C+b}{A},\quad \gamma=\frac{c}{A},\quad 2\varepsilon=\frac{b}{A},$$

so ist

$$\frac{C}{A}=\beta-2\varepsilon,\quad \frac{B}{A}=2(\alpha-\delta).$$

Die Function P wird dann durch folgende Differentialgleichung bestimmt:

$$\frac{d\log P}{dt}=-(n-1)\frac{t^2+2(\alpha-\delta)t+\beta-2\varepsilon}{t^3+\alpha t^2+\beta t+\gamma}$$

und das Integral ist

$$y=\int\frac{(n-1)P(t-x)^n}{t^3+\alpha t^2+\beta t+\gamma}dt,$$

mit der Bedingung, dass

$$\{P(t-x)^{n-1}\}=0$$

zwischen den gegebenen Grenzen.

Specialfall. $A=0$. Die Gleichung lautet, wenn $B+a$ nicht Null

$$[(B+a)x^2+(C+b)x+c]\frac{d^2y}{dx^2}-(n-1)[(B+2a)x+b]\frac{dy}{dx}$$
$$+n(n-1)y=0,\quad\text{oder}$$

$$(10)\qquad (x^2+fx+g)\frac{d^2y}{dx^2}+(hx+j)\frac{dy}{dx}+ky=0.$$

Nun ist, ausgehend von dem Resultat, dass

$$n(n-1)(B+a)+n(-n+1)(B+2a)+n(n-1)a \quad =0,$$
$$n(n-1) \qquad +n\left(-n(n-1)\right)\frac{B-2a}{B+a}+n(n-1)\frac{a}{B+a}=0$$

und

$$h=-(n-1)\frac{B+2a}{B+a}, \quad k=\frac{a}{B+a}\cdot n(n-1),$$

folgende Beziehung möglich:

$$n(n-1)+nh+k=0,$$
$$n^2-(1-h)n+k=0.$$

Diese quadratische Gleichung hat die Wurzeln m und n

$$k=mn,$$
$$h=1-m-n.$$

Nun hat man in Bezug auf die Verhältnisse der Coefficienten völlige Freiheit zu setzen, was man will; daher nehmen wir $a=m$ an, somit folgt aus k die Beziehung

$$B+a=(n-1)\;, \quad B=n-m-1,$$
$$-(n-1)b=(n-1)j, \quad b=-j,$$
$$C+b=(n-1)f, \quad C=(n-1)f+j,$$

wir erhalten demnach für P die Differentialgleichung

$$\frac{d\log P}{dt}=-\frac{(n-m-1)t+(n-1)f+j}{t^2+ft+g},$$
$$\frac{d\log P}{dt}=\frac{(-n+m-1)t-(n-1)f-j}{t^2+ft+g},$$

und das Integral

$$y=\int\frac{P(t-x)^n}{t^2+ft+g}\,dt$$

mit der Bedingung, dass

$$\left\{P(t-x)^{n-1}\right\}=0$$

zwischen den Grenzen.

Nun sind hier zwei Unterfälle zu unterscheiden:

1) die Wurzeln der Gleichung $t^2+ft+g=0$ seien verschieden,

2) „ „ „ „ $t^2+ft+g=0$ seien einander gleich.

1) *Die Wurzeln seien verschieden*, dann ist

$$t^2+ft+g=(t-\alpha)(t-\beta),$$

also auch

$$x^2+fx+g=(x-\alpha)(x-\beta)$$

und die Differentialgleichung lautet

$$(11) \qquad (x-\alpha)(x-\beta)\frac{d^2y}{dx^2}+(hx+j)\frac{dy}{dx}+ky=0;$$

dieselbe kann anders dargestellt werden.

Es ist

$$f = -(\alpha + \beta), \quad g = \alpha\beta,$$

$$\frac{d \log P}{dt} = \frac{(-n + m - 1)t + (n-1)(\alpha+\beta) - j}{(t-\alpha)(t-\beta)} = \frac{A}{t-\alpha} + \frac{B}{t-\beta},$$

$$A = \frac{m\alpha + (n-1)\beta -}{\alpha - \beta},$$

$$B = \frac{-(n-1)\alpha - m\beta + j}{\alpha - \beta},$$

$$A + B = m - n + 1,$$

$$j = (m - A)\alpha + (A + n - 1)\beta.$$

Vertauscht man die zwei Wurzeln m und n, so geht A in $1 - B$ und B in $1 - A$ über.

Wir setzen in die Differentialgleichung (11) ein

$$(12) \qquad (x-\alpha)(x-\beta)\frac{d^2y}{dx^2} + [(1 - m - n)x + (m - A)\alpha + (A + n - 1)\beta]\frac{dy}{dx} + mny = 0.$$

Aus

$$d \log P = \frac{A}{t-\alpha}\,dt + \frac{B}{t-\beta}\,dt$$

folgt, wenn $B = -A + m - n + 1$

$$P = (t-\alpha)^A (t-\beta)^{-A+m-n+1},$$

also auch

$$y = \int \frac{(t-\alpha)^A (t-\beta)^{-A+m-n+1} (t-x)^n \, dt}{(t-\alpha)(t-\beta)}$$

$$= \int (t-\alpha)^{A-1} (t-x)^n (t-\beta)^{-A+m-n} \, dt$$

und die Bedingung ist, dass

$$\{(t-\alpha)^A (t-\beta)^{m-n-A+1} (t-x)^n\} = 0$$

zwischen den Grenzen.

Die Pole des Integrals sind α, β, x und ∞. Wir dürfen annehmen, dass von diesen 4 Polen mindestens ein Pol zugänglich sei; von diesem Pol aus bilden wir 3 Schlingen-Integrale, deren Summe $= 0$ ist; somit reduciren sich dieselben auf zwei Integrale, für welche wir bequeme Annahmen machen wollen*). Es sei $\beta < x < \alpha < \infty$. Wir bilden zuerst

$$y = \int_{\alpha}^{\infty} (t-\alpha)^{A-1} (t-\beta)^{m-n-A} (t-x)^n \, dt.$$

*) Herr H. Weber hat mich darauf aufmerksam gemacht, dass die von H. Pochhammer herrührenden Doppelumgänge um 2 Pole jede specielle Voraussetzung über die Exponenten unnöthig machen, was auch in den Anmerkungen zu Riemann's Arbeit über die Gauss'schen F-Functionen in der zweiten Auflage erwähnt ist. Ich muss es auf später verschieben, gerade hier davon Gebrauch zu machen.

Bevor wir aber das Integral weiter entwickeln, wollen wir in (12) eine neue Variable einführen.

Es war nach (12)

$$(x-\alpha)(x-\beta)\frac{d^2y}{dx^2}$$
$$+[(1-m-n)x+(m-A)\alpha+(A+n-1)\beta]\frac{dy}{dx}+mny=0.$$

Nun ist

$$(x-\alpha)(x-\beta)\frac{d^2y}{dx^2}=[(x-\beta)-(\alpha-\beta)](x-\beta)\frac{d^2y}{dx^2}$$
$$=(\alpha-\beta)^2\left(\frac{x-\beta}{\alpha-\beta}-1\right)\frac{x-\beta}{\alpha-\beta}\cdot\frac{d^2y}{d^2\frac{x-\beta}{\alpha-\beta}},\quad \frac{x-\beta}{\alpha-\beta}=w,$$
$$(x-\alpha)(x-\beta)\frac{d^2y}{dx^2}=(\alpha-\beta)^2(w-1)w\frac{d^2y}{dw^2}$$

und so geht die Gleichung (12) über in

$$(13)\qquad w(w-1)\frac{d^2y}{dx^2}+[(1-m-n)w+m-A]\frac{dy}{dw}+mny=0.$$

Das Integral soll auch entsprechend verwandelt werden; statt der Grenzen α und ∞ wollen wir 1 und 0 setzen.

Wir setzen

$$t-\beta=\frac{\alpha-\beta}{s},\quad \text{dann ist}\quad t-\alpha=(\alpha-\beta)\frac{1-s}{s},$$
$$t-x=(\alpha-\beta)\frac{1-ws}{s},\qquad dt=-(\alpha-\beta)\frac{ds}{s^2}.$$

Wir erhalten für das Integral

$$y=(\alpha-\beta)^m\int_0^1 s^{-m-1}(1-s)^{A-1}(1-ws)^n\,ds.$$

Nun war

$$\beta<x<\alpha,$$

also ist

$$0<x-\beta<\alpha-\beta,$$
$$0<\frac{x-\beta}{\alpha-\beta}<1,$$
$$0<w<1.$$

Ferner setzen wir voraus die recp. $-m$ und recp. A seien positiv und nehmen an ws abs. <1, dann ist

$$(1-ws)^n=\sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty}(-1)^\lambda\binom{n}{\lambda}w^\lambda s^\lambda$$
$$(-1)^\lambda\binom{n}{\lambda}=\frac{(-n)(-n+1)\ldots(-n+\lambda-1)}{1.2.3\ldots\lambda}\cdot\frac{\Gamma(-n)}{\Gamma(-n)}=\frac{\Gamma(\lambda-n)}{\lambda!\,\Gamma(-n)},$$
$$(1-ws)^n=\sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty}\frac{\Gamma(\lambda-n)}{\lambda!\,\Gamma(-n)}w^\lambda s^\lambda,$$

also

$$y = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} \frac{\Gamma(\lambda-n)}{\lambda!\,\Gamma(-n)} \cdot w^\lambda \int_0^1 s^{\lambda-m-1}(1-s)^{A-1}\,ds$$

$$= \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} \frac{\Gamma(\lambda-n)}{\lambda!\,\Gamma(-n)} \cdot \frac{\Gamma(\lambda-m)\,\Gamma(A)}{\Gamma(\lambda-m+A)}\; w^\lambda$$

$$= \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} \frac{\Gamma(A)}{\Gamma(-n)} \cdot \frac{\Gamma(-n)(-n).(-n+1)\ldots(-n+\lambda-1).\Gamma(-m)(-m)(-m+1)\ldots(-m+\lambda-1)}{\lambda!\,\Gamma(A-m).(A-m)(A-m+1)\ldots(A-m+\lambda-1)}\,w^\lambda,$$

$$y = \frac{\Gamma(A)\,\Gamma(-m)}{\Gamma(A-m)}\,F(-n,\ -m,\ A-m,\ w),$$

$$y_1 = \frac{\Gamma(A)\,\Gamma(-m)}{\Gamma(A-m)}\,F\left(-n,\ -m,\ A-m,\ \frac{x-\alpha}{\alpha-\beta}\right)$$

erstes particuläres Integral.

Nun integriren wir von β bis x und setzen

$$y = \int_\beta^x (\alpha-t)^{A-1}(t-\beta)^{m-n-A}(x-t)^n\,dt.$$

Um die Grenzen 0 und 1 einzuführen, setzen wir

$$t-\beta = (x-\beta)s,$$
$$t=\beta,\quad s=0,$$
$$t=x,\quad s=1,\quad \alpha-t=(\alpha-\beta)(1-ws),\quad t-\beta=(a-\beta)ws,$$
$$(x-t) = (\alpha-\beta)(1-s)\,w.$$

$$y = (\alpha-\beta)^m \,.\, w^{m-A+1}\int_0^1 s^{m-n-A}(1-s)^n(1-ws)^{A-1}ds,$$

$$(1-ws)^{A-1} = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty}(-1)^\lambda \binom{A-1}{\lambda} w^\lambda s^\lambda$$

$$(-1)^\lambda\binom{A-1}{\lambda} = \frac{(-A+1)(-A+2)\ldots(-A+\lambda)}{\lambda!}$$

$$= \frac{\Gamma(-A+\lambda+1)}{\lambda!\,\Gamma(1-A)},$$

$$(1-ws)^{A-1} = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty}\frac{\Gamma(-A+\lambda+1)}{\lambda!\,\Gamma(1-A)}\cdot w^\lambda s^\lambda,$$

$$y = (\alpha-\beta)^m.w^{m-A+1}.\sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty}\frac{\Gamma(-A+\lambda+1)}{\lambda!\,\Gamma(1-A)}\cdot w^\lambda\int_0^1 s^{m-n-A+\lambda}(1-s)^n\,ds$$

$$= (\alpha-\beta)^m.w^{m-A+1}.\sum\frac{\Gamma(-A+\lambda+1)\,\Gamma(m-n-A+\lambda+1)\,\Gamma(n+1)}{\lambda!\,\Gamma(1-A)\,\Gamma(m-A+\lambda+2)}\cdot w^\lambda,$$

$$y = (\alpha - \beta)^m . w^{m-A+1} \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(m-n+A+1)}{\Gamma(m-A+2)} \times$$
$$F(1-A,\ m-n+A+1,\ m-A+2,\ w),$$
$$y_2 = (\alpha-\beta)^m \left(\frac{x-\alpha}{\alpha-\beta}\right)^{m-A+1} \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(m-n+A+1)}{\Gamma(m-A+2)} \times$$
$$F\left(1-A,\ m-n+A+1,\ m-A+2,\ \frac{x-\alpha}{\alpha-\beta}\right)$$

zweites particuläres Integral.

Wir bemerken bei beiden particulären Lösungen, dass dieselben aus hypergeometrischen Reihen bestehen, welche als Factor selbst wieder ein vollständiges Euler'sches Integral I. Art haben.

2) *Die Wurzeln seien gleich.* Dann ist

$$t^2 + ft + g$$

wie auch

$$x^2 + fx + g$$

ein Quadrat

$$= (t-\alpha)^2 \quad \text{oder} \quad (x-\alpha)^2, \quad f = -2\alpha, \quad g = \alpha^2.$$

Die Differentialgleichung lautet nach Gleichung (12)

$$(14) \quad (x-\alpha)^2 \frac{d^2y}{dx^2} + [(1-m-n)(x-\alpha) + (1-m-n)\alpha + j] \frac{dy}{dx} + mny = 0.$$

Nun wollen wir

$$x \text{ statt } x - \alpha,$$
$$t \quad " \quad t - \alpha$$

substituiren. Da

$$(1-m-n)\alpha + j = h$$

ist, so hat man

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + (1-m-n) x \frac{dy}{dx} + mny + h \frac{dy}{dx} = 0,$$
$$x \frac{d}{dx} = D,$$
$$x^2 \frac{d^2}{dx^2} = D(D-1),$$
$$[D(D-1) + (1-m-n)D + mn]\, y + h \frac{dy}{dx} = 0,$$
$$(15) \qquad (D-m)(D-n)\, y + h \frac{dy}{dx} = 0.$$

Nun sei

$$\frac{h}{x} = w, \ \log h - \log x = \log w, \ x \frac{d}{dx} = -w \frac{d}{dw} = D,$$

daher folgt

$$\left(w \frac{d}{dw} + m\right)\left(w \frac{d}{dw} + n\right) y + w^2 \frac{dy}{dw} = 0.$$

Nun könnte man auf gleiche Weise verfahren wie im vorigen Fall,

jedoch lässt sich diese Gleichung auf eine der schon behandelten Formen reduciren. Wenn wir die Substitution $y = w^{-n} z$ machen, dann nimmt sie die Form an

$$w \frac{d^2 z}{dw^2} + (m - n + 1 - w) \frac{dz}{dw} + nz = 0,$$

oder

$$w \frac{d^2 z}{dw^2} - (w - m + n - 1) \frac{dz}{dw} + nz = 0,$$

was der Typus (3) ist, wenn $\varrho = (m - n + 1)$, $\alpha = n$ gesetzt wird. Die particulären Integrale sind demnach

$$\begin{aligned}
z_1 &= F(-n,\ m - n + 1,\ w), \\
z_2 &= w^{n-m} F(-m,\ n - m + 1,\ w), \\
y_1 &= w^{-n} F(-n,\ m - n + 1,\ w), \\
y_2 &= w^{-m} F(-m,\ n - m + 1,\ w), \\
y_1 &= \left(\frac{x-\alpha}{\alpha-\beta}\right)^{-n} F\left(-n,\ m - n + 1,\ \frac{x-\alpha}{\alpha-\beta}\right), \\
y_2 &= \left(\frac{x-\alpha}{\alpha-\beta}\right)^{-m} F\left(-m,\ m - n + 1,\ \frac{x-\alpha}{\alpha-\beta}\right).
\end{aligned}$$

Die Anregung zur Ausarbeitung des Vorliegenden verdanke ich meinem verehrten Lehrer Herrn Prof. Dr. L. Schläfli.

Bern, im März 1894.

Zur analytischen Theorie der Wärmeleitung.

Von

A. Sommerfeld in Göttingen.

§ 1.

Allgemeines.

Die beiden verschiedenen Auffassungen eines natürlichen Vorganges als Fernwirkung einerseits oder als einer unmittelbaren Energieübertragung von Punkt zu Punkt andrerseits, welche sich in der Geschichte der Physik wechselsweise abgelöst haben, spiegeln sich in der mathematischen Behandlung der physikalischen Probleme wieder. So gründet man die Potentialtheorie entweder auf das Newton'sche Potential $\frac{1}{r}$, indem man sich auf den Standpunkt der Fernwirkung stellt und das Vorhandensein von punktförmigen Massen zulässt, oder man geht von der Laplace'schen Gleichung aus, indem man den Zustand in jedem Raumtheile durch die unmittelbar benachbarten Theile bestimmt denkt und die Masse als continuirlich vorstellt. In der Theorie der Wärmeleitung ist nach dem Vorgange Fourier's fast nur der zweite Weg verfolgt worden. Indem man die partielle Differentialgleichung der Wärmeleitung

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u$$

voranstellt, bildet man particuläre Lösungen derselben, welche einer stetigen Vertheilung der Wärme entsprechen und sucht durch passende Zusammensetzung solcher Lösungen (Reihenentwickelung) den Bedingungen des Problems zu genügen. Lässt man aber die Existenz von „Temperaturpolen" zu, d. h. von Punkten, in denen eine endliche Wärmemenge concentrirt ist, so bietet sich eine Methode dar, welche der Fernwirkungshypothese entspricht und welche, im Gegensatz zur „Fourier'schen", als Methode der „Hauptlösungen" bezeichnet werden soll.*)

*) Das Wort ist den Vorlesungen von Herrn F. Klein „Ueber die physikalischen Differentialgleichungen" 1888 — 1889 entlehnt, in denen die Methode der Hauptlösungen principiell durchgeführt wird. Herr Boussinesq bezeichnet sie als „solutions simples naturelles, vgl.: Application des Potentiels à l'étude de l'équation de l'équilibre et du mouvement des solides élastiques. Paris 1885. Note compl. II.

Wir stellen als Hauptlösung die Function:

$$u = (t-\tau)^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{r^2}{4a^2(t-\tau)}}$$

an die Spitze, welche die Wirkung eines „Temperaturpoles von der Intensität 1" in einem unbegrenzten Medium mit der Temperaturleitungsfähigkeit a^2 darstellt. Der Pol ist bestimmt durch die Coordinaten ξ, η, ζ, τ; r ist der Abstand des variabeln Punktes x, y, z von dem Punkte ξ, η, ζ; t wird grösser als τ vorausgesetzt. Im Anfangszustande ($\lim t = \tau$) wird u überall Null ausser im Punkte ξ, η, ζ, wo u wie $(t-\tau)^{-\frac{3}{2}}$ unendlich wird. Allgemein sagen wir von einer Function, welche für $t = \tau$ in einem Punkte ξ, η, ζ unendlich wird wie $J.u$, dass sie an dieser Stelle einen Pol von der Intensität J habe.

Man findet die Hauptlösung allerdings mit Hülfe der Differentialgleichung der Wärmeleitung. Es hindert aber Nichts, sie als das Ursprüngliche, etwa durch die Beobachtung Gegebene anzusehen und umgekehrt die Differentialgleichung aus ihr zu folgern. Dieses müssen wir thun, wenn wir den Standpunkt der Fernwirkung consequent durchführen wollen.

Ebenso wie das Potential $\frac{1}{r}$ bez. $\lg r$ spielt diese Function eine Rolle bei allgemeineren Fragen.*) Ich habe in meiner Inauguraldissertation**) gezeigt, dass man von der Hauptlösung aus zu Darstellungen willkürlicher Functionen gelangt, welche für den Werth $t = \tau$ in die gewöhnlichen Fourier'schen übergehen, für $t > \tau$ aber und für den Limes $t = \tau$ sich von diesen durch einen Factor unterscheiden, welcher die Convergenz auch in denjenigen Fällen bewirkt, in denen die gewöhnlichen Ausdrücke divergiren würden. Die einzige Voraussetzung ist dabei die Integrirbarkeit der darzustellenden Function. Es ist daher nicht nöthig, von der für den Anfangszustand vorgeschriebenen Function vorauszusetzen, dass sie in eine Fourier'sche oder ähnliche Reihe entwickelt werden kann, wie es in der Regel geschieht. Denn in den Anwendungen kommt es allein auf den $\lim t = \tau$, nicht auf den Werth der Function für $t = \tau$ selbst an.

Handelt es sich um die Bestimmung der Temperatur für einen begrenzten Körper K, so construiren wir aus der Hauptlösung zunächst

---

*) Vgl. P. Appel: Sur l'équation $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial z}{\partial y} = 0$ et la théorie de la chaleur. Journ. de Mathém. ser. 4, Bd. 8, p. 187, 1892.

**) Die willkürlichen Functionen in der mathematischen Physik. Königsberg 1891. Vgl. auch K. Weierstrass: Ueber Functionen einer reellen Veränderlichen. Sitzungsber. d. Berl. Acad. 1885, p. 803.

die „Green'sche Function". Darunter verstehen wir eine Function der beiden Werthsysteme ξ, η, ζ, τ und x, y, z, t, welche folgenden Bedingungen genügt:

1) Sie erfüllt in den ξ, η, ζ, τ die Differentialgleichung:

$$a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2}\right) + \frac{\partial u}{\partial \tau} = 0,$$

d. i. die zur Differentialgleichung der Wärmeleitung adjungirte*) Gleichung.

2) Wenn $t - \tau$ von positiven Werthen nach Null convergirt, nähert sie sich in allen Punkten des Innern von K gleichmässig der Hauptlösung:

$$(t-\tau)^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2}{4a^2(t-\tau)}},$$

deren Pol x, y, z im Innern von K liegt.

3) Auf der Oberfläche von K verschwindet sie für jeden Werth $\tau < t$.

Die Variabeln τ und t kommen nur in der Verbindung $t - \tau$ vor; es werden nur Werthe $\tau < t$ in Betracht gezogen. Die Lösung des allgemeinen Problems, bei dem im Innern von K für $t = 0$ und auf der Oberfläche von K für jedes positive t eine beliebige Temperatur vorgeschrieben ist, lässt sich aus dieser Function durch einfache Quadraturen ableiten. Zu dem Zwecke integrire man die Grösse

$$u\left(a^2\Delta v - \frac{\partial v}{\partial \tau}\right) - v\left(a^2\Delta u + \frac{\partial u}{\partial \tau}\right),$$

$\left(\text{wo } \Delta = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} \text{ gesetzt ist}\right)$ nach ξ, η, ζ über das Innere von K und nach τ von 0 bis t. Im Raume von 4 Dimensionen ist das Integrationsgebiet ein gerader Cylinder mit der Basis K und der Höhe t, dessen Axe der τ-Axe parallel geht. Dieses Integral, dessen Werth Null ist, wird wie beim Green'schen Satze der Potentialtheorie umgeformt. Man erhält**):

$$(4\pi a^2)^{\frac{3}{2}} v(x, y, z, t) = \int v_0 u \, d\xi \, d\eta \, d\zeta + a^2 \int_0^t d\tau \int do \, \bar{v} \frac{\partial u}{\partial n}.$$

Hier ist das Integral des ersten Termes über die Basis des vierdimensionalen Cylinders, die des zweiten über dessen Mantelfläche zu führen. n bedeutet

*) Ueber den Begriff der adjungirten Differentialgl. s. Darboux: Théorie des surfaces, Bd. II, Cap. 4.

**) B. Minnigerode: Ueber die Wärmeleitung in Krystallen. Inaug.-Diss. Göttingen 1862, pag. 11 und Betti: Mem. della Soc. Ital. ser. III, Bd. 1, 1867, pag. 165. Specielle Fälle dieser Gleichung finden sich: Riemann, Part. Differentialgl. § 52 und Heine: Handb. d. Kugelf. Bd. II, § 80.

die nach innen positiv gerechnete Normale, v_0 die für die Basis, $\bar{v}$ die für den Mantel vorgeschriebenen Werthe von v. Die anschauliche Bedeutung dieser Gleichung ist die, dass man die Temperatur v an der Stelle x, y, z, t ansehen kann als hervorgegangen aus einer Summe von Elementarwirkungen, deren jede von einer Stelle der Cylinderoberfläche ausgeht. Auf Grund dieser Formel werden wir uns im Folgenden stets darauf beschränken dürfen, die Green'sche Function für das jeweils zu betrachtende Gebiet aufzustellen.

§ 2.

Lineare Wärmeleitung.

Die Probleme der linearen Wärmeleitung lassen sich nach der Methode der Hauptlösung mit grösserer Anschaulichkeit und Einfachheit erledigen, als es nach der Fourier'schen Methode möglich ist. Die Hauptlösung, von der wir bei einem eindimensionalen Gebiet auszugehen haben, lautet:

$$u = t^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}}. \tag{1}$$

Hinsichtlich der einfacheren Fälle verweisen wir auf die Litteratur*) und betrachten hier nur den allgemeineren Fall der Wärmeleitung in einem Stabe aus inhomogenem Material**). Der Stab sei nach beiden Seiten hin unendlich ausgedehnt, gegen Wärmeabgabe nach aussen geschützt und wird so dünn vorausgesetzt, dass die Temperatur nur von einer Coordinate (x) abhängt. Für die Punkte $x > 0$ sei die Wärme- bez. Temperaturleitungsfähigkeit k_1 und a_1^2, für $x < 0$ k_2 und a_2^2. Die Wärmebewegung wird durch die folgenden Gleichungen bestimmt:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a_1^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \cdots \text{ für } x > 0, \tag{2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a_2^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \cdots \quad ,, \quad x < 0, \tag{3}$$

$$\left.\begin{array}{c} (u)_+ = (u)_- \\ k_1 \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_+ = k_2 \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_- \end{array}\right\} \quad \cdots \quad ,, \quad x = 0. \tag{4}$$

Die Green'sche Function für diesen Stab ist durch folgende Bedingungen zu definiren: Sie genügt für $t > 0$ den vorstehenden

*) Sir W. Thomson, Mathematical and Physical Papers Bd. II, art. 72, pag. 41 und E. Hobson. Synthetical solutions in the conduction of heat. Proc. of the London Math. Soc. Bd. XIX, pag. 279, 1889.

**) Dasselbe Problem ist kürzlich von Herrn H. Weber behandelt worden: Göttinger Nachrichten 1893, pag. 722. Die Verschiedenheit der Methode rechtfertigt vielleicht ein nochmaliges Zurückkommen auf denselben Gegenstand.

Gleichungen und verhält sich für lim $t=0$ ebenso wie die durch Gleichung (1) definirte Hauptlösung, d. h. sie wird für jeden Werth von x gleich Null, ausser für $x=\xi$, wo sie wie $t^{-\frac{1}{2}}$ unendlich wird. Der Punkt $x=\xi$ möge etwa auf der positiven Seite des Stabes liegen. Wir construiren successive zwei Functionen u_1 und u_2, von denen u_1 die Green'sche Function für positive, u_2 für negative x darstellen soll. Für negative Werthe von x ist dann noch u_1, für positive u_2 ganz willkürlich. Wir setzen zunächst versuchsweise u_1 gleich der Hauptlösung selbst:

$$u_1 = t^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a_1^2 t}}.$$

Diese Function genügt der Gleichung (2) und der für die Green'sche Function gestellten Anfangsbedingung. Wir haben sie der Gleichung (4) entsprechend nach der negativen Seite fortzusetzen. Es gelingt dieses mit Hülfe der Taylor'schen Reihe, da für $x=0$ sämmtliche Differentialquotienten berechnet werden können. Die entstehende Function nennen wir u_2. Wir haben nach Gleichung (4) für $x=0$:

$$u_2 = u_1, \quad k_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} = k_1 \frac{\partial u_1}{\partial x}.$$

Die Gleichungen (4) können nach t differentiirt werden, da sie für jedes positive t gelten sollen. Wir erhalten mit Benutzung von (2) und (3):

$$a_2^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} = a_1^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}, \qquad k_2 a_2^2 \frac{\partial^3 u_2}{\partial x^3} = k_1 a_1^2 \frac{\partial^3 u_1}{\partial x^3}$$

und allgemein:

$$\frac{\partial^{2n} u_2}{\partial x^{2n}} = \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{2n} \frac{\partial^{2n} u_1}{\partial x^{2n}}, \qquad \frac{\partial^{2n+1} u_2}{\partial x^{2n+1}} = \frac{k_1}{k_2} \cdot \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{2n} \frac{\partial^{2n+1} u_1}{\partial x^{2n+1}}.$$

Diese Gleichungen, welche sämmtlich für $x=0$ gelten, bestimmen den Verlauf von u_2 für $x<0$ vollständig, da u_2 ebenso wie u_1 eine analytische Function von x wird. Wir erhalten für u_2 die convergente Reihe:

$$2u_2 = (1+\alpha) \sum \frac{1}{n!} \left(\frac{a_1 x}{a_2}\right)^n \left(\frac{\partial^n u_1}{\partial x^n}\right)_{x=0}$$
$$+ (1-\alpha) \sum \frac{1}{n!} \left(\frac{-a_1 x}{a_2}\right)^n \left(\frac{\partial^n u_1}{\partial x^n}\right)_{x=0}.$$

Hier ist α zur Abkürzung für $\frac{k_1 a_2}{k_2 a_1}$ gesetzt. Die Summen rechter Hand lassen sich ausführen. Sie sind nichts Anderes als u_1 selbst, wenn man darin x mit $\frac{a_1 x}{a_2}$ bez. mit $\frac{-a_1 x}{a_2}$ vertauscht. Wir erhalten daher:

$$(5) \quad 2u_2 = (1+\alpha)\, t^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{4t}\left(\frac{x}{a_2} - \frac{\xi}{a_1}\right)^2} + (1-\alpha)\, t^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{4t}\left(\frac{x}{a_2} + \frac{\xi}{a_1}\right)^2}.$$

Für ein nach Null abnehmendes t wird u_2 in 2 Punkten unendlich, nämlich in

(6) $$\xi_2 = \frac{\xi a_2}{a_1} \quad \text{und} \quad \xi_2' = -\frac{\xi a_2}{a_1}.$$

Die Function u_2 verhält sich so, als ob sie von 2 Temperaturpolen herrührte. Wir haben, von der negativen Seite gesehen, statt des ursprünglichen einen Poles in $x = \xi$ zwei Bilder desselben; das auf der positiven Seite gelegene Bild ξ_2 widerspricht den Bedingungen des Problems nicht, da ja u_2 für positive Werthe von x ganz willkürlich ist, wohl aber das auf der negativen Seite in ξ_2' gelegene; denn für $x < 0$ soll u_2 mit der Green'schen Function identisch sein, also für $t = 0$ überall verschwinden. Wir werden den Pol ξ_2' fortschaffen, indem wir in denselben Punkt einen Pol von entgegengesetzt gleicher Intensität hinein legen, oder mit anderen Worten die Function

$$u_2' = -\frac{1-\alpha}{2}\, t^{-\frac{1}{2}}\, e^{-\frac{1}{4t}\left(\frac{x}{a_2}+\frac{\xi}{a_1}\right)^2}$$

zu u_2 hinzufügen. Diese Function haben wir nach der positiven Seite den Gleichungen (4) entsprechend fortzusetzen, ebenso wie vorher u_1 nach der negativen. Das Resultat lässt sich aus Gleichung (5) direct ablesen, wenn wir k_1, a_1, ξ mit k_2, a_2, ξ_2' vertauschen und den Factor $-\frac{1-\alpha}{2}$ in u_2' berücksichtigen. Die Grösse α in Gleichung (5) geht dann in $\frac{1}{\alpha}$ über. Die so entstehende Function, die wir u_1' nennen, haben wir zu u_1 hinzuzufügen. Wir erhalten:

$$2u_1' = -t^{-\frac{1}{2}}\frac{1-\alpha}{2}\left\{\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a_1^2 t}} + \left(1-\frac{1}{\alpha}\right)e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a_1^2 t}}\right\}.$$

Die Pole von u_1' sind, den Gleichungen (6) entsprechend:

$$\xi_1 = \frac{\xi_2' a_1}{a_2} = -\xi \quad \text{und} \quad \xi_1' = -\frac{\xi_2' a_1}{a_2} = \xi.$$

Der Pol ξ_1 ist mit den für die Green'sche Function gestellten Bedingungen verträglich, da ξ_1 auf der negativen Seite liegt und da ja für $x < 0$ die Functionen u_1, u_1' willkürlich gewählt werden dürfen. Der Pol ξ_1' ist es aber auch, weil er mit dem ursprünglichen Pole ξ zusammenfällt, ohne ihn gerade zu compensiren. Die Function $u_1 + u_1'$ hat daher auf der positiven Seite des Stabes nur den einen Pol $x = \xi$, die Function $u_2 + u_2'$ auf der negativen überhaupt keinen, wie wir es bei der Definition der Green'schen Function verlangten. Dividiren wir noch mit dem Factor $\beta = 1 - \frac{1}{4}(1-\alpha)\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)$, um zu bewirken, dass die Green'sche Function in $x = \xi$ gerade mit dem

Factor 1 unendlich wird, so bekommen wir als Lösung der gestellten Aufgabe:

$$(7)\quad \begin{cases} \text{für } x > 0 \quad u = \frac{1}{\beta}(u_1 + u_1') = t^{-\frac{1}{2}}\left(e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a_1^2 t}} + A e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a_1^2 t}}\right), \\ \text{für } x < 0 \quad u = \frac{1}{\beta}(u_2 + u_2') = t^{-\frac{1}{2}} B e^{-\frac{1}{4t}\left(\frac{x}{a_2} - \frac{\xi}{a_1}\right)^2}. \end{cases}$$

Hier ist zur Abkürzung gesetzt:

$$(8)\qquad A = \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1}, \quad B = \frac{2\alpha}{\alpha + 1}, \quad \alpha = \frac{k_1 a_2}{k_2 a_1}.$$

Vergleichen wir dieses Resultat mit den bekannten optischen Vorgängen an der Trennungsfläche zweier optisch verschiedenen Medien I und II! Hier unterscheidet man den auffallenden, den reflectirten und den gebrochenen Strahl. Die optischen Vorgänge im Medium I lassen sich so auffassen, als ob sie von 2 leuchtenden Punkten ausgingen, von denen der erste im Medium I, der zweite im Medium II im Bildpunkte des ersten liegt. Im Medium II haben wir nur einen Strahl, welcher von einem Punkte des Mediums I auszugehen scheint. Zu einem ganz analogen Resultat sind wir im Vorstehenden geführt worden. Von den drei Termen auf der rechten Seite der Gleichungen (7) entspricht der erste dem auffallenden Strahl, der zweite dem reflectirten. Dieser scheint von dem Spiegelbilde des Poles ξ, dem Punkte $-\xi$, auszugehen. Der dritte Term stellt den gebrochenen Strahl dar. Derselbe geht von dem im Medium I gelegenen Punkte $\frac{a_2}{a_1}\xi$ aus, welcher nicht mit ξ zusammenfällt, sondern nach Massgabe der Verschiedenheit der Wärmeleitungsconstanten verschoben ist. Die Gleichung (8) lehrt die Intensität des gebrochenen und des reflectirten Strahles berechnen.

Für die speciellen Werthe 0 und ∞ der Constanten k_2 gehen unsere Gleichungen (7) in die Lösungen bekannter Probleme über, welche sich leicht direct ableiten lassen. Ist k_2 gleich Null, so haben wir einen einseitig begrenzten Stab, welcher in $x = 0$ an einen Nichtleiter der Wärme grenzt; in diesem Falle ist das Temperaturgefälle $\frac{\partial u}{\partial x}$ in $x = 0$ constant gleich Null. Ist k_2 unendlich, so grenzt der Stab in $x = 0$ an einen vollkommenen Leiter; in diesem Falle behält u seinen anfänglichen Werth 0 für jede spätere Zeit bei. Die Green'sche Function für den ersten Fall erhält man, indem man in den zu dem Pole ξ in Bezug auf $x = 0$ symmetrischen Punkt $-\xi$ einen Pol mit der gleichen Intensität, die Green'sche Function für den zweiten Fall, indem man in denselben Punkt einen Pol mit der entgegengesetzt gleichen Intensität bringt. Dementsprechend wird in Gleichung (8)

A im ersten Falle gleich $+1$, im zweiten gleich -1. Es ist nämlich $a_2^2 = k_2/C$, wo C die Wärmecapacität pro Volumeneinheit bedeutet; daher wird α im ersten Falle unendlich gross, im zweiten Falle gleich Null.

An die Stelle der endlichen Summe in Gleichung (7) tritt eine Summe von unendlich vielen Gliedern, wenn der Stab aus *mehr als zwei Stücken verschiedenen Materiales* besteht.

Es seien I, II, III drei Theile eines Stabes mit den Constanten a_1, k_1, a_2, k_2, a_3, k_3. I reiche von $x = x_1$ bis $x = +\infty$, II von $x = x_2$ bis $x = x_1$, III von $x = -\infty$ bis $x = x_2$, wobei $x_1 > x_2$. Die Green'sche Function u, die zu diesem Stabe gehört, ist durch die folgenden Bedingungen zu bestimmen:

$$(9) \quad 1)\ \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= a_1^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} && \text{für} \quad x_1 < x < +\infty, \\ \frac{\partial u}{\partial t} &= a_2^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} && \text{„} \quad x_2 < x < x_1, \\ \frac{\partial u}{\partial t} &= a_3^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} && \text{„} \quad -\infty < x < x_2. \end{aligned}$$

$$(10) \quad 2)\ \begin{aligned} u_{x_1+\varepsilon} &= u_{x_1-\varepsilon}, \quad & k_1\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x_1+\varepsilon} &= k_2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x_1-\varepsilon}, \\ u_{x_2+\varepsilon} &= u_{x_2-\varepsilon}, \quad & k_2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x_2+\varepsilon} &= k_3\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x_2-\varepsilon}. \end{aligned}$$

3) u wird für $\lim t = 0$ überall Null, ausser in einem Punkte $x = \xi$, für welchen sich u dem Werthe $t^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a_1^2 t}}$ nähert, wenn t nach Null hin abnimmt.

Zunächst möge ξ im Innern von I liegen. Zur Abkürzung setzen wir

$$x_1 - x_2 = b, \quad \xi - x_1 = c.$$

Um das Verfahren, welches oben für 2 Medien gegeben wurde, auf den vorliegenden Fall übertragen zu können, fassen wir dasselbe in etwas verallgemeinerter Form folgendermassen in Worte: Es seien n und n' zwei Medien mit verschiedenen Constanten, welche in dem Punkte $x = x_n$ zusammenstossen. In dem Medium n liege ein Pol mit der Intensität J an der Stelle $x = \xi$. Wir construiren zu ξ die beiden Punkte:

$$(11) \qquad \xi_n = x_n + (x_n - \xi), \quad \xi_n' = x_n - \frac{a_{n'}}{a_n}(x_n - \xi).$$

Den ersten dieser Punkte können wir als Spiegelbild von ξ in Bezug auf x_n, den zweiten als verschobenes Spiegelbild bezeichnen. Wir bilden die Functionen:

$$(12)\qquad \begin{aligned} u_n &= J\big(F_n(\xi) + A_{n n'}\, F_n(\xi_n)\big), \\ u_n' &= J B_{n n'}\, F_{n'}(\xi_n'); \end{aligned}$$

hier ist gesetzt:

$$F_n(\xi) = t^{-\frac{1}{2}}\, e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4 a_n^2 t}}, \qquad F_{n'}(\xi) = t^{-\frac{1}{2}}\, e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4 a_{n'}^2 t}};$$

die Grössen $A_{n n'}$ und $B_{n n'}$ sind durch Gleichung (8) erklärt, wenn man darin α gleich $\frac{k_n a_{n'}}{k_{n'} a_n}$ nimmt. Alsdann genügen u_n bez. $u_{n'}$ allen Anforderungen, welche an die Green'sche Function in Bezug auf das Innere von n bez. das Innere von n' und auf die Trennungsstelle beider zu stellen sind.

Nach dieser Regel verfahren wir jetzt successive und bilden drei verschiedene Functionen u_1, u_2, u_3, von denen jede nur in einem der Theile I, II, III die Green'sche Function darstellen soll, während sie in den beiden andern ganz willkürlich gewählt werden kann. Ausgehend von einem Pole $x = \xi$ mit der Intensität 1 im Medium I construiren wir wegen der Trennungsstelle $x = x_1$, entsprechend der Gleichung (11), die beiden neuen Punkte:

$$\xi_1 = x_1 + (x_1 - \xi) = x_1 - c,$$

$$\xi_1' = x_1 - \frac{a_2}{a_1}(x_1 - \xi) = x_1 + \frac{a_2}{a_1} c.$$

Der erste Punkt geht nach den Gleichungen (12) in den Ausdruck für u_1, der zweite in den für u_2 ein. In der nachfolgenden ersten Tabelle schreiben wir daher ξ_1 in die erste Reihe neben u_1, ξ_1' in die zweite neben u_2. Zu den Polen $x = \xi_1$ und $x = \xi_1'$ gehören die Intensitäten A_{12} und B_{12}, welche an die entsprechenden Stellen der zweiten Tabelle zu schreiben sind. Wegen der Trennungsstelle $x = x_2$ construiren wir zu dem Pole ξ_1' nach Gleichung (11) die beiden weiteren Pole:

$$\xi_2 = x_2 + (x_2 - \xi_1') = x_2 - b - \frac{a_2}{a_1} c,$$

$$\xi_2' = x_2 - \frac{a_3}{a_2}(x_2 - \xi_1') = x_2 + \frac{a_3}{a_2} b + \frac{a_3}{a_1} c.$$

Von diesen Punkten wird ξ_2 zur Bildung von u_2, ξ_2' zur Bildung von u_3 gebraucht, wie aus Gleichung (12) hervorgeht. Daher kommt ξ_2 in die zweite, ξ_2' in die dritte Reihe der ersten Tabelle. Die entsprechenden Intensitäten sind $B_{12} A_{23}$ und $B_{12} B_{23}$, welche an die entsprechenden Stellen der zweiten Tabelle gesetzt werden. Wegen des soeben construirten Poles ξ_2 kommt zu u_2 ein Glied $B_{12} A_{23}\, F(\xi_2)$. Dieses muss über die Trennungsstelle $x = x_1$ hinaus wieder rückwärts nach I hin fortgesetzt werden. Wir construiren daher die Pole

$$\xi_1 = x_1 + (x_1 - \xi_2) = x_1 + 2b + \frac{a_2}{a_1} c,$$

$$\xi_1' = x_1 - \frac{a_1}{a_2}(x_1 - \xi_2) = x_1 - \frac{a_1}{a_2} 2b - c$$

mit den Intensitäten $B_{12} A_{23} A_{21}$, $B_{12} A_{23} B_{21}$, welche in die zweite bez. erste Reihe der beiden Tabellen zu setzen sind. Zum Pole ξ_1 werden wieder zwei weitere Pole construirt u. s. f. Auf diese Weise bekommen wir zu jeder der Functionen u_1, u_2, u_3 eine unendliche Reihe von Polen ξ^n und zugehörigen Intensitäten J^n. Aus der Gesammtheit dieser Grössen berechnet sich dann die Function u_i zu $\Sigma_{(n)} J^n F_i(\xi^n)$.

Tabelle 1.

u_1	ξ, $x_1 - c$,		$x_1 - c - \frac{a_1}{a_2} 2b$,		$x_1 - c - \frac{a_1}{a_2} 4b$
u_2	$x_1 + \frac{a_2}{a_1} c$,	$x_2 - \frac{a_2}{a_1} c - b$,	$x_1 + \frac{a_2}{a_1} c + 2b$,	$x_2 - \frac{a_2}{a_1} c - 3b$,	$x_1 + \frac{a_2}{a_1} c + 4b$
u_3		$x_2 + \frac{a_3}{a_1} c + \frac{a_3}{a_2} b$,		$x_2 + \frac{a_3}{a_1} c + \frac{a_3}{a_2} 3b$	

Tabelle 2.

u_1	1, A_{12},		$B_{12} A_{23} B_{21}$,		$B_{12} A_{23} B_{21} A_{23} A_{21}$
u_2	B_{12},	$B_{12} A_{23}$,	$B_{12} A_{23} A_{21}$,	$B_{12} A_{23}^2 A_{21}$,	$B_{12} A_{23}^2 A_{21}^2$
u_3		$B_{12} B_{23}$,		$B_{12} B_{23} A_{23} A_{21}$	

Das Bildungsgesetz dieser Grössen ist leicht zu erkennen. Zu u_1 gehören als Pole der Ausgangspunkt ξ und eine Reihe von Punkten, deren allgemeines Glied $x_1 - c - \frac{a_1}{a_2} 2nb$ ist. Alle Punkte dieser Reihe liegen in den Gebieten II und III; der Abstand von zwei aufeinander folgenden Punkten beträgt $\frac{a_1}{a_2} 2b$.

Für u_2 ordnen sich die Pole in zwei Reihen; das allgemeine Glied der einen Reihe ist $x_1 + \frac{a_2}{a_1} c + 2nb$, das der anderen $x_2 - \frac{a_2}{a_1} c - (2n+1) b$. Die Punkte der ersten Reihe liegen ganz in dem Gebiete I, die der zweiten ganz in III. Sie folgen einander in dem constanten Abstande $2b$.

Die Pole von u_3 bilden eine Reihe, deren allgemeines Glied

$$x_2 + \frac{a_3}{a_1} c + \frac{a_3}{a_2} (2n+1) b$$

heisst. Die Punkte dieser Reihe liegen sämmtlich ausserhalb des Gebietes III in I und II. Der Abstand von zwei benachbarten Punkten beträgt $\frac{a_3}{a_2} 2b$.

Die Intensitäten von zwei aufeinander folgenden Polen in jeder der vier Reihen unterscheiden sich durch den Factor $A_{21} A_{23}$, welcher kleiner als Eins ist, wie aus Gleichung (8) hervorgeht. Von dieser Regel machen nur die ersten Terme in der ersten Reihe von Tabelle 2 eine Ausnahme, eine Unsymmetrie, die daher rührt, dass wir in specieller Weise den Ausgangspunkt ξ im Gebiete I annahmen.

Alle diese Reihen lassen sich als gewöhnliche ϑ-Functionen schreiben, wobei die Argumente der ϑ-Functionen in nicht ganz einfacher Weise von den in unsern Formeln vorkommenden Grössen abhängen.

Die Convergenzfrage erledigt sich mit einem Worte. Die Reihen convergiren in demselben Maasse wie die ϑ-Reihen. Die in den Gleichungen (9) und (10) vorkommenden Differentiationen können daher gliedweise ausgeführt werden.

Die gesuchte Green'sche Function w erhalten wir nun, indem wir für die Gebiete I bez. II bez. III u gleich u_1 bez. u_2 bez. u_3 setzen. Dass die so entstehende Function wirklich den Bedingungen 1), 2) und 3) auf pag. 270 genügt, folgt bei der unbedingten Convergenz der Reihen daraus, dass die einzelnen Glieder der Reihen, der Art ihrer Entstehung nach, diese Bedingungen erfüllen.

In analoger Weise haben wir die Green'sche Function zu bilden, wenn der Pol ξ in den Gebieten II oder III liegt. Ist dieses geschehen, so können wir nach den Erörterungen des § 1 sämmtliche Probleme der Wärmebewegung in einem derartigen Stabe als gelöst betrachten.

Auch diese Resultate mögen wir mit bekannten optischen Vorgängen vergleichen, Betrachten wir drei Medien I, II, III mit verschiedenen optischen Constanten, welche in den parallelen Ebenen $x = x_1$ und $x = x_2$ an einander grenzen und welche den ganzen Raum ausfüllen. Das Medium I enthalte den leuchtenden Punkt. Ein in I befindliches Auge sieht dann ausser dem leuchtenden Punkte selbst eine unendliche Reihe von Spiegelbildern desselben, welche in II und III zu liegen scheinen. Von Punkten des Mediums II aus sieht man zwei Reihen von Spiegelpunkten; die eine liegt scheinbar im Medium I, die andere im Medium III. Endlich vom Medium III aus sieht man wiederum *eine* unendliche Reihe von Punkten, welche über II und III vertheilt ist. Die Helligkeit der successiven Spiegelpunkte nimmt in jeder Reihe beständig ab. Dieselbe Vertheilung der Pole und Abnahme der

Intensitäten haben wir soeben bei der Wärmeleitung constatirt. In der Optik beschreibt man diese Erscheinungen auch so, dass man den vom leuchtenden Punkte ausgehenden Strahl jedesmal, wenn er an eine der Trennungsflächen $x = x_1$ und $x = x_2$ gelangt, in einen reflectirten und einen gebrochenen Strahl zerlegt. Dadurch entstehen aus dem einen Strahl, welcher direct vom leuchtenden Punkte ausgeht, unendlich viele Strahlen, deren jeder eine gewisse Anzahl von Malen an den Trennungsflächen reflectirt und gebrochen ist. Ebenso können wir in der Wärmeleitung jeden Term unserer unendlichen ϑ-Reihen auffassen als die eine gewisse Anzahl von Malen reflectirte und gebrochene Wirkung unseres ursprünglichen Temperaturpoles.

§ 3.

Die Hauptlösung auf einer Riemann'schen Fläche.

Die Green'sche Function für zwei- oder dreidimensionale Gebiete lässt sich mit Hülfe des Symmetrieprincipes aus der Hauptlösung direct in denjenigen Fällen ableiten, in welchen die symmetrische Wiederholung des Gebietes den Raum einfach erfüllt. Unter symmetrischer Wiederholung im Raum verstehen wir hier die Spiegelung an einer Ebene, nicht auch, wie in der Potentialtheorie die Spiegelung an einer Kugeloberfläche (im Thomson'schen Sinne), da die Lösungen der Differentialgleichung der Wärmeleitung durch die Transformation der reciproken Radien nicht wieder in Lösungen derselben Gleichung übergeführt werden. Die Gebiete, für welche die Green'sche Function auf diese Weise hergestellt werden kann, sind daher Polyeder, deren sämmtliche Kantenwinkel Submultipla von π sind. Das Verfahren ist folgendes: Man construire zu einem beliebigen Punkte P im Innern des Gebietes sämmtliche Spiegelbilder P_i in Bezug auf die Begrenzungsebenen des Ausgangspolyeders und seiner symmetrischen Wiederholungen und lege in jeden dieser Punkte einen Pol, welcher mit dem Pole in P gleiche oder entgegengesetzte Intensität hat, je nachdem er durch eine gerade oder ungerade Anzahl von Spiegelungen aus P hervorgegangen ist. Die Green'sche Function ist dann einfach:

$$u = t^{-\frac{3}{2}} \sum \pm e^{-\frac{R_i^2}{4a^2 t}},$$

wo R_i den Abstand des variablen Punktes von dem i^{ten} Pole bedeutet.

Die Wärmeleitung in solchen Gebieten ist bereits von Lamé*) in mehr rechnerischer Weise behandelt worden. Ausser seinem „Tetraeder $\frac{1}{6}$“

*) Lamé: Leçons sur la théorie de la chaleur. Vgl. auch B. Minnigerode: a. a. O. p. 19 und F. Pockels: Ueber die Gleichung $\Delta u + k^2 u = 0$. p. 144 u. f.

und „Tetraeder $\frac{1}{24}$"*) giebt es, wie aus den Untersuchungen von Herrn A. Schönfliess**) über die erweiterten Bewegungsgruppen hervorgeht, noch ein drittes Tetraeder von der bezeichneten Art. Dasselbe wird von 2 Paaren von Diagonalebenen des Würfels begrenzt, von denen das eine Paar sich in einer Würfelkante, das andere in einer durch den Mittelpunkt des Würfels gehenden zur Schnittlinie des ersten Paares senkrechten Geraden schneidet.

Die Zahl der so zu lösenden Aufgaben ist nicht gross; will man dieselbe vermehren, so wird man zur Untersuchung der Wärmebewegung auf Flächen mit Windungspunkten hingeführt. Betrachten wir das einfache ebene Gebiet, welches von zwei sich schneidenden Geraden begrenzt wird. Ist der Winkel der Geraden gleich $\frac{\pi}{n}$, so lässt sich die Green'sche Function für dieses Gebiet nach dem Symmetrieprincip sofort angeben. Ist der Winkel aber gleich $\frac{m\pi}{n}$, so führt die symmetrische Wiederholung des Ausgangsgebietes zu einer m-fachen Ueberdeckung der Ebene. Die zugehörige Green'sche Function wird daher eindeutig nur auf einer Fläche mit einem m-fachen Windungspunkt. Dabei betrachten wir die Windungsfläche nicht nur qualitativ im Sinne der analysis situs als Träger der Function, sondern auch quantitativ, indem wir die Punkte derselben durch die Polarcoordinaten r und $\varphi (0 \leqq r < \infty,\ 0 \leqq \varphi < 2m\pi)$ fixiren. Der Windungspunkt liegt in $r = 0$. Wir suchen die Hauptlösung auf dieser Fläche, d. i. eine Function, welche der in die Coordinaten r und φ transformirten Differentialgleichung der Wärmeleitung:

$$(13) \qquad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}$$

genügt, auf der Fläche eindeutig ist und für $\lim t = 0$ auf der ganzen Fläche verschwindet ausser in *einem* Punkte (der die Coordinaten r', φ' haben möge), wo sie wie die Hauptlösung in der schlichten Ebene d. i. wie

$$(14) \qquad u_0 = t^{-1} e^{-\frac{R^2}{4t}}, \quad R^2 = r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(\varphi - \varphi')$$

unendlich wird.

Wir bemerken, dass die Hauptlösung für die schlichte Ebene in der Form geschrieben werden kann***):

*) A. a. O. Capitel 8.

**) A. Schönfliess: Math. Ann. Bd. 34.

***) Es folgt dieses aus einer von Herrn C. Neumann benutzten Transformation des Fourier'schen Integrals für 2 Variable und dem Additionstheorem für die Bessel'sche Function. Vgl. meine Diss. pag. 28 oder Heine: Handb. d. Kugelf. Bd. I, § 120.

$$u_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda^2 t} \lambda \, d\lambda \sum_{-\infty}^{+\infty} J_n(\lambda r) J_n(\lambda r') \cos n(\varphi - \varphi')$$

(J_n ist die Bessel'sche Function mit dem Index n) und behaupten, dass die Hauptlösung für die Fläche mit einem m-fachen Windungspunkt gegeben ist durch:

$$u = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda^2 t} \lambda \, d\lambda \sum_{-\infty}^{+\infty} J_{\frac{n}{m}}(\lambda r) J_{\frac{n}{m}}(\lambda r') \cos \frac{n}{m} (\varphi - \varphi').$$

Für den Fall $m = 2$ lässt sich dieses beweisen, indem man durch eine etwas umständliche Umrechnung die vorstehende Function in die folgende Form bringt:

$$(15) \qquad u = u_0 \pi^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{s} e^{-\tau^2} d\tau, \quad s = \sqrt{\frac{rr'}{t}} \cos \frac{\varphi - \varphi'}{2}.$$

Hier ist u_0 durch Gleichung (14) als Hauptlösung in der schlichten Ebene erklärt; die Quadratwurzel ist stets mit positivem Vorzeichen zu nehmen. Dass diese Function u der Differentialgleichung (13) genügt, lässt sich nachträglich verificiren; dass sie erst nach *zweimaliger* Umlaufung des Windungspunktes zu ihrem Anfangswerth zurückkehrt, folgt aus dem Factor $\cos \frac{\varphi - \varphi'}{2}$ in s. Betrachten wir nun ihr Verhalten für $\lim t = 0$. Das Verhalten des Factors u_0 ist uns wohlbekannt. Derselbe wird auf unserer zweiblättrigen Fläche überall Null für $\lim t = 0$ ausser in den *zwei* Punkten $r = r'$, $\varphi = \varphi'$ und $r = r'$, $\varphi = \varphi' + 2\pi$. Der zweite Factor wird für $\lim t = 0$ gleich Eins, wenn $|\varphi - \varphi'| < \pi$ ist, dagegen convergirt er mit abnehmendem t nach Null und zwar in stärkerem Grade als t selbst, wenn

$$\pi < |\varphi - \varphi'| < 3\pi$$

ist. (Eine Ausnahme macht nur der Windungspunkt $r = 0$, für welchen dieser Factor bei beliebigem t constant gleich $\frac{1}{2}$ ist). Von den beiden Unendlichkeitsstellen des ersten Factors wird also diejenige, für welche $r = r'$ und $\varphi = \varphi' + 2\pi$ ist, durch das Nullwerden des zweiten Factors aufgehoben. Wir haben also in Gleichung (15) in der That eine Function vor uns, welche nur in *einem* Punkte unserer zweiblättrigen Fläche für $\lim t = 0$ unendlich wird und zwar in der vorgeschriebenen Weise (wie u_0). *Daher stellt u die Hauptlösung für unsere Fläche dar.*

Mit dieser Function können wir ähnlich operiren, wie mit der Hauptlösung für die schlichte Ebene. So erhalten wir die Green'sche Function für dasjenige Gebiet, welches von zwei unter dem Winkel

$\frac{2\pi}{n}$ sich schneidenden Geraden begrenzt wird, wiederum mit Hülfe des Symmetrieprincipes.

Wir spiegeln das gegebene Gebiet an seinen Begrenzungsgeraden und die neu entstehenden Gebiete an den ihrigen. Durch $2n$ solcher Gebiete wird die zweiblättrige Windungsfläche gerade einfach überdeckt. Sei P_0 der Pol des Ausgangsgebietes und $P_1, P_2, \ldots, P_{2n-1}$ der Reihe nach die in den anderen Gebieten ihm entsprechenden Punkte. In jeden Punkt P_m legen wir einen Pol und bilden nach Gleichung (15) die zugehörigen Functionen u_m, welche in P_m für $\lim t = 0$ unendlich werden. Die Green'sche Function wird dann gleich

$$\sum_0^{2n-1} (-1)^m u_m.$$

Hierbei haben wir den Pol des Ausgangsgebietes nur an Geraden gespiegelt, welche durch den Windungspunkt hindurchlaufen, um zu bewirken, dass die Green'sche Function auf ihnen verschwinde. Um sie auf *anderen* Geraden zum Verschwinden zu bringen, müssen wir ausser dem Pole auch den Windungspunkt selbst spiegeln. In der That, seien W_1 und P_1 die zu dem Windungspunkte W_0 in $r = 0$ und dem Pole P_0 in Bezug auf eine beliebige Gerade G symmetrisch gelegenen Punkte und bilden wir u_1 mit dem Windungspunkte W_1 und dem Pole P_1 ebenso wie in Gleichung (15) u mit den Punkten W_0 und P_0, so wird $u - u_1$ längs der Geraden G gleich Null, wie aus Gleichung (15) sofort abzulesen ist.

Nach dieser Bemerkung ist es klar, dass wir die Green'sche Function nunmehr für ein Polygon bilden können, welches *einen Winkel gleich* $\frac{2\pi}{n}$ *und die übrigen gleich* $\frac{\pi}{n}$ *hat* und welches bei symmetrischer Wiederholung zu einer zweifachen Ueberdeckung der Ebene führt. Solcher Gebiete giebt es ein Dreieck und ein Viereck, welche beide aus dem gleichseitigen Dreieck entstehen, wenn man den Mittelpunkt desselben das eine Mal mit den Ecken, das andere Mal mit den Seitenmitten verbindet.

Die Irreducibilität der homogenen linearen Differentialgleichungen.

Von

Emanuel Beke in Budapest.

Den überaus wichtigen Begriff der Irreducibilität der Differentialgleichungen führte zuerst Herr Frobenius*) ein, und zwar speciell bei linearen Differentialgleichungen, welche functionentheoretisch am leichtesten zu behandeln waren. Seither wurde dieser Begriff besonders durch die Untersuchungen des Herrn Königsberger**) erweitert und mehrfach angewandt. Der Irreducibilitätsbegriff fand bislang mehrfach Verwendung bei der Bestimmung der regulären Integrale beliebiger linearer Differentialgleichungen, aber es scheint, dass die Wichtigkeit und eigentliche Fruchtbarkeit desselben durch die Untersuchungen der Herren Picard***) und Vessiot†), welche der Galois'schen Theorie der algebraischen Gleichungen analog sind, im höchsten Grade gesteigert wurde. —

Es ist von Wichtigkeit, dass der Begriff der Irreducibilität, der practischen Anwendungen halber, nicht nur ein *logischer* Begriff bleibe, sondern, wie es in der Theorie der algebraischen Gleichungen geschah, aus dem rein logischen, denkbaren Ideenkreise, in das Gebiet des mathematisch Ausführbaren hereingezogen werde.

In der Theorie der algebraischen Gleichungen ist es möglich, bei einem gegebenen Rationalitätsbereich — am einfachsten bei dem natürlichen Rationalitätsbereich — durch eine endliche Anzahl von Versuchen, die gegebene Gleichung in ihre irreduciblen Factoren zu zerlegen. Wir stellen uns hier die analoge Aufgabe. *Wir wollen durch eine endliche angebbare Anzahl von Schritten entscheiden, ob eine gegebene homogene lineare Differentialgleichung reducibel ist oder nicht, und wir wollen im*

---

*) Frobenius: Journ. f. r. u. a. Math. 76 und 80.

**) Königsberger: J. f. r. u. a. M. 96. 1884.

***) Picard: Ann. de Toulouse 1887.

†) Vessiot: Ann. de l'Ecole Norm. 1892.

ersteren Falle eine irreducible Gleichung aufstellen, welche ihre sämmtlichen Lösungen mit der gegebenen reduciblen Gleichung gemein hat.

Wir fassen aber den Begriff der Irreducibilität anders als in den genannten Untersuchungen geschehen und zwar eben aus dem Grunde, damit wir einen Anschluss an die erwähnten Untersuchungen der Herren Picard und Vessiot erhalten.

Bei Herrn Frobenius ist eine homogene lineare Differentialgleichung mit eindeutigen Coefficienten irreducibel, wenn sie mit keiner anderen linearen homogenen Differentialgleichung von niedrigerer Ordnung — mit ebensolchen Coefficienten — eine Lösung gemein hat.

In einer späteren Abhandlung hat sich Herr Frobenius*), zu einem speciellen Zweck sogar nur auf die Umgebung eines Punktes beschränkt. — Bei Herrn Königsberger ist eine lineare Differentialgleichung mit eindeutigen Coefficienten dann irreducibel, wenn sie mit keiner anderen Differentialgleichung (also nicht nur mit einer linearen) von niedrigerer Ordnung, mit ebensolchen Coefficienten, ein Integral gemeinsam hat.

Wir werden die Definition dahin einschränken, dass wir nur lineare Differentialgleichungen betrachten, welche *rationale* Coefficienten haben, *und eine solche Gleichung irreducibel nennen, wenn sie mit keiner anderen, ebenfalls linearen Differentialgleichung mit rationalen Coefficienten, von niedrigerer Ordnung gemeinsame Lösung hat.* —

Die Irreducibilität ist, wie Herr C. Jordan**) gezeigt hat, auch mit der Beschaffenheit der Monodromiegruppe der linearen Differentialgleichung eng verbunden. Wenn nämlich die Monodromiegruppe *nicht primitiv* ist, d. h. bei jedem Umlauf der unabhängigen Variablen eine gewisse lineare Mannigfaltigkeit der Lösungen der linearen Differentialgleichung (welche aber nicht die ganze n-dimensionale Mannigfaltigkeit der Lösungen umfasst) in sich transformirt wird, dann ist die Gleichung reducibel und umgekehrt, wenn die Gleichung reducibel ist, dann ist die Monodromiegruppe nicht primitiv.

Bei diesem wichtigen Satze Jordan's ist aber die Frobenius'sche Begriffsbestimmung der Irreducibilität zu Grunde gelegt. Wenn nämlich die Monodromiegruppe im Sinne Jordan's imprimitiv ist, dann lässt sich eine homogene lineare Differentialgleichung mit *eindeutigen* Coefficienten bilden, welche von niedrigerer Ordnung ist, als die gegebene, und ihre sämmtlichen Lösungen mit der gegebenen gemeinsam hat. Wenn wir aber statt der Eindeutigkeit der Coefficienten, ihre *Rationalität* wünschen — was übrigens in vielen Fällen dasselbe bedeutet — so müssen wir statt der Monodromiegruppe *diejenige*

*) Frobenius, Journ. f. r. u. ang. Math. 80. 1875.

**) Jordan, Bulletin de la Soc. Math. de France, 1883.

algebraische Transformationsgruppe betrachten, welche die Herren Picard und Vessiot eingeführt haben und die wir nach dem Vorschlage von Herrn F. Klein die *Rationalitätsgruppe* der Gleichung nennen. Wenn diese Gruppe im Lie'schen Sinne transitiv ist, dann ist die Gleichung überhaupt irreducibel, (auch im Königsberger'schen Sinne) wenn sie andererseits in solchem Maasse intransitiv ist, wie es die Monodromiegruppe nach dem erwähnten Jordan'schen Satze sein sollte — dass nämlich eine weniger als n-dimensionale lineare Mannigfaltigkeit invariant bleibt —, dann hat die Gleichung mit einer anderen Gleichung mit *rationalen* Coefficienten, (von niedrigerer Ordnung) gemeinsame Lösungen, ist also in unserem Sinne reducibel. —

Die Lösung des Problems wollen wir so in Angriff nehmen, wie es auch in der Theorie der algebraischen Gleichungen geschieht*). Wenn nämlich eine algebraische ganzzahlige Gleichung gegeben ist:

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n = 0,$$

deren Wurzeln wir mit

$$x_1\, x_2 \ldots x_n$$

bezeichnen, und die Frage gestellt wird, ob die linke Seite dieser Gleichung einen ganzzahligen Factor vom m^{ten} Grade hat, oder nicht, dann müssen wir die Resolventen für alle möglichen Coefficienten dieses Factors aufstellen und die rationalen Lösungen dieser Resolventen aufsuchen. So müssen wir die Resolventengleichungen für die Functionen

$$z = x_1 + x_2 + \cdots + x_n = \sum_1^m x_i,$$

$$u = \sum_1^m x_i x_k,$$

$$v = \sum_1^m x_i x_k x_l \ldots$$

in der bekannten Weise aufstellen und dann zuschauen, ob diese Gleichungen rationale Lösungen haben oder nicht, was durch eine endliche Anzahl von Versuchen bestimmt werden kann. In solcher Weise erhalten wir eine endliche Anzahl von Factoren, wo dann wieder durch eine endliche Anzahl von Versuchen bestimmbar ist, welcher von den gefundenen Factoren brauchbar ist. —

In ebensolcher Weise werden wir eine lineare Differentialgleichung niederer Ordnung, welche mit der gegebenen linearen Differentialgleichung ihre sämmtlichen Lösungen gemein hat, gegebenenfalls wirklich construiren.

---

*) J. König, Math. Ann. 15, p. 167.

1. Sei die gegebene homogene lineare Differentialgleichung mit rationalen Coefficienten die Folgende:

$$(1) \qquad f(y) \equiv y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + \cdots + p_n y = 0,$$

wo wir gewohntermassen

$$y^{(i)} = \frac{d^i y}{d x^i}$$

setzen. Wenn eine andere homogene lineare Differentialgleichung von der m^{ten} Ordnung, mit ebenfalls rationalen Coefficienten

$$(2) \qquad \varphi = y^{(m)} + q_1 y^{(m-1)} + q_2 y^{(m-2)} + \cdots + q_m y = 0$$

existirt, welche ihre sämmtlichen Lösungen mit der gegebenen Gleichung gemeinsam hat, und

$$(3) \qquad Y_1\, Y_2 \ldots Y_m$$

ein Fundamentalsystem dieser Lösungen darstellt, dann sind die Coefficienten der Gleichung (2) durch dieses Fundamentalsystem darstellbar. Wenn wir diese Determinante:

$$(4) \qquad \begin{vmatrix} Y_1 & Y_1' & Y_2'' & \ldots & Y_1^{(m-1)} \\ Y_2 & Y_2' & Y_2'' & \ldots & Y_2^{(m-1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ Y_m & Y_m' & Y_m'' & \ldots & Y_m^{(m-1)} \end{vmatrix}$$

mit Δ bezeichnen, dann ist:

$$(5) \qquad \Delta q_i = - \begin{vmatrix} Y_1 & Y_1' & \ldots & Y_1^{(i-1)} & Y_1^{(m)} & Y_1^{(i+1)} & \ldots & Y_1^{(m-1)} \\ Y_2 & Y_2' & \ldots & Y_2^{(i-1)} & Y_2^{(m)} & Y_2^{(i+1)} & \ldots & Y_2^{(m-1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ Y_m & Y_m' & \ldots & Y_m^{(i-1)} & Y_m^{(m)} & Y_m^{(i+1)} & \ldots & Y_m^{(m-1)} \end{vmatrix} = \Delta_i$$

und speciell:

$$q_1 = - \frac{d \log \Delta}{d x}.$$

2. Wir wollen zuerst q_1 bestimmen. Zu diesem Zwecke bemerken wir, dass überhaupt jede Determinante Δ_i einer homogenen linearen Differentialgleichung genügt, deren Coefficienten rational durch die Coefficienten (und Differentialquotienten) der gegebenen Gleichung (1) darstellbar sind. Diese Bemerkung fliesst aus dem allgemeineren Satze, dass eine *jede rationale ganze Function der Lösungen einer oder mehrerer homogenen linearen Differentialgleichungen, einer homogenen linearen Differentialgleichung genügt, deren Coefficienten rational durch die Coefficienten der gegebenen Gleichungen* (und durch die Differential-

quotienten der Coefficienten) *darstellbar sind.* Wir wollen diesen, für das Folgende wichtigen bekannten Satz nur angeführt haben mit der einzigen Bemerkung, dass zum Beweise genügen würde den einfachen speciellen Fall zu beweisen, dass das Product zweier Lösungen zweier homogenen linearen Differentialgleichungen einer solchen Gleichung genüge. —

In dem vorliegenden Falle ist es besonders einfach die Gleichung für Δ_i (welche wir nach Herrn F. Klein als *Differentialresolvente* der Δ_i bzeichnen wollen) direct aufzustellen.

Wenn wir nämlich die Determinante Δ_i nach der unabhängigen Variablen differentiiren, dann bekommen wir ein lineares Aggregat von Determinanten, und wenn wir die Differentiation fortsetzen und dafür sorgen, dass in den erhaltenen Ausdrücken die höheren Differentialquotienten durch die n ersten (die Grössen Y als 0^{te} Differentialquotienten aufgefasst) mittels der gegebenen Gleichung (1) heruntergedrückt werden, dann wird ein jeder Differentialquotient von Δ_i als ein lineares Aggregat der Determinante

$$(6)\qquad \Delta_{k_1 k_2 \dots k_m} = \begin{vmatrix} Y_1^{(k_1)}, & Y_1^{(k_2)}, & \dots, & Y_m^{(k_m)} \\ Y_2^{(k_1)}, & Y_2^{(k_2)}, & \dots, & Y_m^{(k_m)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ Y_m^{(k_1)}, & Y_m^{(k_2)}, & \dots, & Y_m^{(k_m)} \end{vmatrix}$$

ausgedrückt, wo die Ordnungszahlen $k_1 k_2 \dots k_m$ beliebige m Zahlen aus der Reihenfolge: $0, 1, 2, \dots, n-1$ bedeuten. Wenn wir diese Determinanten der Kürze halber mit

$$D_1 D_2 \dots D_{\binom{n}{m}}$$

bezeichnen, dann erhalten wir also ein Gleichungssystem:

$$(7)\qquad \frac{d^\varrho \Delta_i}{dx^\varrho} = a_{\varrho i 1} D_1 + a_{\varrho i 2} D_2 + \dots + a_{\varrho i \sigma} D_\sigma,$$

$$\sigma = \binom{n}{m}, \quad \varrho = 1, 2, \dots, \sigma$$

wo unter den Grössen D eine mit Δ_i identisch ist, und wo die Coefficienten $a_{\varrho i k}$ rationale Functionen von x bedeuten. —

Aus diesem System erhalten wir also eine homogene lineare Differentialgleichung von höchstens $\binom{n}{m}^{\text{ter}}$ Ordnung für Δ_i. —

Zuerst stellen wir auf diese Weise die Differentialgleichung für Δ auf. Sei diese Gleichung:

$$(8)\qquad \frac{d^\sigma \Delta}{dx^\sigma} + P_1 \frac{d^{\sigma-1} \Delta}{dx^{\sigma-1}} + \dots + P_\sigma \Delta = 0.$$

Damit die Gleichung (2) vorhanden sei, muss $q_1 = \frac{\Delta'}{\Delta}$ rational sein; d. h. die Gleichung (8) *muss eine solche Lösung haben, deren logarithmische Ableitung rational sei.*

3. Wir müssen also jetzt aus der Gleichung (8) eine Gleichung für q_1 herleiten. Wir bemerken, dass es im Allgemeinen möglich ist für eine rationale Function der Lösungen einer oder mehrerer linearen Differentialgleichungen eine — nicht lineare — Differentialgleichung aufzustellen, deren Coefficienten rational durch die Coefficienten der gegebenen Gleichungen ausdrückbar sind. Ohne auf den Beweis dieses wichtigen Satzes einzugehen, bemerke ich nur, dass er nach einer früheren Bemerkung immer darauf zurückgeführt werden kann, dass man für den Quotienten zweier Lösungen *einer* homogenen linearen Differentialgleichung, eine Resolvente aufstellen soll.

In unserem Falle ist die Resolventengleichung für q_1, welche gewissermassen eine Verallgemeinerung der Riccati'schen Gleichung ist, leicht aufzustellen. Wenn wir nämlich für einen Augenblick Δ mit z und q_1 mit u bezeichnen, dann ist

$$zu = z'$$

und wenn wir aus dieser Gleichung durch Differentiation $\sigma - 1$-mal hintereinander die daraus folgenden bilden und in der letzten Gleichung $z^{(\sigma)}$ mittels der Gleichung (6) eliminiren, dann erhalten wir ein System linearer Gleichungen, woraus durch Elimination von

$$z\, z',\, z'' \ldots z^{(\sigma-1)}$$

folgt:

$$(9)\quad 0 = \begin{vmatrix} u & -1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ u' & u & -1 & \cdot & \cdot \\ u'' & 2u' & u & -1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u^{(\sigma-1)}+P_\sigma, & (\sigma-1)u^{(\sigma-2)}+P_{\sigma-1}, & \binom{\sigma-1}{2}u^{(\sigma-3)}+P_{\sigma-2}, & \ldots, & u+P_1 \end{vmatrix}.$$

Im Falle $\sigma = 2$ erhalten wir die gewöhnliche Riccati'sche Gleichung

$$u^2 + u' + P_1 u + P_2 = 0,$$

im Falle $\sigma = 3$, und $\sigma = 4$ die Gleichungen:

$$u^3 + 3u'u + u'' + P_1(u^2+u') + P_2 u + P_3 = 0,$$

$$u^4 + 6u^2u' + 3u'^2 + 4uu'' + u''' + P_1(u^3+3uu'+u'') + P_2(u^2+u') + P_3 u + P_4 = 0.$$

Die Gleichung (9) können wir auch in anderer Form erhalten, wenn wir nämlich in Gleichung (8) direct

(10) $$\Delta = e^{\int u\,dx}$$

substituiren und durch $e^{\int u\,dx}$ dividiren. —

4. Das gestellte Problem ist also darauf zurückgeführt, dass die rationalen Lösungen solcher allgemeinen Riccati'schen Gleichungen bestimmt werden sollen. Später werden wir einen speciellen Fall, den Fall der hypergeometrischen Differentialgleichung, behandeln; jetzt wollen wir uns in Bezug dieser Gleichungen auf allgemeine Bemerkungen beschränken.

1) Aus der Form der Gleichung (9) ersehen wir, dass solche Pole von u, welche eine höhere Ordnungszahl als 1 haben, gleichzeitig Pole einer oder mehrerer der Coefficienten $P_1\ P_2 \ldots P_\sigma$ sein müssen; denn wenn a ein Pol von der k^{ten} Ordnung wäre und

$$P_1(a),\ P_2(a), \ldots, P_\sigma(a)$$

alle endlich wären, dann wäre die niedrigste Potenz von $x - a$, welche in der Gleichung (9) auftritt, die $-k\sigma^{\text{te}}$, welche in einem einzigen Gliede und zwar in dem ersten Gliede: u^σ vorkäme, folglich 0 zum Coefficienten haben müsste.

Wenn also c singulärer Punkt von u, aber kein singulärer Punkt der Coefficienten $P_1\,P_2 \ldots P_\sigma$ ist, dann kann $x - c$ nur in der -1^{ten} Potenz in u auftreten; und da er kein singulärer Punkt der Coefficienten der Gleichung (8) ist, so muss er ein gewöhnlicher Punkt der Lösungen Δ sein, und aus diesem Grunde muss $(x - c)^{-1}$ eine positive ganze Zahl aus der Reihe $0, 1, 2, \ldots, \sigma - 1$ zum Coefficienten haben. —

2) Es lässt sich sehr leicht aus der Form der Coefficienten $P_1\,P_2 \ldots P_\sigma$ eine obere Grenze für die Ordnung k eines Poles a der rationalen Function u angeben. Die höchsten negativen Potenzen von $x - a$ können nämlich nur in den folgenden Gliedern vorkommen

(11) $$u^\sigma + P_1 u^{\sigma-1} + P_2 u^{\sigma-2} + \cdots + P_\sigma.$$

Nehmen wir an, dass der höchste Exponent von $(x-a)^{-1}$, welcher in P_i vorkommt, p_i sei, dann ist der höchste Exponent von $(x-a)^{-1}$, in den einzelnen Gliedern von (11):

(12) $$\sigma k,\ (\sigma-1)k + p_1,\ (\sigma-2)k + p_2, \ldots, p_\sigma,$$

folglich darf k nicht grösser sein als die grösste der Zahlen

$$p_1,\ \left[\frac{p_2}{2}\right],\ \left[\frac{p_3}{3}\right], \ldots, \left[\frac{p_\sigma}{\sigma}\right],$$

wo wir mit den eckigen Klammern die grösste, in dem Bruch enthaltene ganze Zahl bezeichnen; denn wäre k grösser als die grösste dieser Zahlen, dann würde σk grösser sein als jeder andere, in der Reihe (12) vorhandene Exponent, also $(x-a)^{-\sigma k}$ würde *blos* in dem

ersten Glied der Summe (11) vorkommen, also nothwendigerweise 0 zum Coefficienten haben. —

5. Die rationale Lösung u kann also nur solche höhere Pole haben, die zugleich Pole der Coefficienten sind; ausser diesen kann sie nur einfache Pole besitzen mit positiven ganzzahligen Coefficienten. Diese 2 Bemerkungen in Verbindung mit der oberen Grenze der Ordnungszahlen der einzelnen Pole genügen, um die Form der rationalen Lösungen zu bestimmen. Wenn nämlich die Pole der Coefficienten

$$a_1\, a_2 \ldots a_\varrho$$

sind und zu ihnen nach der zweiten Bemerkung von 4) die oberen Grenzen der Ordnungszahlen:

$$k_1\, k_2 \ldots k_\varrho$$

gehören, dann ist die Form von u:

$$\sum_1^\varrho {}_i \frac{A_{i1}}{x-a_i} + \frac{A_{i2}}{(x-a_i)^2} + \cdots + \frac{A_{ik_i}}{(x-a)^{k_i}} + \varphi(x), \tag{13}$$

wo $\varphi(x)$ eine rationale Function von der Gestalt ist:

$$\sum \frac{\alpha_i}{x-b_i},$$

unter dem α_i positive ganze Zahlen aus der Reihe $0, 1, \ldots, \sigma - 1$ verstanden. Wenn wir diesen Ausdruck in die Gleichung (9) einsetzen, dann erhalten wir ein algebraisches Gleichungssystem zur Bestimmung der Coefficienten A_{ik} und dadurch den ersten Theil von u, welchen wir mit $R(x)$ bezeichnen wollen.

Aus der Gleichung (10) erhalten wir dann den Ausdruck von Δ in der Form:

$$\Delta = e^{\int R(x)\,dx} \cdot v,$$

wo v in Folge der Beschaffenheit von $\varphi(x)$ im Falle, dass eine rationale Lösung q_1 wirklich existirt, *eine rationale ganze Function sein muss.* Wenn wir also diesen Ausdruck von Δ in die Gleichung (8) einsetzen, dann erhalten wir eine homogene lineare Differentialgleichung für v:

$$\frac{d^\sigma v}{dx^\sigma} + Q_1 \frac{d^{\sigma-1} v}{dx^{\sigma-1}} + Q_2 \frac{d^{\sigma-2} v}{dx^{\sigma-2}} + \cdots + Q_\sigma v = 0.$$

Diese Gleichung muss eine rationale ganze Lösung haben. Ob sie eine solche Lösung hat, oder nicht, das lässt sich leicht entscheiden durch Einsetzen einer ganzen Function mit unbestimmten Coefficienten, die man nach einander recursiv bestimmt. Der Grad dieser ganzen rationalen Function lässt sich vorneherein durch Aufstellung der determinirenden Gleichung für die Stelle ∞ festlegen. — Wenn diese Differentialgleichung keine ganze rationale Lösung hat, dann ist die gegebene

Gleichung (1) gewiss irreducibel. Hat sie aber eine oder mehrere solche Lösungen, dann müssen wir zur Bestimmung der übrigen Coefficienten der Gleichung (2) schreiten. Wir sahen, dass aus dem System (7) eine homogene lineare Differentialgleichung für Δ_i aufstellbar ist. Sei diese Gleichung

$$\frac{d^\sigma z}{dx^\sigma} + Q_1 \frac{d^{\sigma-1} z}{dx^{\sigma-1}} + \cdots + Q_\sigma z = 0.$$

Aus (5) ersehen wir, dass

$$\Delta_i = q_i \Delta.$$

Wenn wir jetzt in diese Gleichung

$$z = y\Delta$$

substituiren, wo Δ den früher bestimmten Ausdruck bedeutet, dann erhalten wir eine homogene lineare Differentialgleichung für y. Hat diese Differentialgleichung in y keine rationale Lösung, so ist die gegebene Gleichung (1) irreducibel; wenn sie aber rationale Lösung hat, und die übrigen, für die anderen Coefficienten analog gebildeten Gleichungen ebenfalls, dann kann die Gleichung reducibel sein.

Wenn nämlich die so bestimmten rationalen Functionen

$$q_1\, q_2 \cdots q_m$$

sind, dann müssen wir nur nachsehen, ob die Gleichung (1) mit der Gleichung

$$\varphi = y^{(m)} + q_1 q^{(m-1)} + \cdots + q_m y = 0$$

gemeinsame Lösungen hat oder nicht. Diese Frage ist aber bekanntlich nach der Methode zu behandeln, welche dem Aufsuchen des grössten gemeinsamen Theilers analog ist, oder nach einer Methode, welche der Resultantenbildung nachgebildet ist. —

7. Um an einem Beispiel die Lösung der aufgestellten Riccati'schen Gleichung durchzuführen und zugleich die Bedingungen der Reducibilität in einem ausgezeichneten Falle zu behandeln, werden wir die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen der Reducibilität der hypergeometrischen Differentialgleichung aufstellen.

Es sei die hypergeometrische Differentialgleichung in bekannter Form:

$$(14) \qquad x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2} + [\gamma - (\alpha+\beta+1)x]\frac{dy}{dx} - \alpha\beta y = 0.$$

Die Riccati'sche Gleichung ist in diesem Falle die Differentialgleichung, welcher $\frac{y'}{y}$ genügt. Wir stellen statt dessen die Gleichung auf, welcher

$$u = \frac{y'}{y} + \frac{\gamma - (\alpha+\beta+1)x}{2x(1-x)}$$

genügt, denn mit $\frac{y'}{y}$ muss auch u rational sein.

Diese Gleichung ist aus der Gleichung (9) leicht zu bilden. Sie ist:

$$(15)\qquad \frac{du}{dx}+u^2+\frac{h_1}{x}+\frac{h_2}{x^2}+\frac{k_1}{1-x}+\frac{k_2}{(1-x)^2}=0,$$

wo wir der Kürze halber die folgenden Bezeichnungen einführten:

$$h_1=k_1=-\alpha\beta-\tfrac{1}{2}\gamma(\gamma-\alpha-\beta-1),$$

$$h_2=-\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2+\frac{\gamma}{2},$$

$$k_2=-\left(\frac{\gamma-\alpha-\beta-1}{2}\right)^2-\frac{\gamma-\alpha-\beta-1}{2}.$$

Wenn die rationale Function u von 0 und 1 verschiedene Pole hat, so kann sie diese nach unseren allgemeinen Bemerkungen nur in der ersten Ordnung besitzen. Wenn c ein solcher Pol ist, dann ist es aus der Gleichung (15) leicht ersichtlich, dass der Coefficient von $(x-c)^{-1}$ nur 1 sein kann, also die rationale Function u diese Pole nur in der Form

$$\frac{g'(x)}{g(x)}$$

enthalten kann, wo $g(x)$ eine rationale ganze Function von x ist. Aus der Gleichung (15) ersehen wir auch, dass u überhaupt keine Pole von höherer als der ersten Ordnung enthalten kann, folglich ist u von der Form:

$$(16)\qquad u=\frac{\alpha_1}{x}+\frac{\alpha_2}{1-x}+\frac{g'(x)}{g(x)}.$$

Wenn wir diesen Ausdruck in die Gleichung (15) einsetzen, und die erhaltenen Ausdrücke in Partialbrüche zerlegen, erhalten wir zunächst die folgenden Gleichungen für α_1 und α_2

$$\alpha_1^2-\alpha_1=\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2-\frac{\gamma}{2},$$

$$\alpha_2^2+\alpha_2=\left(\frac{\gamma-\alpha-\beta-1}{2}\right)^2+\frac{\gamma-\alpha-\beta-1}{2},$$

woraus wir für α_1 und α_2 die folgenden Werthsysteme erhalten:

$$(17)\qquad \begin{aligned}\alpha_1'&=\frac{\gamma}{2}, & \alpha_1''&=1-\frac{\gamma}{2},\\ \alpha_2'&=\frac{\gamma-\alpha-\beta-1}{2}, & \alpha_2''&=-1-\frac{\gamma-\alpha-\beta-1}{2}.\end{aligned}$$

Zur Bestimmung der ganzen Function $g(x)$ erhalten wir sodann aus (15) die hypergeometrische Differentialgleichung

$$(18)\qquad g''x(1-x)+2g'[\alpha_1(1-x)+\alpha_2 x]+(2\alpha_1\alpha_2+h_1)g=0.$$

Die höchste vorkommende Potenz von x liefert uns hier die Gleichung

$$(19)\quad -n(n-1)+2n(\alpha_2-\alpha_1)+2\alpha_1\alpha_2-\alpha\beta-\tfrac{1}{2}\gamma(\gamma-\alpha-\beta-1)=0,$$

wo n den Grad der ganzen Function $g(x)$ bedeutet. Wenn wir in diese Gleichung die vier möglichen Combinationen der Werthe von α_1, α_2 aus (17) einsetzen, dann erhalten wir die folgenden vier Werthsysteme für n:

$$(20)\quad 1)\, n = -\alpha,\ n = -\beta;\quad 2)\, n = -\alpha + 1,\ n = -\beta + 1;\quad 3)\, n = \alpha - \gamma,\ n = \beta - \gamma;\quad 4)\, n = \alpha - \gamma + 1,\ n = \beta - \gamma + 1.$$

Wir erhalten also auf diese Weise das bekannte Resultat, dass die hypergeometrische Differentialgleichung dann und nur dann reducibel ist, wenn eine der 4 Grössen:

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma - \alpha,\ \gamma - \beta$$

eine negative ganze Zahl ist. Aus Gleichung (18) erhalten wir dann nach einander die Coefficienten der ganzen hypergeometrischen Functionen $g(x)$.

8. Bei diesem Beispiel gestaltete sich die Behandlung der Riccati'schen Gleichung, auf welche die Bestimmung des Coefficienten q_1 zurückgeführt wurde, besonders einfach. Der Grund der Vereinfachung lag darin, dass die behandelte Differentialgleichung nur reguläre Integrale besitzt. Wenn die zu untersuchende Differentialgleichung nur reguläre Integrale besitzt, so wird die Behandlung der Riccati'schen Gleichung immer vereinfacht; denn in diesem Falle sind die in 5) bestimmten oberen Grenzen der Ordnungszahlen alle gleich 1. In diesem Falle können wir sogar die möglichen Zahlenwerthe von A_{i1} welche wir jetzt blos mit A_i bezeichnen wollen (Gleichung 13) von vorneherein in endlicher Zahl angeben; denn in diesem Falle ist:

$$q_1 = \sum \frac{A_i}{x - a_i} + \sum \frac{\alpha_i}{x - b_i},$$

und wenn wir für die Stelle a_i die determinirende Fundamentalgleichung aufstellen, so lautet diese folgendermassen:

$$\varrho(\varrho - 1)(\varrho - 2)\cdots(\varrho - m + 1) + \varrho\cdot(\varrho - 1)\cdots(\varrho - m + 2)A_i + \cdots = 0$$

oder geordnet:

$$\varrho^m - \left(\frac{m(m-1)}{2} - A_i\right)\varrho^{m-1} + \cdots = 0.$$

Die Summe der Exponenten ist also im Punkte a_i

$$(21)\qquad \frac{m(m-1)}{2} - A_i.$$

Aus der determinirenden Fundamentalgleichung für die gegebene, ursprüngliche Gleichung (1) für den Punkt a_i sind aber die Exponenten:

$$\varrho_1\ \varrho_2 \cdots \varrho_n$$

bekannt. Aus dieser Reihe müssen wir also auf alle mögliche Arten

m Exponenten auswählen. Die Summe einer Combination von m Exponenten muss mit dem Werth des Ausdrucks (21) gleich sein, folglich haben wir nur eine endliche Anzahl von Möglichkeiten zur Bestimmung von A_i. —

9. Es wurde schon erwähnt, wie die Irreducibilität der linearen Differentialgleichungen mit der Monodromiegruppe zusammenhängt. Wenn nämlich gewisse Lösungen der Gleichung (1)

$$Y_1\, Y_2 \dots Y_m,$$

wo $m < n$, vorhanden sind, so beschaffen, dass bei einem jeden Umlauf der unabhängigen Variabeln eine jede dieser Lösungen in eine andere von der Form

$$c_{i1} Y_1 + c_{i2} Y_2 + \cdots + c_{im} Y_m$$

übergeht, dann ist die Gleichung reducibel; denn in diesem Falle bleiben die Coefficienten der Gleichung:

$$(22) \qquad \begin{vmatrix} z & Y & Y_2 & \dots Y_m \\ z' & Y_1' & Y_2' & \dots Y_m' \\ z'' & Y_1'' & Y_2'' & \dots Y_m'' \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \cdot \\ z^{(m)} & Y_1^{(m)} & Y_2^{(m)} & \dots Y_m^{(m)} \end{vmatrix} = 0,$$

nachdem durch den Coefficienten von $z^{(m)}$ dividirt wurde, bei einem jeden Umlauf der unabhängigen Variabeln unverändert; sie sind also eindeutige Functionen von x; und umgekehrt, wenn die Gleichung:

$$z^{(m)} + Q_1 z^{(m-1)} + \cdots + Q_m z = 0$$

mit eindeutigen Coefficienten

$$Y_1\, Y_2 \dots Y_m$$

zu Lösungen hat, dann kann eine jede dieser Lösungen bei einem beliebigen Umlauf von x nur in eine andere Lösung

$$c_1 Y_1 + c_2 Y_2 + \cdots + c_m Y_m$$

übergehen. Wir sehen, dass bei diesem Criterium die ursprüngliche Frobenius'sche Bestimmung der Irreducibilität zu Grunde liegt. Wenn wir nicht nur die *Eindeutigkeit*, sondern die *Rationalität* der Coefficienten wünschen, dann müssen wir statt der *Monodromiegruppe* die *Rationalitätsgruppe* der Gleichung zu Grunde legen.

Ohne auf die betreffenden Untersuchungen der Herren Picard und Vessiot hier näher einzugehen, bemerke ich nur, dass zu einer jeden homogenen linearen Differentialgleichung eine homogene lineare algebraische Gruppe gehört von solcher Beschaffenheit, dass eine jede rationale Function der Lösungen (und ihrer Differentialquotienten), welche bei dieser Gruppe numerisch invariant bleibt, rational durch

die Coefficienten der Gleichung (und ihrer Differentialquotienten und der adjungirten Functionen) ausdrückbar ist und umgekehrt.

Nehmen wir an, dass diese Gruppe im Lie'schen Sinne transitiv ist, d. h. dass es möglich ist eine jede Lösung

$$y_1 y_2 \dots y_n$$

durch passende Bestimmung der Parameter der Gruppe in eine jede Lösung

$$Y_1 Y_2 \dots Y_n$$

zu überführen. Wenn dann eine Lösung y eine algebraische Differentialgleichung mit rationalen Coefficienten

$$(23) \qquad \varphi(y) = 0$$

befriedigt, dann muss auch eine jede andere Lösung diese Gleichung befriedigen; denn $\varphi(y)$ als 0 ist ja rational durch die Coefficienten der Gleichung ausdrückbar, sie bleibt also bei der Gruppe invariant. Durch die Gruppe kann aber y in eine beliebige Lösung übergeführt werden, folglich genügt eine jede Lösung der Gleichung (1) der Gleichung (23). Die gegebene Gleichung ist also irreducibel auch in *dem* Sinne, dass sie mit keiner anderen auch nicht linearen Differentialgleichung (mit rationalen Coefficienten) von niedrigerer Ordnung gemeinsame Lösungen haben kann.

Wenn hingegen die Rationalitätsgruppe so beschaffen ist, wie es nach dem Jordan'schen Satze die Monodromiegruppe im Falle der Reducibilität sein soll, d. h. wenn gewisse Lösungen

$$Y_1 Y_2 \dots Y_m$$

vorhanden sind, welche durch die Rationalitätsgruppe nur in Lösungen von der Gestalt:

$$c_{i1} Y_1 + c_{i2} Y_2 + \dots + c_{im} Y_m$$

übergeführt werden können, dann sind die Coefficienten der Gleichung (22) bei der Rationalitätsgruppe invariant, folglich rational durch die Coefficienten der Gleichung darstellbar; dann ist also die Gleichung auch in dem Sinne reducibel, dass sie mit einer anderen linearen Differentialgleichung von niedrigerer Ordnung — mit *rationalen* Coefficienten — Lösungen gemein hat.

Umgekehrt, wenn eine lineare Differentialgleichung von der $m < n^{\text{ten}}$ Ordnung mit rationalen Coefficienten existirt, welche ihre sämmtlichen Lösungen mit der gegebenen Gleichung gemein hat, dann ist die Rationalitätsgruppe so beschaffen, wie es der Satz von Jordan von der Monodromiegruppe wünscht. Sei nämlich die lineare Differentialgleichung von der m^{ten} Ordnung die folgende:

$$(24) \qquad y^{(m)} + q_1 y^{(m-1)} + q_2 y^{(m-2)} + \dots + q_m y = 0$$

und ein Fundamentalsystem der Lösungen:

$$(25)\qquad Y_1 Y_2 \ldots Y_m,$$

dann muss bei der Rationalitätsgruppe die lineare Schaar

$$\alpha_1 Y_1 + \alpha_2 Y_2 + \cdots + \alpha_m Y_m$$

invariant bleiben; denn gäbe es eine Transformation in dieser Gruppe, welche eine solche Lösung in eine, nicht in dieser Schaar enthaltene Y überführte, dann müsste die Gleichung (24) — da die linke Seite doch rational ausdrückbar ist (indem sie 0 ist) also bei dieser Transformation invariant bleibt — durch Y befriedigt werden, was nicht möglich ist, da doch (25) ein Fundamentalsystem der Lösungen ist. —

10. Zuletzt will ich noch einen speciellen Fall, welcher von Herrn Frobenius behandelt wurde, anführen, wo man leicht nachweisen kann, dass die Gleichung reducibel ist. Herr Frobenius*) bewies den Satz, dass wenn mit y_1 zugleich

$$(26)\qquad r(y_1) = c_0 y_1 + c_1 y_1' + c_2 y_1'' + \cdots + c_{n-1} y_1^{(n-1)},$$

wo die Coefficienten rationale Functionen von x bedeuten, eine Lösung der Gleichung (1) ist, diese Gleichung gewiss reductibel ist.

Wenn y_2 ein anderer Zweig von y_1 ist, dann ist auch, wie leicht zu sehen

$$r(y_2) = c_0 y_2 + c_1 y_2' + c_2 y_2'' + \cdots + c_{n-1} y_2^{(n-1)}$$

eine Lösung der Gleichung (1). Wenn also

$$(27)\qquad y_1 y_2 \ldots y_n$$

n von einander unabhängige Zweige von y_1 sind, dann sind auch

$$(28)\qquad r(y_1),\ r(y_2),\ \ldots,\ r(y_n),$$

die wir der Uebersicht halber mit

$$\eta_1,\ \eta_2,\ \ldots,\ \eta_n$$

bezeichnen wollen, Lösungen der Gleichung (1). Wenn diese Lösungen nicht unabhängig wären, d. h. wenn zwischen ihnen eine Gleichung

$$\gamma_1 \eta_1 + \gamma_2 \eta_2 + \cdots + \gamma_n \eta_n = 0$$

mit constanten Coefficienten bestünde, so würde

$$u = \gamma_1 y_1 + \gamma_2 y_2 + \cdots + \gamma_n y_n$$

der folgenden Gleichung

$$c_0 u + c_1 u' + c_2 u'' + \cdots + c_{n-1} u^{(n-1)} = 0$$

genügen, d. h. einer homogenen linearen Differentialgleichung von der $n-1^{\text{ten}}$ Ordnung mit rationalen Coefficienten; die Gleichung (1) wäre also gewiss reducibel. Die zwei Fundamentalsysteme (27) und (28) sind in einer sehr engen Beziehung zu einander; wenn wir nämlich

*) Frobenius, Journ. f. r. u. ang. Math. 76. und Hamburger ib. 110.

mit der unabhängigen Variabeln einen beliebigen Umlauf machen, welche in der Reihe (27) die Substitution

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ & & & \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{vmatrix}$$

verursacht, dann wird durch denselben Umlauf in der Reihe (28) dieselbe Substitution hervorgebracht. Diese Functionen sind, nach der Benennung des Herrn Klein *verwandte Functionen.* Den Satz des Herrn Frobenius können wir also in folgender durchsichtiger Weise fassen: *Wenn einer homogenen linearen Differentialgleichung verwandte Fundamentalsysteme genügen, dann ist sie reducibel.*

Den Satz können wir mit Benützung des Verwandtschaftsbegriffs folgendermassen beweisen: Es existirt immer eine Lösung, welche bei einem Umlauf um einen singulären Punkt mit einer Constanten multiplicirt wird. Sei eine solche Lösung, welche zum singulären Punkt a gehört, die folgende:

$$w = \gamma_1 y_1 + \gamma_2 y_2 + \cdots + \gamma_n y_n,$$

welche bei einem Umlauf um a in sw übergeht. Dann geht nach dem Begriff der Verwandtschaft bei diesem Umlauf auch

$$\omega = \gamma_1 \eta_1 + \gamma_2 \eta_2 + \cdots + \gamma_n \eta_n$$

in $s\omega$ über. Diese Lösungen können daher — von den Ausnahmefällen abgesehen, wo die sämmtlichen Unterdeterminanten der zugehörigen Fundamentalgleichung verschwinden — nur um einen constanten Factor von einander verschieden sein, also:

$$\omega = kw.$$

Wenn wir in diese Gleichung den Werth von ω einsetzen und nach den rationalen Coefficienten $c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}$ ordnen, dann erhalten wir die Gleichung:

$$(29) \qquad (c_0 - k)\, w + c_1 w' + c_2 w'' + \cdots + c_{n-1} w^{(n-1)} = 0,$$

welche beweist, dass die Gleichung (1) reducibel ist. — Dass der hiermit aufgestellten Gleichung (29) gerade diese ausgezeichnete Lösung genügt, welche sich bei dem Umlauf der unabhängigen Variabeln multiplicativ verhält, das liegt in der Natur der Sache. Denn, wie leicht einzusehen ist, müssen in jedem Falle, wenn die Gleichung reducibel ist, solche ausgezeichnete Lösungen auch der Gleichung niedriger Ordnung genügen, — diese letztere Gleichung muss ja auch solche Lösungen haben, die sich multiplicativ verhalten — und wenn nur nicht der genannte besondere Ausnahmefall vorhanden ist, so sind diese Lösungen bis auf constante Factoren bestimmt. — Wenn aber der genannte Ausnahmefall eintritt, nämlich dass bei einem jeden

singulären Punkt unendlich viele Integrale vorhanden sind, die bei den Umläufen mit *derselben* Constanten multiplicirt werden, dann können wir die Reducibilität unserer Gleichung in folgender Weise beweisen:

Wenn

$$w_1 w_2 \ldots w_\varrho$$

die von einander unabhängigen Lösungen der Gleichung (1) sind, die bei einem Umlauf um den singulären Punkt *a alle* mit s multiplicirt werden, wo

$$w_i = \gamma_{i1} y_1 + \gamma_{i2} y_2 + \cdots + \gamma_{in} y_n,$$
$$i = 1, 2, \ldots, \varrho,$$

dann werden die analog gebildeten Lösungen

$$\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\varrho,$$

wo

$$\omega_i = \gamma_{i1} \eta_1 + \gamma_{i2} \eta_2 + \cdots + \gamma_{in} \eta_n,$$

bei diesem Umlauf ebenfalls mit s multiplicirt. Es bestehen also folgende Gleichungen:

$$\omega_i = \lambda_{i1} w_1 + \lambda_{i2} w_2 + \cdots + \lambda_{i\varrho} w_\varrho, \quad i = 1, 2, \ldots, \varrho. \tag{30}$$

Wir multipliciren diese Gleichungen (30) der Reihe nach mit den unbestimmten Constanten:

$$\mu_1 \mu_2, \ldots, \mu_\varrho$$

und bestimmen diese so, dass eine Gleichung besteht:

$$\mu_1 \omega_1 + \mu_2 \omega_2 + \cdots + \mu_\varrho \omega_\varrho = k(\mu_1 w_1 + \mu_2 w_2 + \cdots + \mu_\varrho w_\varrho). \tag{31}$$

Zu diesem Zweck müssen wir k so festlegen, dass das folgende Gleichungensystem besteht:

$$\begin{array}{c} \mu_1 \lambda_{11} + \mu_2 \lambda_{21} + \cdots + \mu_\varrho \lambda_{\varrho 1} = \mu_1 k, \\ \mu_1 \lambda_{12} + \mu_2 \lambda_{22} + \cdots + \mu_\varrho \lambda_{\varrho 2} = \mu_2 k, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdots \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdots \quad \cdot \quad \cdot \\ \mu_1 \lambda_{1\varrho} + \mu_2 \lambda_{2\varrho} + \cdots + \mu_\varrho \lambda_{\varrho\varrho} = \mu_\varrho k, \end{array} \tag{32}$$

also k eine Wurzel der folgenden Gleichung ist:

$$\begin{vmatrix} \lambda_{11} - k, & \lambda_{21}, & \ldots, & \lambda_{\varrho 1} \\ \lambda_{12}, & \lambda_{22} - k, & \ldots, & \lambda_{\varrho 2} \\ \cdot & \cdot & \ldots, & \cdot \\ \cdot & \cdot & \ldots, & \cdot \\ \lambda_{1\varrho}, & \lambda_{2\varrho}, & \ldots, & \lambda_{\varrho\varrho} - k \end{vmatrix} = 0. \tag{33}$$

Ist k Wurzel dieser Gleichung, dann können wir aus dem System (32) die Coefficienten

$$\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_\varrho$$

eindeutig, oder mehrdeutig so bestimmen, dass jedenfalls die Gleichung (31) besteht. Wenn jetzt

$$\mu_1\gamma_{1i} + \mu_2\gamma_{2i} + \cdots + \mu_\varrho\gamma_{\varrho i}$$

mit ε_i bezeichnet wird, und

$$u = \varepsilon_1 y_1 + \varepsilon_2 y_2 + \cdots + \varepsilon_n y_n,$$

so genügt u der homogenen linearen Differentialgleichung von der $n - 1^{\text{ten}}$ Ordnung:

$$(c_0 - k)\, u + c_1 u' + c_2 u'' + \cdots + c_{n-1} u^{(n-1)} = 0;$$

die vorgelegte Gleichung ist also auch in diesem Falle reducibel und wir erhalten zugleich eine ausgezeichnete Lösung der Gleichung niedrigerer Ordnung, welche sich bei dem Umlauf um den Punkt a multiplicativ verhält.*)

Göttingen, im Januar 1894.

---

*) Nachträglich habe ich von einer Arbeit des Hrn. Bendixson (Stockholm, Öfversicht, 1892) Kenntniss erhalten. Ein Theil der unter 4 und 5 enthaltenen Entwicklungen meiner Arbeit ist durch die Abhandlung des Herrn Bendixson überflüssig geworden und wurde nur des Zusammenhanges halber beibehalten.

März 1894. E. B.

Die symmetrischen Functionen bei den linearen homogenen Differentialgleichungen.

Von

E. Beke in Budapest.

In den Untersuchungen, in welchen die Herren Picard und Vessiot die Theorie der algebraischen Transformationsgruppen zur systematischen Behandlung der linearen Differentialgleichung so herangezogen, wie die Galois'sche Theorie die Gruppen der Substitutionen von n Elementen zur Behandlung der algebraischen Gleichungen, spielt die allgemeine homogene (n^2 gliedrige) lineare Gruppe eine ebensolche wichtige Rolle, wie die allgemeine Substitutionengruppe von der Ordnung $n!$ bei den algebraischen Gleichungen. So wie bei der gruppentheoretischen Behandlung der algebraischen Gleichungen diejenigen Functionen, welche bei sämmtlichen Substitutionen unverändert bleiben — die symmetrischen Functionen — eine fundamentale Wichtigkeit haben, so sind in dieser Theorie diejenigen rationalen Functionen der Fundamentallösungen von grundlegender Bedeutung, welche bei der allgemeinen homogenen Gruppe invariant bleiben. Solche rationale Functionen der Lösungen (und ihrer Differentialquotienten) der homogenen linearen Differentialgleichungen, welche bei dieser Gruppe invariant bleiben, wollen wir *symmetrische Functionen* der Fundamentallösungen nennen. Die Wichtigkeit dieser Functionen besteht darin, dass die „Rationalitätsgruppe" der *allgemeinen* homogenen linearen Gleichung, um den von Hrn. F. Klein vorgeschlagenen Ausdruck zu gebrauchen, eben die allgemeine homogene lineare Gruppe ist; folglich im Sinne dieser allgemeinen Theorie: *Die symmetrischen Functionen der Fundamentallösungen* (und ihrer Differentialquotienten) *durch die Coefficienten der Gleichung* (und durch ihre Differentialquotienten)

rational ausdrückbar sind. Wir wollen hier einen äusserst einfachen Beweis dieses bekannten Satzes geben. Sei eine homogene lineare Differentialgleichung:

$$f(y) = y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + \cdots + p_n y = 0$$

mit dem Fundamentalsystem:

$$y_1 y_2 \ldots y_n.$$

Dann beweisen wir zuerst, dass eine symmetrische Function, welche keine höheren Differentialquotienten als die $n-1^{\text{ten}}$ enthält, nur eine Constante sein kann. Sei

$$R = R(y_1, y_2, \ldots, y_n, y_1' \ldots y_n', \ldots y_1^{(n-1)}, \ldots y_n^{(n-1)})$$

eine symmetrische Function, dann muss identisch:

$$R = R(Y_1 Y_2 \ldots Y_n, Y_1' \ldots Y_n' \ldots Y_1^{(n-1)}, \ldots Y_n^{(n-1)}) \tag{1}$$

sein, wenn:

$$\begin{aligned} Y_1 &= a_{11} y_1 + a_{12} y_2 + \cdots + a_{1n} y_n, \\ Y_2 &= a_{21} y_1 + a_{22} y_2 + \cdots + a_{2n} y_n, \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdots \quad \cdot \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdots \quad \cdot \\ Y_n &= a_{n1} y_1 + a_{n2} y_2 + \cdots + a_{nn} y_n, \end{aligned} \tag{2}$$

wo die Coefficienten a_{ik} *beliebige* Grössen sind. Da die Gleichung (1) eine Identität ist, so muss sie bei einem jeden Werthsystem von a_{ik} bestehen, wenn auch die eingeführten

$$Y_1 Y_2 \ldots Y_n$$

kein Fundamentalsystem bilden. Nehmen wir statt der Coefficienten a_{ik} die nach den Elementen der letzten Zeile genommenen Unterdeterminanten der Determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ y_1' & y_2' & \ldots & y_n' \\ y_1'' & y_2'' & \ldots & y_n'' \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \ldots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

und zwar so, dass:

$$a_{1i} = a_{2i} = \cdots = a_{ni} = \frac{\partial \Delta}{\partial y_i^{(n-1)}}.$$

Dann wird nach 1) identisch:

$$R = R(0, \ldots 0, \ldots \Delta, \Delta, \ldots \Delta) = F(\Delta).$$

Die symmetrische Function ist also eine rationale Function von Δ. Wenn wir aber die Substitution (2) machen, dann wird Δ mit der Determinante A von (2) multiplicirt, es müsste also identisch:

$$R = F(A\Delta) \tag{3}$$

bei *jeder* beliebigen Zahl A sein; eine solche Function kann aber bekanntermassen nur eine Constante sein; folglich ist *eine symmetrische Function der Fundamentallösungen, welche diese höchstens bis zu den Differentialquotienten der $n-1^{ten}$ Ordnung enthält, ganz unabhängig von diesen Grössen.*

Wenn wir nun eine symmetrische Function haben, welche auch höhere Differentialquotienten enthält, dann drücken wir die Differentialquotienten, deren Ordnung grösser als $n-1$ ist, durch die ersten n Differentialquotienten (y als $y^{(0)}$ gerechnet), mittels der gegebenen Differentialgleichung aus, wodurch wir die Coefficienten der Gleichung und deren Differentialquotienten einführen. Aus dem bewiesenen Satze folgt daher, dass eine jede rationale symmetrische Function der Fundamentallösungen *rational durch die Coefficienten der Gleichung* (*und deren Differentialquotienten*) *ausdrückbar ist*, was zu beweisen war. — Wir bemerken noch, dass dieser ganze Beweis auf dem Satze 3) fusst, und da dieser Satz auch gültig ist, wenn wir uns nicht auf rationale Functionen beschränken, so hat also auch der bewiesene Satz — natürlich abgesehen von der rationalen Darstellbarkeit — eine allgemeinere Gültigkeit.

Wir wollen zwei kleine Anwendungen dieses Satzes mittheilen, um zu zeigen, wie man ihn bei der Resolventen- und Resultantenbildung benützen kann.

Die erste Anwendung sei die Bildung der Resolventengleichung für die Summe der Lösungen zweier linearen Differentialgleichungen ohne gemeinschaftliche Lösungen. Die zwei Differentialgleichungen seien:

$$\begin{aligned} f(y) &= y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + \cdots + p_n y = 0, \\ \varphi(y) &= y^{(m)} + q_1 y^{(m-1)} + q_2 y^{(m-2)} + \cdots + q_m y = 0, \end{aligned} \tag{4}$$

mit den Fundamentallösungen:

$$y_1 y_2 \ldots y_n \quad \text{und} \quad z_1 z_2 \ldots z_m.$$

Dann ist die gesuchte Gleichung, welcher sämmtliche Lösungen der gegebenen Differentialgleichung genügen, die folgende lineare homogene Differentialgleichung von der $n+m^{ten}$ Ordnung:

$$F(u)=\begin{vmatrix} u & y_1 & y_2 & \dots y_n & z_1 & z_2, & \dots z_m \\ u' & y_1' & y_2' & \dots y_n' & z_1' & z_2', & \dots z_m' \\ u'' & y_1'' & y_2'' & \dots y_n'' & z_1'' & z_2'', & \dots z_m'' \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots \\ u^{(n+m)}, & y_1^{(n+m)}, & y_2^{(n+m)} & \dots y_n^{(n+m)}, & z_1^{(n+m)}, & z_2^{(n+m)}, & \dots z_m^{(n+m)} \end{vmatrix}=0.$$

Wenn wir diese Determinante nach der Laplace'schen Methode so entwickeln, dass die Determinanten der aus den ersten $n+1$ Verticalreihen gebildeten Matrix mit den entsprechenden adjungirten multiplicirt werden, und dann nach den linearen Factoren:

$$u,\ u',\ u'',\ \dots\ u^{(n+m)}$$

ordnen, dann besteht der Coefficient von jeder $u^{(k)}$ aus solchen Aggregaten:

$$\begin{vmatrix} y_1^{(i_1)} & y_2^{(i_1)} & \dots & y_n^{(i_1)} \\ y_1^{(i_2)} & y_2^{(i_2)} & \dots & y_n^{(i_2)} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ y_1^{(i_n)} & y_2^{(i_n)} & \dots & y_n^{(i_n)} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} z_1^{(h_1)} & z_2^{(h_1)} & \dots & z_m^{(h_m)} \\ z_1^{(h_2)} & z_2^{(h_2)} & \dots & z_m^{(h_m)} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ z_1^{(h_m)} & z_2^{(h_m)} & \dots & z_m^{(h_m)} \end{vmatrix},$$

wo die Zahlen $i_1 i_2 \dots i_n$ und $h_1 h_2 \dots h_m$ in gewisser Reihenfolge mit den Zahlen:

$$0,\ 1,\ 2,\ \dots\ (k-1),\ (k+1),\ \dots\ n+m$$

übereinstimmen. Diese Aggregate sind nicht symmetrisch, aber sie werden symmetrisch, wenn mit dem Product:

$$(5)\qquad \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ y_1'' & y_2'' & \dots & y_n'' \\ \vdots & \cdot & \cdots & \cdot \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} z_1 & z_2 & \dots & z_m \\ z_1' & z_2' & \dots & z_m' \\ z_1'' & z_2'' & \dots & z_m'' \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ z_1^{(m-1)} & z_2^{(m-1)} & \dots & z_m^{(m-1)} \end{vmatrix}$$

dividirt wird. Dieses Product ist aber bekanntlich:

$$e^{-\int (p_1+q_1)\,dx},$$

folglich ist

$$e^{\int (p_1+q_1)\,dx}\cdot F(u)=0$$

die gesuchte Gleichung, deren Coefficienten nach dem bewiesenen Satze rational durch die Coefficienten der Gleichungen ausdrückbar sind. —

Die zweite Anwendung bezieht sich auf die Resultantenbildung: auf die Bildung eines Ausdruckes, welcher dann, und nur dann identisch verschwindet, wenn zwei gegebene homogene lineare Diffe-

rentialgleichungen gemeinsame Lösung besitzen.*) Seien die gegebenen Gleichungen wieder die unter (4) gegebenen. Wenn eine Lösung der ersten Gleichung:

$$Y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_n y_n$$

die zweite Gleichung befriedigen soll, dann muss also:

$$\varphi(y) = c_1 \varphi(y_1) + c_2 \varphi(y_2) + \cdots + c_n \varphi(y_n) = 0 \tag{6}$$

sein. Wenn wir diese Identität $(n-1)$ mal hinter einander differentiiren und die Constanten eliminiren, erhalten wir als nothwendige Bedingung:

$$R = \begin{vmatrix} \varphi(y_1), & \varphi(y_2), & \ldots \varphi(y_n) \\ \varphi'(y_1), & \varphi'(y_2), & \ldots \varphi'(y_n) \\ \varphi''(y_1), & \varphi''(y_2), & \ldots \varphi''(y_n) \\ \cdot & \cdot & \ldots\,. \\ \cdot & \cdot & \ldots\,. \\ \varphi^{(n-1)}(y_1), & \varphi^{(n-1)}(y_2), & \ldots \varphi^{(n-1)}(y_n) \end{vmatrix} = 0.$$

Andererseits, wenn $R = 0$ ist, dann genügen

$$\varphi(y_1),\ \varphi(y_2) \ldots \varphi(y_n)$$

einer homogenen linearen Differentialgleichung von der $n-1^{\text{ten}}$ Ordnung:

$$\begin{vmatrix} z, & \varphi(y_2), & \ldots \varphi(y_n) \\ z', & \varphi'(y_2), & \ldots \varphi'(y_n) \\ z'', & \varphi''(y_2), & \ldots \varphi''(y_n) \\ \cdot & \cdot & \ldots\,. \\ \cdot & \cdot & \ldots\,. \\ z^{(n-1)}, & \varphi^{(n-1)}(y_2), & \ldots \varphi^{(n-1)}(y_n) \end{vmatrix} = 0,$$

folglich muss zwischen ihnen eine lineare Relation (6) bestehen, woraus wieder folgt, dass Y eine gemeinsame Lösung der Gleichungen ist. Wenn k Lösungen gemein sind, dann bestehen k lineare Gleichungen (6), woraus leicht zu folgern ist, dass die sämmtlichen Unterdeterminanten $n - k + 1^{\text{ter}}$ Ordnung verschwinden. Der Ausdruck von R ist nicht symmetrisch, aber, wenn mit der Determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} y_1, & y_2, & \ldots y_n \\ y_1', & y_2', & \ldots y_n' \\ y_1'', & y_2'', & \ldots y_n'' \\ \cdot & \cdot & \ldots\,. \\ \cdot & \cdot & \ldots\,. \\ y_1^{(n-1)}, & y_2^{(n-1)}, & \ldots y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} = e^{-\int p_1\,dx}$$

dividirt wird, dann wird der Ausdruck symmetrisch und ist also durch die Coefficienten der ersten Gleichung rational ausdrückbar. Wenn die gegebenen Gleichungen von der zweiten Ordnung sind:

*) Von Escherich: Denkschriften der Wiener Academie Bd. 46, 1883.

$$f(y) = y'' + py' + qy = 0,$$
$$\varphi(y) = y'' + Py' + Qy = 0,$$

dann ist die auf diese Weise gebildete Resultante, welche natürlich in den Coefficienten der zwei Gleichungen symmetrisch gebaut ist:

$$Q^2 + q^2 - Qp' - qP' + QP' + qp' + Qp^2 + qP^2 - 2Qq + Pq' + pQ' - PQ' - pq' - pPQ - Ppq = 0.$$

Göttingen, im März 1894.

Ueber einen Algorithmus zur Berechnung der n^{ten} Wurzel aus a.

Von

Carl Schmidt in Mainz.

In den Bänden 29 und 31 der mathematischen Annalen sind von den Herren Netto und Isenkrahe Beispiele für iterirte Functionen, ihre Convergenzbedingungen und theilweise auch ihre Convergenzbereiche im Gebiete der realen Variablen betrachtet worden. Ich will im Folgenden ein neues Beispiel behandeln, nämlich den Algorithmus

$$x_1 = \frac{n-1}{n}\,x + \frac{a}{n\,x^{n-1}},$$

$$x_2 = \frac{n-1}{n}\,x_1 + \frac{a}{n\,x_1^{\,n-1}},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

der auf die n^{te} Wurzel von a führt. Dieses Beispiel dürfte ein gewisses Interesse darbieten. Denn die iterirte Function ist sehr einfach rational und die Convergenz ist sehr stark. Ausserdem wird die Variable nicht nur auf reale Werthe beschränkt. Für den Fall der Quadratwurzel ($n = 2$) ist das Ergebniss überraschend einfach. Dann zerfällt die Ebene der complexen Zahlen in zwei Convergenzbereiche, die durch eine gerade Linie von einander getrennt sind. Diese gerade Linie enthält alle diejenigen x, welche gleichweit von den beiden Punkten, die die Quadratwurzeln aus a darstellen, entfernt sind; sie ist also die Mittelsenkrechte der Verbindungslinie der beiden Punkte.*) Liegt x auf dieser Linie, so convergirt der Algorithmus nicht. In jedem andern Falle convergirt er gegen denjenigen Werth von $\sqrt{a}$, der dem Anfangswerthe x am nächsten liegt. Der Grenzwerth lässt sich auch als eine unendliche Reihe von rationalen Functionen von x darstellen, nämlich in der Form

$$x + (x_1 - x) + (x_2 - x_1) + \cdots.$$

*) Ich will mich im Folgenden immer der bequemen und anschaulichen aus der geometrischen Darstellung der complexen Zahlen entspringenden Ausdrucksweise bedienen.

Und so ergiebt sich hier wieder ein Beispiel für die bekannte Thatsache, dass eine unendliche Reihe von rationalen Functionen in verschiedenen Convergenzbezirken verschiedene analytische Functionen darstellen kann, nämlich hier die beiden verschiedenen constanten Werthe von $\sqrt{a}$.

I.

Es sei $a = \alpha \,.\, e^{i\omega}$, und x liege auf demjenigen Strahle, der den Nullpunkt mit dem Punkte

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{\alpha} \,.\, e^{\frac{i\omega}{n} + \frac{2\lambda i\pi}{n}}$$

verbindet, so dass

$$x = \xi \,.\, \sqrt[n]{\alpha} \,.\, e^{\frac{i\omega}{n} + \frac{2\lambda i\pi}{n}}$$

gesetzt werden kann, wobei ξ eine positive reale Zahl ist. Dann ist nach einigen leichten Umformungen

$$x_1 = \sqrt[n]{\alpha} \,.\, e^{\frac{i\omega}{n} + \frac{2\lambda i\pi}{n}} \left(\frac{n-1}{n} \xi + \frac{1}{n\xi^{n-1}}\right).$$

Daraus folgt, dass x_1 und ebenso alle folgenden x auf demselben Strahle liegen, und setzt man nun für alle λ

$$x_\lambda = \xi_\lambda \cdot \sqrt[n]{\alpha} \,.\, e^{\frac{i\omega}{n} + \frac{2\lambda i\pi}{n}},$$

so ergiebt sich für die positiven realen ξ der einfache Algorithmus

$$\xi_{\lambda+1} = \frac{n-1}{n} \xi_\lambda + \frac{1}{n\xi_\lambda^{n-1}}$$

d. h. es genügt den Fall zu betrachten, wo $a = 1$ und x positiv real ist.

II.

Betrachtet man den Verlauf der Function

$$\frac{n-1}{n} x + \frac{1}{nx^{n-1}}$$

für positive reale x, so ergiebt sich, dass sie in dem Intervalle $0 \ldots 1$ der Variablen x von $+\infty$ bis 1 fällt, bei $x = 1$ das Minimum 1 hat und in dem Intervalle $1 \cdots \infty$ wieder von 1 bis $+\infty$ steigt. Es genügt demnach, solche x zu betrachten, die grösser als 1 sind; denn ist der Anfangswerth x kleiner als 1, so sind doch alle folgenden x grösser als 1. Ist nun $x > 1$, so ist $\frac{1}{x^{n-1}} < x$, folglich $x_1 < x$. Die x bilden also eine abnehmende Reihe, deren Glieder immer grösser als 1 bleiben; folglich muss die Reihe einen endlichen Grenzwerth haben. Dieser Grenzwerth muss der Gleichung

$$x = \frac{n-1}{n} x + \frac{1}{n x^{n-1}}$$

oder

$$x^n = 1$$

genügen, kann also nur gleich 1 sein.

Um die Stärke der Convergenz festzustellen, berechnen wir $x_1 - 1$.

$$x_1 - 1 = \frac{(n-1)x^n - n x^{n-1} + 1}{n x^{n-1}} = (x-1)^2 \frac{(n-1)x^{n-2} + (n-2)x^{n-3} + \cdots + 1}{n x^{n-1}}.$$

Da $x > 1$ ist, so ist der Factor auf der rechten Seite kleiner als

$$\frac{(n-1) + (n-2) + \cdots + 1}{n} = \frac{n-1}{2},$$

so dass

$$\frac{n-1}{2}(x_1 - 1) < \left[\frac{n-1}{2}(x-1)\right]^2$$

ist und demnach

$$\frac{n-1}{2}(x_2 - 1) < \left[\frac{n-1}{2}(x-1)\right]^4,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{n-1}{2}(x_\lambda - 1) < \left[\frac{n-1}{2}(x-1)\right]^{2^\lambda}.$$

In dem allgemeineren Falle, wo a nicht gleich 1 ist, ergiebt sich

$$\frac{n-1}{2}\,\frac{x_\lambda - \sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{a}} < \left[\frac{n-1}{2}\,\frac{x - \sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{a}}\right]^{2^\lambda}.$$

Ist also der Anfangswerth x schon so nahe an $\sqrt[n]{a}$ gewählt, dass das Verhältniss des Fehlers oder der Differenz $x - \sqrt[n]{a}$ zu dem Werthe von $\sqrt[n]{a}$ kleiner als $\frac{2}{n-1} \cdot 0{,}1$ ist, so ist schon für x_3 das entsprechende Verhältniss

$$\frac{x_3 - \sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{a}} < \frac{2}{n-1} \cdot 0{,}00000001.$$

III.

Wir wollen jetzt den Fall betrachten, wo x auf einem Strahle liegt, der vom Nullpunkt ausgeht und den Winkel zweier benachbarten n^{ten} Wurzeln aus a halbirt. Es sei also

$$x = \xi \cdot \sqrt[n]{a}\, e^{\frac{i\omega}{n}} \cdot e^{\frac{(2\lambda+1)\pi i}{n}},$$

wobei ξ eine positive reale Zahl ist. Dann ist nach einigen Umformungen

$$x_1 = \sqrt[n]{a} \cdot e^{\frac{i\omega}{n}} \cdot e^{\frac{(2\lambda+1)\pi i}{n}} \left(\frac{n-1}{n}\xi - \frac{1}{n\xi^{n-1}}\right).$$

Setzt man also

$$x_1 = \xi_1 \sqrt[n]{a} \cdot e^{\frac{i\omega}{n}} \cdot e^{\frac{(2\lambda+1)\pi i}{n}},$$

so wird

$$\xi_1 = \frac{n-1}{n}\xi - \frac{1}{n\xi^{n-1}}$$

real, d. h. x_1 liegt auf demselben Strahle oder seiner Verlängerung über den Nullpunkt, und dasselbe gilt auch von den folgenden x. Es ist also

$$x_\lambda = \xi_\lambda \cdot \sqrt[n]{a} \cdot e^{\frac{i\omega}{n}} e^{\frac{(2\lambda+1)\pi i}{n}},$$

wobei ξ_λ positiv oder negativ real ist, und die ξ durch folgenden Algorithmus zusammenhängen

$$\xi_{\lambda+1} = \frac{n-1}{n}\xi_\lambda - \frac{1}{n\xi_\lambda^{n-1}}.$$

Wenn nun die Reihe der ξ einen endlichen Grenzwerth hat, so muss er der Gleichung

$$\xi = \frac{n-1}{n}\xi - \frac{1}{n\xi^{n-1}}$$

oder

$$\xi^n = -1$$

genügen. Da nun diese Gleichung bei geradem n keine reale Wurzel hat, so folgt, dass bei geradem n auf dem genannten Strahle keine Convergenz stattfinden kann.

Bei ungeradem n genügt der Gleichung der Werth $\xi = -1$, und in der That convergirt dann die Reihe der ξ, wenn eine unendliche Anzahl von wohlbestimmten Anfangswerthen ausgeschlossen wird, gegen den Grenzwerth -1, und mithin die Reihe der x gegen diejenige n^{te} Wurzel aus a, welche auf der Verlängerung des Strahls liegt. Die Function $\frac{n-1}{n}x - \frac{1}{nx^{n-1}}$ der Variablen x steigt, wenn x von 0 bis $+\infty$ wächst, stetig von $-\infty$ bis $+\infty$ und wird bei $x = \sqrt[n]{\frac{1}{n-1}}$ gleich 0. Ist nun der Anfangswerth ξ grösser als $\sqrt[n]{\frac{1}{n-1}}$, so muss doch, weil

$$\xi_1 = \frac{n-1}{n}\xi - \frac{1}{n\xi^{n-1}}$$

ist, $\xi_1 < \frac{n-1}{n}\cdot\xi$, und $\xi_2 < \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 \cdot \xi$ sein u. s. w., so lange die ξ positiv sind. Daher muss schliesslich ein Glied der Reihe entweder gleich $\sqrt[n]{\frac{1}{n-1}}$ oder kleiner werden. Im ersten Falle wird das folgende ξ gleich 0, das weiter folgende gleich $-\infty$, und jetzt muss der Algorithmus abgebrochen werden. Im anderen Falle werden alle

folgenden ξ negativ und haben den Grenzwerth -1, denn setzt man jetzt an Stelle von ξ_λ in den Gleichungen $-\xi_\lambda$, so erhält man den früher betrachteten Algorithmus

$$\xi_{\lambda+1} = \frac{n-1}{n}\,\xi_\lambda + \frac{1}{n\,\xi_\lambda^{n-1}}.$$

Auszuschliessen sind also nur diejenigen Werthe, welche schliesslich auf $\sqrt[n]{\frac{1}{n-1}}$ führen, nämlich

1) $\xi' = \sqrt[n]{\frac{1}{n-1}}$,

2) diejenige Stelle ξ'', welche der Gleichung

$$\xi' = \frac{n-1}{n}\,\xi'' - \frac{1}{n\,\xi''^{\,n-1}}$$

genügt,

3) diejenige Stelle ξ''', welche der Gleichung

$$\xi'' = \frac{n-1}{n}\,\xi''' - \frac{1}{n\,\xi'''^{\,n-1}}$$

genügt u. s. f.

IV.

Es soll jetzt der Convergenzbereich im Gebiete der complexen Zahlen für den Fall der Quadratwurzel ($n=2$) festgestellt werden. Es sei zunächst $a=1$, da der allgemeine Fall durch eine einfache Substitution auf diesen besonderen Fall zurückgeführt werden kann. Dann ist

$$x_1 = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right),$$
$$x_2 = \frac{1}{2}\left(x_1 + \frac{1}{x_1}\right),$$
$$\cdots\cdots$$

Liegt der Anfangswerth x auf der imaginären Axe, so findet nach III. keine Convergenz statt. Es sei jetzt der reale Theil von x positiv, dann ist zu beweisen, dass der Algorithmus gegen $+1$ convergirt. Setzt man $x_\lambda = r_\lambda \cdot e^{i\varphi_\lambda}$, so liegt φ zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$. Nun ist

$$r_1 \cos\varphi_1 = \frac{\cos\varphi}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right),$$
$$r_1 \sin\varphi_1 = \frac{\sin\varphi}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right).$$

Infolge der ersten Gleichung ist $\cos\varphi_1$ positiv, daher liegt φ_1 ebenfalls zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$, und dasselbe gilt natürlich von allen folgenden φ.

Da

$$\tang \varphi_1 = \tang \varphi \cdot \frac{r^2 - 1}{r^2 + 1}$$

ist, so ist φ_1 dem absoluten Werthe nach kleiner als φ. Die absoluten Beträge der φ bilden also eine abnehmende Reihe und müssen einem Grenzwerth zustreben. Daher müssen die Brüche von der Form $\frac{\cos \varphi_\lambda}{\cos \varphi_{\lambda+1}}$, die alle kleiner als 1 sind, dem Grenzwerth 1 zustreben. Ist A ein beliebig nahe an 1 gewählter echter Bruch, so kann man den Index λ so gross nehmen, dass von nun an alle Brüche von der Form $\frac{\cos \varphi_\lambda}{\cos \varphi_{\lambda+1}} > A$ sind.

Da nun

$$r_{\lambda+1} = \frac{\cos \varphi_\lambda}{\cos \varphi_{\lambda+1}} \cdot \frac{1}{2}\left(r_\lambda + \frac{1}{r_\lambda}\right)$$

ist, so ist von der bestimmten Stelle an

1) $$r_{\lambda+1} < \frac{1}{2}\left(r_\lambda + \frac{1}{r_\lambda}\right),$$

2) $$r_{\lambda+1} > A \cdot \frac{1}{2}\left(r_\lambda + \frac{1}{r_\lambda}\right).$$

In Folge der 2. Bedingung bleiben alle r_λ grösser als A. In Folge der 1. Bedingung müssen die r_λ von einer gewissen Stelle an kleiner als $\frac{1}{2}\left(A + \frac{1}{A}\right)$ bleiben. Denn wenn die r_λ auch anfangs noch grösser als diese Zahl sind, so müssen sie doch in Folge der ersten Bedingung, so lange sie grösser als 1 sind, beständig abnehmen und der Zahl 1 als Grenzwerth zustreben. Daher muss schliesslich ein bestimmtes r_λ kleiner als $\frac{1}{2}\left(A + \frac{1}{A}\right)$ werden, und von nun an sind alle r kleiner als diese Zahl. Wird aber in Folge der Rechnung ein r einmal kleiner als 1, so bleibt es doch wegen der 2. Bedingung grösser als A, und das weiter folgende r muss wegen der 1. Bedingung kleiner als $\frac{1}{2}\left(A + \frac{1}{A}\right)$ sein. Da die r_λ von einer gewissen Stelle an grösser als A und kleiner als $\frac{1}{2}\left(A + \frac{1}{A}\right)$ bleiben und A beliebig nahe an 1 gewählt werden konnte, so ist

$$\lim r_\lambda = 1.$$

Daher haben die Brüche von der Form

$$\frac{r_\lambda^2 - 1}{r_\lambda^2 + 1}$$

den Grenzwerth 0, und wegen der Gleichung

$$\operatorname{tang} \varphi_{\lambda+1} = \operatorname{tang} \varphi_\lambda \cdot \frac{r_\lambda^2 - 1}{r_\lambda^2 + 1}$$

ist

$$\lim \varphi_\lambda = 0.$$

Damit ist bewiesen, dass die Reihe der x dem Grenzwerth $+1$ zustrebt.

Ist der reale Theil von x negativ, so multiplicire man alle Gleichungen des Algorithmus mit -1 und betrachte die Reihe der $(-x)$. Diese hat nach dem Vorhergehenden den Grenzwerth 1, also hat die Reihe der x den Grenzwerth -1.

Der allgemeine Fall, dargestellt durch die Gleichungen

$$x_{\lambda+1} = \frac{1}{2} x_\lambda + \frac{a}{2x_\lambda}$$

wird durch die Substitution

$$x_\lambda = \xi_\lambda \cdot \sqrt{a},$$

wobei $\sqrt{a} = \sqrt{\alpha} \cdot e^{\frac{i\omega}{2}}$ sein soll, auf den im Vorhergehenden betrachteten besonderen Fall zurückgeführt, denn es entstehen nach Division durch $\sqrt{a}$ die Gleichungen

$$\xi_{\lambda+1} = \frac{1}{2}\left(\xi_\lambda + \frac{1}{\xi_\lambda}\right),$$

und da nun

$$\lim \xi = \pm 1$$

ist, so ist der Grenzwerth der x in der einen Halbebene gleich $\sqrt{a}$, in der andern gleich $-\sqrt{a}$, während auf der trennenden Geraden keine Convergenz stattfindet.

Ich will zum Schluss nur noch kurz nachweisen, dass ein ähnliches Verhalten nicht mehr stattfinden kann, sobald n grösser als 2 ist. Die Strahlen, welche die Winkel der benachbarten n^{ten} Wurzeln aus a halbiren, theilen die Ebene in n Winkelräume ein. Zwei aufeinander folgende Werthe von x brauchen jetzt nicht mehr, wie bei $n = 2$, in demselben Winkelraum zu liegen. Die zwischen ihnen bestehende Gleichung

$$x_1 = \frac{n-1}{n} x + \frac{a}{n x^{n-1}}$$

ist nämlich für x vom n^{ten} Grade und hat demnach n Wurzeln. Ist $x_1 = 0$, so ist

$$x = \sqrt[n]{-\frac{a}{n-1}}.$$

Diese n Werthe liegen auf den n vorhin genannten Strahlen. Da nun x eine stetige Function von x_1 ist, so müssen die n Werthe von x, falls x_1 unendlich klein wird, in beliebige Nähe der n Werthe von $\sqrt[n]{-\frac{a}{n-1}}$ rücken; es können also höchstens zwei mit x_1 in demselben Winkelraum liegen, die übrigen $n-2$ Werthe müssen in anderen Winkelräumen sich befinden.

Mainz, im April 1894.

Ueber den Dirichlet'schen biquadratischen Zahlkörper.

Von

David Hilbert in Königsberg i. Pr.

Inhalt.

Einleitung.

Nachdem durch Gauss die ganzen imaginären Zahlen in die Arithmetik eingeführt waren, untersuchte Dirichlet in einer Reihe von Abhandlungen*) denjenigen biquadratischen Zahlkörper, welcher die imaginäre Einheit i und mithin alle jene Gauss'schen imaginären Zahlen enthält. Dieser biquadratische Körper werde der Dirichlet'sche Zahlkörper genannt. Dirichlet hat auf denselben seine allgemeine analytische Methode zur Bestimmung der Anzahl der Idealclassen angewandt und insbesondere den Fall in Betracht gezogen, in welchem der biquadratische Zahlkörper ausser dem durch i bestimmten quadratischen Körper noch zwei andere quadratische Körper enthält. Es ergiebt sich dann das Resultat, dass die Anzahl der Idealclassen dieses speciellen Dirichlet'schen Zahlkörpers im wesentlichen gleich dem Product der Anzahl der Idealclassen in den beiden letzteren quadratischen Körpern

*) Untersuchungen über die Theorie der complexen Zahlen; Recherches sur les formes quadratiques à coefficients et à indéterminées complexes. Werke, Bd. 1, S. 505, 511, 533.

ist. Diesen mit analytischen Hilfsmitteln gewonnenen rein arithmetischen Satz bezeichnet Dirichlet als einen der schönsten in der Theorie der imaginären Zahlen, vornehmlich weil durch denselben ein Zusammenhang zwischen den Anzahlen der Idealclassen derjenigen beiden quadratischen Körper aufgedeckt wird, die durch Quadratwurzeln aus entgegengesetzten reellen Zahlen bestimmt sind.

Die vorliegende Abhandlung hat das Ziel, die Theorie des Dirichlet'schen biquadratischen Körpers auf rein arithmetischem Wege bis zu demjenigen Standpunkt zu fördern, auf welchem sich die Theorie der quadratischen Körper bereits seit Gauss befindet. Es ist hierzu vor Allem die Einführung des Geschlechtsbegriffs sowie eine Untersuchung derjenigen Eintheilung aller Idealclassen nothwendig, welche sich auf den Geschlechtsbegriff gründet. Nachdem in den ersten acht Paragraphen der Arbeit diese Aufgabe für den allgemeinen Dirichlet'schen Zahlkörper gelöst wird, behandeln die beiden letzten Paragraphen den vorhin charakterisirten speciellen Dirichlet'schen Zahlkörper. Es zeigt sich bei der Untersuchung, dass in diesem Körper die Idealclassen gewisser leicht zu kennzeichnender Geschlechter aus den Idealclassen der in ihm enthaltenen quadratischen Körper zusammensetzbar sind. Diese auf rein arithmetischem Wege gefundene Thatsache enthält zugleich den vorhin genannten Dirichlet'schen Satz über die Anzahl der Idealclassen des speciellen Dirichlet'schen Körpers.

§ 1.

Die ganzen Zahlen des Dirichlet'schen Zahlkörpers.

Der durch die imaginäre Einheit i bestimmte quadratische Zahlkörper werde k genannt; die ganzen Zahlen dieses Körpers, d. h. die Zahlen von der Form $a+bi$, wo a und b ganze rationale Zahlen sind, mögen ganze imaginäre Zahlen heissen. Bedeutet δ eine ganze imaginäre Zahl, welche durch kein Quadrat einer ganzen imaginären Zahl theilbar und von ± 1 verschieden ist, so bildet die Gesammtheit aller durch i und $\sqrt{\delta}$ rational ausdrückbaren Zahlen einen Dirichlet'schen biquadratischen Zahlkörper. Derselbe werde mit K bezeichnet; K ist der allgemeinste biquadratische Körper, welcher die imaginäre Einheit i enthält.

Eine jede Zahl des Körpers K lässt sich in die Gestalt

$$\mathsf{A} = \frac{\alpha + \beta\sqrt{\delta}}{\gamma}$$

bringen, wo α, β, γ ganze imaginäre Zahlen sind. Die Veränderung von $\sqrt{\delta}$ in $-\sqrt{\delta}$ werde durch das Operationssymbol S bezeichnet.

Soll nun A eine ganze Zahl in K sein, so sind nothwendig die Zahlen

$$\mathsf{A} + S\mathsf{A} = \frac{2\alpha}{\gamma} \quad \text{und} \quad \mathsf{A} - S\mathsf{A} = \frac{2\beta\sqrt{\delta}}{\gamma}$$

ganze imaginäre Zahlen. Bezeichnet λ eine in γ aufgehende von $1+i$ verschiedene Primzahl in k, so folgt leicht, dass sowohl α als β durch λ theilbar sein müssen, und es kann mithin λ in Zähler und Nenner von A fortgehoben werden. Wäre ferner γ durch $(1+i)^3$ theilbar, so folgt in gleicher Weise, dass α und β durch $1+i$ theilbar sind, so dass der Factor $1+i$ in Zähler und Nenner von A hebbar ist. Es bleiben mithin nur die beiden Fälle $\gamma = 1+i$ und $\gamma = 2$ zu untersuchen übrig. Da das Product $\mathsf{A}\,.S\mathsf{A}$ nothwendig eine ganze imaginäre Zahl ist, so folgt, dass in diesen beiden Fällen die Zahl $\alpha^2 - \beta^2\delta$ durch 2 bezüglich durch 4 theilbar sein muss. Wäre β durch $1+i$ theilbar, so würde mithin das Gleiche für α folgen und dann wäre wiederum $1+i$ im Zähler und Nenner von A hebbar. Nehmen wir andrerseits β nicht theilbar durch $1+i$ an, so folgt, dass $\delta \equiv \frac{\alpha^2}{\beta^2}$ nach 2 bezüglich nach 4 ist, d. h. δ muss im Zahlengebiete des Körpers k quadratischer Rest von 2 bezüglich von 4 sein. Nun ist δ quadratischer Rest von 4, sobald $\delta \equiv \pm 1$ nach 4 wird, dagegen quadratischer Rest von 2 und zugleich quadratischer Nichtrest von 4, falls $\delta \equiv \pm 3 + 2i$ nach 4 wird. In allen anderen Fällen, nämlich für $\delta \equiv i$ nach 2 und $\delta \equiv 0$ nach $1+i$ ist δ quadratischer Nichtrest von 2. Berücksichtigen wir, dass der nämliche biquadratische Körper K erhalten wird, wenn wir unter dem Wurzelzeichen statt δ die Zahl $-\delta$ setzen, da ja diese Aenderung einer Multiplication der Wurzel mit i gleichkommt, so können wir offenbar die Zahl δ stets so annehmen, dass beidemal das obere Vorzeichen zutrifft d. h. $\delta \equiv 1$ bezüglich $\equiv 3 + 2i$ nach 4 wird. Es ergiebt sich dann leicht das folgende Resultat:

Die Basis der ganzen Zahlen des Dirichlet'schen Körpers K besteht aus den Zahlen $1,\ i,\ \Omega,\ i\Omega$, *wo* Ω *folgende Bedeutung hat:*

für $\delta \equiv 1$	(4) *ist:*	$\Omega = \frac{1+\sqrt{\delta}}{2}$,
„ $\delta \equiv 3 + 2i$	(4) „	$\Omega = \frac{1+\sqrt{\delta}}{1+i}$,
„ $\delta \equiv i$	(2) „	$\Omega = 1 + \sqrt{\delta}$,
„ $\delta \equiv 0$	$(1+i)$ „	$\Omega = \sqrt{\delta}$.

Wir berechnen ferner den Ausdruck $d = (\Omega - S\Omega)^2$; *derselbe werde die Partialdiscriminante des Körpers K genannt:*

$$
\begin{array}{llll}
\textit{für} & \delta \equiv 1 & (4) & \textit{ist:}\quad d = \quad \delta, \\
\text{„} & \delta \equiv 3+2i & (4) & \text{„}\quad d = -2i\delta, \\
\text{„} & \delta \equiv i & \left.\begin{array}{r}(2)\\(1+i)\end{array}\right\} & \text{„}\quad d = \quad 4\delta. \\
\text{„} & \delta \equiv 0 & &
\end{array}
$$

Die gewöhnliche Discriminante D des biquadratischen Körpers K ergiebt sich gleich $2^4|d|^2$, wo $|d|$ den absoluten Betrag der Partialdiscriminante d bedeutet.

§ 2.

Die Primideale des Dirichlet'schen Körpers.

Zunächst behandeln wir die von $1+i$ verschiedenen und nicht in δ aufgehenden Primzahlen des Körpers k; es sind unter diesen zwei Arten zu unterscheiden, nämlich erstens: die Primzahlen π, in Bezug auf welche δ im Zahlengebiete des Körpers K quadratischer Rest ist und zweitens diejenigen Primzahlen $\varkappa$, in Bezug auf welche δ quadratischer Nichtrest ist.

Die Primzahlen π der ersten Art gestatten eine Zerlegung in zwei von einander verschiedene Primideale des Körpers K. Bedeutet nämlich η eine Zahl in k, welche der Congruenz $\delta \equiv \eta^2$ nach dem Modul π genügt und wendet man eine früher von mir angegebene Bezeichnungsweise*) an, der zu Folge $(\mathsf{A}, \mathsf{B}, \ldots)$ dasjenige Ideal darstellt, welches als der grösste gemeinsame Theiler der Zahlen $\mathsf{A}, \mathsf{B}, \ldots$ definirt ist, so wird

$$
\begin{aligned}
(\pi, \eta+\sqrt{\delta})(\pi, \eta-\sqrt{\delta}) &= (\pi^2, \pi[\eta+\sqrt{\delta}], \pi[\eta-\sqrt{\delta}], \eta^2-\delta) \\
&= (\pi, \eta^2-\delta) = \pi.
\end{aligned}
$$

Wir erhalten somit die gewünschte Zerlegung

$$
\pi = \mathfrak{P} \cdot S\mathfrak{P}, \qquad \mathfrak{P} = (\pi, \eta+\sqrt{\delta}),
$$

wo $\mathfrak{P}$ ein Primideal bedeutet und das conjugirte Primideal $S\mathfrak{P}$ wegen $(\pi, \eta+\sqrt{\delta}, \eta-\sqrt{\delta}) = 1$ nothwendig von $\mathfrak{P}$ verschieden ist.

Die Primzahlen $\varkappa$ der zweiten Art sind auch im Körper K Primzahlen. Denn wäre die Zahl $\varkappa$ zerlegbar, so wähle man in K eine ganze Zahl $\mathsf{A} = \alpha + \beta\sqrt{\delta}$, welche nicht durch $\varkappa$, wohl aber durch ein in $\varkappa$ aufgehendes Primideal theilbar ist. Da dann β nothwendig prim zu $\varkappa$ sein muss, dagegen $\mathsf{A} \cdot S\mathsf{A} = \alpha^2 - \beta^2\delta$ durch $\varkappa$ theilbar wird, so würde $\delta \equiv \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2$ nach $\varkappa$ folgen, was der Voraussetzung zuwider läuft.

---

*) Math. Ann. Bd. 44, S. 1.

Um ferner die von $1+i$ verschiedenen in δ aufgehenden Primzahlen des Körpers K in ihre idealen Factoren zu zerlegen, bezeichnen wir dieselben mit $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ und setzen demgemäss $\delta = \lambda_1 \ldots \lambda_r$ bezüglich $\delta = (1+i)\lambda_1, \ldots, \lambda_r$, je nachdem δ durch $1+i$ nicht theilbar oder theilbar ist. Es folgt leicht, dass

$$\mathfrak{L}_1 = S\mathfrak{L}_1 = (\lambda_1, \sqrt{\delta}), \ldots, \mathfrak{L} = S\mathfrak{L}_r = (\lambda_r, \sqrt{\delta})$$

Primideale im Körper K sind und dass

$$\lambda_1 = \mathfrak{L}_1^2, \ldots, \lambda_r = \mathfrak{L}_r^2$$

wird.

Was endlich die Zerlegung der Zahl $1+i$ betrifft, so untersuchen wir zunächst den Fall $\delta \equiv 1$ nach 4 und finden, dass $1+i$ unzerlegbar ist, falls $\delta \equiv 1+4i$ nach $(1+i)^5$ ausfällt. Ist dagegen $\delta \equiv 1$ nach $(1+i)^5$, so wird

$$1+i = (1+i, \Omega)(1+i, S\Omega),$$

wo die beiden Klammern rechter Hand Primideale des Körpers K darstellen, welche wegen $(\Omega, S\Omega) = 1$ nothwendig von einander verschieden sind. In allen anderen Fällen ist δ das Quadrat des Ideals $(1+i, \Omega) = (1+i, S\Omega)$, wie eine leichte Rechnung zeigt. Wir erkennen somit, dass $1+i$ dann und nur dann das Quadrat eines Primideals wird, wenn $1+i$ in der Partialdiscriminante d des Körpers K aufgeht. Die Zerlegung der Zahl $1+i$ ist in folgender Tabelle dargestellt:

$$\begin{array}{llll}
\text{für } \delta \equiv 1 & (1+i)^5 & \text{ist} & 1+i = \mathfrak{P}.S\mathfrak{P}, \\
 & & & \mathfrak{P} = (1+i, \Omega),\ S\mathfrak{P} \neq \mathfrak{P}, \\
\text{„}\ \delta \equiv 1+4i & (1+i)^5 & \text{„} & 1+i = \mathfrak{P}, \\
\text{„}\ \delta \equiv 3+2i & \left.\begin{array}{r}(4)\\(2)\\(1+i)\end{array}\right\} & \text{„} & \begin{array}{l}1+i = \mathfrak{L}^2, \\ \mathfrak{L} = S\mathfrak{L} = (1+i, \Omega).\end{array} \\
\text{„}\ \delta \equiv i & & & \\
\text{„}\ \delta \equiv 0 & & &
\end{array}$$

Die gewonnenen Resultate der Zerlegung der Zahlen in k lassen sich übersichtlich zusammenfassen, wenn wir uns eines auch von Dirichlet benutzten Symbols bedienen. Ist nämlich α eine beliebige Zahl und τ eine Primzahl in k, so verstehen wir unter $\left[\frac{\alpha}{\tau}\right]$ die Werthe $+1$, -1 oder 0, je nachdem α im Zahlengebiete des Körpers k quadratischer Rest oder quadratischer Nichtrest von τ oder durch τ theilbar ist; doch bedeute insbesondere $\left[\frac{\alpha}{1+i}\right]$ die Werthe $+1, -1, 0$, je nachdem α quadratischer Rest oder Nichtrest von $(1+i)^5$ oder durch $1+i$ theilbar ist. Es gilt dann der Satz:

Die Primzahl $\mathfrak{r}$ des Körpers k ist im Körper K in zwei verschiedene Primideale zerlegbar oder unzerlegbar oder gleich dem Quadrat eines Primideals, je nachdem $\left[\frac{d}{\mathfrak{r}}\right] = +1, = -1$ *oder* $= 0$ *ist.*

§ 3.

Die Eintheilung der Idealclassen in Geschlechter.

Wenn A eine beliebige ganze oder gebrochene Zahl des Körpers K ist, so wird $\nu(\mathsf{A}) = \mathsf{A} \cdot S\mathsf{A}$ die *Partialnorm* von A genannt. Diese Partialnorm ist offenbar eine Zahl im Körper k. Bedeutet nun λ eine von $1+i$ verschiedene in δ aufgehende Primzahl des Körpers k und ist die Partialnorm $\nu(\mathsf{A})$ eine durch λ nicht theilbare ganze Zahl oder eine gebrochene Zahl, deren Zähler und Nenner durch λ nicht theilbar sind, so wird $\nu(\mathsf{A})$ im Gebiet der ganzen imaginären Zahlen ein quadratischer Rest in Bezug auf λ.

Um dies zu erkennen, setzen wir $\mathsf{A} = \frac{\alpha + \beta \sqrt{\delta}}{\gamma}$, wo α, β, γ ganze imaginäre Zahlen sind. Dann ist $\nu(\mathsf{A}) = \frac{\alpha^2 - \beta^2 \delta}{\gamma^2}$. Enthielte nun γ den Primfactor λ, so müsste wegen der über $\nu(\mathsf{A})$ gemachten Voraussetzung auch $\alpha^2 - \beta^2\delta$ durch λ^2 theilbar sein und folglich enthielten sowohl α wie β den Factor λ; derselbe ist mithin in Zähler und Nenner des Bruches A hebbar. Hätte andererseits α den Factor λ, so müssen wegen der über $\nu(\mathsf{A})$ gemachten Voraussetzung nothwendig auch γ und β durch λ theilbar sein, und dann ist wiederum der Factor λ in Zähler und Nenner des Bruches A hebbar. Wir können daher annehmen, dass keine der beiden Zahlen α und γ den Factor λ enthält. Dann aber folgt $\nu(\mathsf{A}) \equiv \frac{\alpha^2}{\gamma^2}$ nach λ, womit die Behauptung bewiesen worden ist.

Wir führen jetzt das neue Symbol $\left[\frac{\sigma}{\lambda : \delta}\right]$ ein, wo σ eine beliebige Zahl in k und λ zunächst eine von $1+i$ verschiedene in δ aufgehende Primzahl bedeutet. Für den Fall, dass $\sigma = \alpha$ eine durch λ nicht theilbare ganze Zahl oder ein Bruch ist, dessen Zähler und Nenner durch λ nicht theilbar sind, wird das Symbol durch die Gleichung

$$\left[\frac{\alpha}{\lambda : \delta}\right] = \left[\frac{\alpha}{\lambda}\right]$$

definirt. Ist ferner $\sigma = \nu$ die Partialnorm einer beliebigen Zahl in K, so möge

$$\left[\frac{\nu}{\lambda : \delta}\right] = +1$$

sein. Der zu Anfang dieses Paragraphen bewiesene Satz zeigt, dass diese letztere Festsetzung mit der erst getroffenen Definition vereinbar ist.

Ferner benutzen wir die Thatsache, dass eine jede Zahl σ in k gleich dem Product zweier Zahlen α und ν gesetzt werden kann, wo α eine ganze nicht durch λ theilbare Zahl in k oder ein Bruch ist, dessen Zähler und Nenner nicht durch λ theilbar sind, und wo ν die Partialnorm einer Zahl in K ist. Um diese Thatsache zu beweisen, ist es offenbar nur nöthig, jene Zerlegung für die Primzahl λ auszuführen. Zu dem Zweck wählen wir in K eine durch $\mathfrak{L}$, aber nicht durch $\lambda = \mathfrak{L}^2$ theilbare Zahl A, setzen $\nu = \nu(\mathsf{A})$ und berücksichtigen dann, dass $\frac{\lambda}{\nu} = \alpha$ in die Gestalt eines Bruches gebracht werden kann, dessen Zähler gleich 1 ist und dessen Nenner eine nicht durch λ theilbare Zahl ist. Es folgt somit die gewünschte Zerlegung $\lambda = \alpha\nu$.

Ist die beliebige Zahl $\sigma = \alpha\nu$ auf die beschriebene Weise zerlegt, so definiren wir das allgemeine Symbol durch die Gleichung

$$\left[\frac{\sigma}{\lambda : \delta}\right] = \left[\frac{\alpha}{\lambda}\right]$$

und erkennen ohne Schwierigkeit, dass dieses Symbol dadurch eindeutig bestimmt ist und die Eigenschaft

$$\left[\frac{\sigma\sigma'}{\lambda : \delta}\right] = \left[\frac{\sigma}{\lambda : \delta}\right]\left[\frac{\sigma'}{\lambda : \delta}\right]$$

besitzt, wo σ, σ' beliebige Zahlen des Körpers k sind.

In den Fällen, in welchen $1+i$ in d aufgeht, bedarf es einer genaueren Untersuchung über das Verhalten der Partialnormen und ihrer Reste nach den Potenzen von $1+i$. Um eine übersichtliche Darstellung der in Betracht kommenden Restsysteme zu erhalten, setzen wir

$$i' = 3 + 2i, \quad i'' = 1 + 4i$$

und zeigen dann durch eine leichte Rechnung, dass, wenn t, t', t'' die Werthe 0 oder 1 annehmen, in der Form $\pm i'^{t} i''^{t'}$ sämmtliche 8 zu $1+i$ primen Reste nach $(1+i)^4$ und in der Form $\pm i^{t} i'^{t'} i''^{t''}$ sämmtliche 16 zu $1+i$ primen Reste nach $(1+i)^5$ enthalten sind. Wir bezeichnen der Kürze halber die beiden genannten Ausdrücke mit (tt') bezüglich $(tt't'')$.

Da im Falle $\delta \equiv (00)$ nach $(1+i)^4$ die Partialdiscriminante d nicht durch $1+i$ theilbar ist, so untersuchen wir lediglich die 7 Fälle $\delta \equiv (01), (10), (11)$ nach $(1+i)^4$ und $\equiv (1+i)(00), (1+i)(01), (1+i)(10), (1+i)(11)$ nach $(1+i)^5$. Die Rechnung zeigt, dass nur diejenigen zu $1+i$ primen Reste von $(1+i)^5$ unter den Partialnormen der Zahlen des Körpers K vertreten sind, welche in der folgenden Tabelle unter der Rubrik α verzeichnet stehen und deren Exponenten t, t', t'' den in der letzten Rubrik angegebenen Bedingungen genügen:

$\delta \equiv$	$\alpha \equiv$	
(01)	(000), (001), (010), (011)	t gerade
(10)	(000), (001), (100), (101)	t' „
(11)	(000), (001), (110), (111)	$t+t'$ „
$(1+i)$ (00)	(000), (011), (100), (111)	$t'+t''$ „
$(1+i)$ (01)	(000), (011), (101), (110)	$t+t'+t''$ „
$(1+i)$ (10)	(000), (010), (100), (110)	t'' „
$(1+i)$ (11)	(000), (010), (101), (111)	$t+t''$ „

Um die Angaben dieser Tabelle übersichtlich zusammenzufassen, setzen wir $\delta \equiv (t_\delta\, t'_\delta)$ bezüglich $\equiv (1+i)(t_\delta\, t'_\delta)$ und $\alpha \equiv (t_\alpha\, t'_\alpha\, t''_\alpha)$; es bestätigt sich dann leicht, dass die Zahl α dann und nur dann nach $(1+i)^5$ einer Partialnorm congruent ist, sobald die Zahl $t_\alpha\, t'_\delta + t'_\alpha\, t_\delta$ bezüglich $t_\alpha\, t'_\delta + t'_\alpha\, t_\delta + t'_\alpha + t''_\alpha$ gerade ist. Bemerkt sei noch, dass die Zahl α, wenn sie dieser Bedingung genügt, zugleich auch nach jeder höheren Potenz von $1+i$ der Partialnorm einer Zahl in K congruent sein muss.

Wir definiren nun das Symbol $\left[\frac{\sigma}{1+i:\delta}\right]$ zunächst für den Fall, dass $\sigma = \alpha$ eine durch $1+i$ nicht theilbare Zahl oder ein Bruch ist, dessen Zähler und Nenner durch $1+i$ nicht theilbar sind. In diesem Falle nehmen wir $\alpha \equiv (t_\alpha t'_\alpha t''_\alpha)$ an und setzen

$$\left[\frac{\alpha}{1+i:\delta}\right] = (-1)^{t_\alpha t'_\delta + t'_\alpha t_\delta} \quad \text{bezüglich} \quad = (-1)^{t_\alpha t'_\delta + t'_\alpha t_\delta + t'_\alpha + t''_\alpha},$$

je nachdem $\delta \equiv (t_\delta\, t'_\delta)$ nach $(1+i)^4$ oder $\equiv (1+i)\,(t_\delta\, t'_\delta)$ nach $(1+i)^5$ wird. Ist ferner $\sigma = \nu$ die Partialnorm einer beliebigen Zahl des Körpers K, so setzen wir

$$\left[\frac{\nu}{1+i:\delta}\right] = +1.$$

Um endlich für ein beliebiges σ das Symbol zu definiren, benutzen wir die Zerlegung $\sigma = \alpha\nu$, wo α eine nicht durch $1+i$ theilbare Zahl oder ein Bruch ist, dessen Zähler und Nenner durch $1+i$ nicht theilbar sind, und wo ν eine Partialnorm ist und setzen

$$\left[\frac{\sigma}{1+i:\delta}\right] = \left[\frac{\alpha}{1+i:\delta}\right].$$

Wir erkennen wiederum leicht, dass dem soeben definirten Symbol die Eigenschaft

$$\left[\frac{\sigma\sigma'}{1+i:\delta}\right]=\left[\frac{\sigma}{1+i:\delta}\right]\left[\frac{\sigma'}{1+i:\delta}\right]$$

zukommt, wo σ, σ' beliebige Zahlen des Körpers K sind.

Im Folgenden werden die sämmtlichen s in der Partialdiscriminante d aufgehenden Primzahlen mit $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ bezeichnet. Unser Symbol ordnet dann einer jeden beliebigen Zahl σ des Körpers k die s Vorzeichen

$$\left[\frac{\sigma}{\lambda_1:\delta}\right], \ldots, \left[\frac{\sigma}{\lambda_s:\delta}\right]$$

zu, welche *das Charakterensystem der Zahl* σ im Dirichlet'schen Körper K heissen mögen. Um ferner vermittelst unseres Symbols einem jeden Ideal $\mathfrak{J}$ in K ein bestimmtes Vorzeichensystem zuzuordnen, bilden wir $\mathfrak{J}\,.\,S\mathfrak{J}$. Dieses Product ist gleich einer Zahl $\nu(\mathfrak{J})$ in k; dieselbe werde *die Partialnorm des Ideals* $\mathfrak{J}$ genannt. Da diese Partialnorm nur bis auf hinzutretende Einheitsfactoren bestimmt ist, so bedarf es für unseren Zweck der Unterscheidung zweier Fälle, je nachdem das Charakterensystem des Einheitsfactors i

$$\left[\frac{i}{\lambda_1:\delta}\right], \ldots, \left[\frac{i}{\lambda_s:\delta}\right]$$

aus lauter positiven Vorzeichen besteht oder ein negatives Vorzeichen enthält. *Im ersteren Falle sind offenbar die s Vorzeichen*

$$\left[\frac{\nu(\mathfrak{J})}{\lambda_1:\delta}\right], \ldots, \left[\frac{\nu(\mathfrak{J})}{\lambda_s:\delta}\right]$$

für das Ideal $\mathfrak{J}$ *sämmtlich eindeutig bestimmt. Das System dieser s Vorzeichen werde das Charakterensystem des Ideals* $\mathfrak{J}$ *genannt. Im zweiten Falle* nehmen wir an, es sei etwa $\left[\frac{i}{\lambda_s:\delta}\right]=-1$; wählen wir dann den Werth der Partialnorm $\nu(\mathfrak{J})$ derart, dass $\left[\frac{\nu(\mathfrak{J})}{\lambda_s:\delta}\right]=+1$ wird, *so sind die* $s-1$ *Vorzeichen*

$$\left[\frac{\nu(\mathfrak{J})}{\lambda_1:\delta}\right], \ldots, \left[\frac{\nu(\mathfrak{J})}{\lambda_{s-1}:\delta}\right]$$

sämmtlich durch $\mathfrak{J}$ *eindeutig bestimmt und heissen das Charakterensystem des Ideals* $\mathfrak{J}$.

Die Ideale derselben Classe besitzen nothwendig das gleiche Charakterensystem.

Ist nämlich $\mathfrak{J}'$ mit $\mathfrak{J}$ äquivalent, so giebt es in K eine ganze oder gebrochene Zahl A derart, dass $\mathfrak{J}'=\mathsf{A}\mathfrak{J}$ ist. Hieraus folgt $\nu(\mathfrak{J}')=\nu(\mathsf{A})\,\nu(\mathfrak{J})$ und daher wird $\left[\frac{\nu(\mathfrak{J}')}{\lambda:\delta}\right]=\left[\frac{\nu(\mathfrak{J})}{\lambda:\delta}\right]$.

Auf die dargelegte Weise ist einer jeden Idealclasse ein bestimmtes Charakterensystem zugeordnet. *Wir rechnen nun alle diejenigen Ideal-*

classen, welche das gleiche Charakterensystem besitzen, in ein Geschlecht und definiren insbesondere das Hauptgeschlecht als die Gesammtheit aller derjenigen Classen, deren Charakterensystem aus lauter positiven Vorzeichen besteht. Da das Charakterensystem der Hauptclasse offenbar von der letzteren Eigenschaft ist, so gehört die Hauptclasse stets zum Hauptgeschlecht.

§ 4.

Die Erzeugung der Idealclassen des Hauptgeschlechtes.

Aus derjenigen Eigenschaft des Symbols, welche sich durch die Formel

$$\left[\frac{\sigma\sigma'}{\lambda:\delta}\right]=\left[\frac{\sigma}{\lambda:\delta}\right]\left[\frac{\sigma'}{\lambda:\delta}\right]$$

ausdrückt, entnehmen wir leicht die Thatsache, dass das Product der Idealclassen zweier Geschlechter die Idealclassen eines Geschlechtes liefert, dessen Charakterensystem durch Multiplication der entsprechenden Charaktere beider Geschlechter erhalten wird. Im besonderen folgt hieraus, dass das Charakterensystem des Quadrates der Idealclasse eines beliebigen Geschlechtes stets aus lauter positiven Einheiten besteht und mithin das Quadrat einer Idealclasse stets dem Hauptgeschlecht angehört. Es ist von Bedeutung, dass die folgende Umkehrung dieses Satzes gilt:

Eine jede Idealclasse des Hauptgeschlechtes ist gleich dem Quadrat einer Idealclasse.

Um die Richtigkeit dieses Satzes zu erkennen, beweisen wir der Reihe nach folgende Sätze.

Satz 1. *Wenn ν in dem durch $\sqrt{\delta}$ bestimmten Dirichlet'schen Körper K_δ die Partialnorm eines Ideals ist und das Charakterensystem von ν in diesem Körper K_δ aus lauter positiven Einheiten besteht, so ist auch δ in dem durch $\sqrt{\nu}$ bestimmten Dirichlet'schen Körper K_ν Partialnorm eines Ideals und besitzt in K_ν ein aus lauter positiven Einheiten bestehendes Charakterensystem.*

Wir dürfen offenbar annehmen, dass ν keine quadratischen Factoren des Körpers k enthält. Da ν eine Partialnorm sein soll, so muss ein jeder in der Partialdiscriminante d des Körpers K_δ nicht vorkommender Primtheiler π der Zahl ν in zwei Primideale des Körpers K_δ zerfallen; es ist somit nach den Entwicklungen von § 2 nothwendigerweise d quadratischer Rest von π, d. h. wenn π von $1+i$ verschieden ist:

$$\left[\frac{\delta}{\pi:\nu}\right]=+1.$$

Wir betrachten ferner die von $1+i$ verschiedenen in d auf-

gehenden Primtheiler λ der Zahl ν. Es gilt im Körper K_δ die Zerlegung $\lambda = \mathfrak{L}^2$ und zugleich ist $\lambda + \sqrt{\delta}$ eine durch $\mathfrak{L}$ aber nicht durch λ theilbare Zahl des Körpers K_δ. Daher ist, wenn $\nu = \lambda\nu'$, $\delta = \lambda\delta'$ gesetzt wird:

$$\left[\frac{\nu}{\lambda:\delta}\right] = \left[\frac{\nu\cdot\nu\left(\frac{1}{\lambda+\sqrt{\delta}}\right)}{\lambda:\delta}\right] = \left[\frac{\frac{\nu}{\lambda^2-\delta}}{\lambda:\delta}\right] = \left[\frac{\frac{\nu'}{\lambda-\delta'}}{\lambda}\right] = \left[\frac{\nu'\delta'}{\lambda}\right].$$

In gleicher Weise folgt

$$\left[\frac{\delta}{\lambda:\nu}\right] = \left[\frac{\nu'\delta'}{\lambda}\right],$$

und da das Symbol $\left[\frac{\nu}{\lambda:\delta}\right]$ nach Voraussetzung den Werth $+1$ hat, so ist auch

$$\left[\frac{\delta}{\lambda:\nu}\right] = +1.$$

Was endlich den Primfactor $1+i$ betrifft, so unterscheiden wir bei der folgenden Untersuchung zunächst 4 Hauptfälle:

I. Weder ν noch δ sind durch $1+i$ theilbar.

II. ν ist durch $1+i$ theilbar, aber nicht δ.

III. ν ist nicht durch $1+i$ theilbar, wohl aber δ.

IV. Sowohl ν als auch δ sind durch $1+i$ theilbar.

Im Hauptfalle I setzen wir $\nu \equiv (t_\nu t'_\nu)$ und $\delta \equiv (t_\delta t'_\delta)$ nach $(1+i)^4$ und unterscheiden dann 2 Unterfälle:

1. t_ν, t'_ν sind beide gerade. Unter dieser Bedingung kommt $1+i$ nicht in der Partialdiscriminante n des Dirichlet'schen Körpers K_ν vor und es giebt daher im Körper K_ν kein auf den Factor $1+i$ bezügliches Symbol.

2. t_ν, t'_ν sind nicht beide gleichzeitig gerade. Unter dieser Bedingung kommt $1+i$ in n vor und es ist

$$\left[\frac{\delta}{1+i:\nu}\right] = (-1)^{t_\delta t'_\nu + t'_\delta t_\nu}.$$

Sind t_δ, t'_δ beide gerade, so wird der Werth der rechten Seite $= +1$. Sind t_δ, t'_δ nicht beide zugleich gerade, so giebt es im Körper K_δ ein auf $1+i$ bezügliches Symbol und zwar ist

$$\left[\frac{\nu}{1+i:\delta}\right] = (-1)^{t_\nu t'_\delta + t'_\nu t_\delta}.$$

Da dieses Symbol wegen der Voraussetzung den Werth $+1$ hat, so ist auch

$$\left[\frac{\delta}{1+i:\nu}\right] = +1.$$

Im Hauptfalle II setzen wir $\nu \equiv (1+i)(t_\nu t'_\nu)$ und $\delta \equiv (t_\delta t'_\delta t''_\delta)$ nach $(1+i)^5$ und unterscheiden dann folgende 2 Unterfälle.

1. t_δ, t_δ' sind gerade. Unter dieser Bedingung kommt $1+i$ nicht in der Partialdiscriminante d des Körpers K_δ vor. Da nun ν die Partialnorm eines Ideals in K_δ sein soll, so ist nothwendigerweise $1+i$ in 2 Primideale des Körpers K_δ zerlegbar. Die Bedingung hierfür besteht nach § 2 darin, dass $\delta \equiv (0\,0\,0)$ nach $(1+i)^5$ ist und mithin wird

$$\left[\frac{\delta}{1+i:\nu}\right] = +1.$$

2. t_δ, t_δ' sind nicht beide gleichzeitig gerade. Es ist dann $1+i$ Factor der Partialdiscriminante d. Setzen wir $\omega = \frac{\Omega\,.\,S\Omega}{1+i}$, so wird

$$\left[\frac{\nu}{1+i:\delta}\right] = \left[\frac{\nu\cdot\nu\left(\frac{1}{\Omega}\right)}{1+i:\delta}\right] = \left[\frac{(t_\nu\, t_\nu')\,\omega}{1+i:\delta}\right] = \left[\frac{(t_\nu\, t_\nu')}{1+i:\delta}\right]\left[\frac{\omega}{1+i:\delta}\right];$$

nun ist

$$\left[\frac{(t_\nu\, t_\nu')}{1+i:\delta}\right] = (-1)^{t_\nu t_\delta' + t_\nu' t_\delta},$$

und eine leichte Rechnung zeigt, dass

$$\left[\frac{\omega}{1+i:\delta}\right] = (-1)^{t_\delta' + t_\delta''}$$

wird. Mithin ergiebt sich

$$\left[\frac{\nu}{1+i:\delta}\right] = (-1)^{t_\nu t_\delta' + t_\nu' t_\delta + t_\delta' + t_\delta''}.$$

Andrerseits ist aber

$$\left[\frac{\delta}{1+i:\nu}\right] = (-1)^{t_\delta t_\nu' + t_\delta' t_\nu + t_\delta' + t_\delta''},$$

und wenn daher jenes erstere Symbol den Werth $+1$ hat, so ist auch

$$\left[\frac{\delta}{1+i:\nu}\right] = +1.$$

Im Hauptfall III setzen wir $\nu \equiv (t_\nu\, t_\nu'\, t_\nu'')$ und $\delta \equiv (1+i)\,(t_\delta\, t_\delta')$ nach $(1+i)^5$ und unterscheiden dann wiederum 2 Unterfälle.

1. t_ν, t_ν' sind beide gerade. Unter dieser Bedingung ist $1+i$ in der Partialdiscriminante n des Körpers K_ν nicht enthalten. Wegen der Voraussetzung wird

$$\left[\frac{\nu}{1+i:\delta}\right] = (-1)^{t_\nu''} = +1.$$

Mithin ist t_ν'' gerade, d. h. $\nu \equiv (0\,0\,0)$ nach $(1+i)^5$; hieraus folgt nach § 2, dass $1+i$ im Körper K_ν in zwei Primideale zerlegbar ist.

2. t_ν, t'_ν sind nicht beide gleichzeitig gerade. Es ist dann $1+i$ als Factor in n enthalten und es wird

$$\left[\frac{\nu}{1+i:\delta}\right] = (-1)^{t_\nu t'_\delta + t'_\nu t_\delta + t'_\nu + t''_\nu}.$$

Wie vorhin im Unterfalle 2. des Hauptfalles II erhalten wir den nämlichen Werth für das Symbol $\left[\frac{\delta}{1+i:\nu}\right]$, und da das erstere den Werth $+1$ hat, so ist auch

$$\left[\frac{\delta}{1+i:\nu}\right] = +1.$$

Im Hauptfalle IV setzen wir $\nu \equiv (1+i)\,(t_\nu\, t'_\nu\, t''_\nu)$ und $\delta \equiv (1+i)\,(t_\delta\, t'_\delta\, t''_\delta)$ nach $(1+i)^6$. Es wird dann

$$\left[\frac{\nu}{1+i:\delta}\right] = \left[\frac{\nu\cdot\nu\left(\frac{1}{\sqrt{\delta}}\right)}{1+i:\delta}\right] = \left[\frac{(t_\nu\, t'_\nu\, t''_\nu)\;(t_\delta\, t'_\delta\, t''_\delta)}{1+i:\delta}\right]$$

$$= (-1)^{(t_\nu+t_\delta)\,t'_\delta + (t'_\nu+t'_\delta)\,t_\delta + t'_\nu + t'_\delta + t''_\nu + t''_\delta}$$

$$= (-1)^{t_\nu t'_\delta + t'_\nu t_\delta + t'_\nu + t'_\delta + t''_\nu + t''_\delta}.$$

Denselben Werth erhalten wir auch für $\left[\frac{\delta}{1+i:\nu}\right]$ und da das erstere Symbol den Werth $+1$ hat, so ist auch

$$\left[\frac{\delta}{1+i:\nu}\right] = +1.$$

Die eben vollendete Entwicklung zeigt, dass das Charakterensystem der Zahl δ in dem Körper K_ν aus lauter positiven Einheiten besteht.

Andrerseits ist δ in K_ν nothwendig die Partialnorm eines Ideals; denn wenn λ ein von $1+i$ verschiedener in n nicht aufgehender Primfactor von δ ist, so ist, da alle Charaktere von ν in Bezug auf den Körper $K_\delta = +1$ sein sollen, nothwendigerweise

$$\left[\frac{\nu}{\lambda:\delta}\right] = \left[\frac{\nu}{\lambda}\right] = +1,$$

und daher zerfällt λ nach § 2 in zwei Primideale des Körpers K_ν. Ist ferner $1+i$ in δ, aber nicht in der Partialdiscriminante n des Körpers K_ν als Factor enthalten, so muss $\nu \equiv (0\,0)$ nach $(1+i)^4$ sein, und es ist dann im Unterfalle 1 des Hauptfalles III bewiesen worden, dass $1+i$ im Körper K_ν zerlegbar ist. Da mithin sämmtliche Primfactoren von δ im Körper K_ν zerlegbar sind, so ist δ die Partial-

norm eines Ideals in K_ν und hiermit ist der Satz 1 vollständig bewiesen.

Satz 2. *Wenn ν die Partialnorm einer ganzen oder gebrochenen Zahl in dem durch $\sqrt{\delta}$ bestimmten Dirichlet'schen Zahlkörper K_δ ist, so ist auch δ die Partialnorm einer ganzen oder gebrochenen Zahl in dem durch $\sqrt{\nu}$ bestimmten Dirichlet'schen Zahlkörper K_ν.*

Setzen wir nämlich

$$\nu = \nu(\alpha + \beta\sqrt{\delta}) = \alpha^2 - \beta^2\delta,$$

wo α und β Zahlen des Körpers k sind, so wird

$$\delta = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 - \left(\frac{1}{\beta}\right)^2 \nu,$$

d. h. gleich der Partialnorm der in K_ν gelegenen Zahl $\frac{\alpha+\sqrt{\nu}}{\beta}$.

Satz 3. *Wenn ν Partialnorm eines Ideals in K_δ ist, und das Charakterensystem von ν in K_δ aus lauter positiven Einheiten besteht, so ist ν zugleich die Partialnorm einer gewissen ganzen oder gebrochenen Zahl des Körpers K_δ.*

Wenden wir den von H. Minkowski aufgestellten Satz*) über die Discriminante allgemeiner Zahlkörper auf den biquadratischen Dirichlet'schen Körper K_δ an, so erkennen wir, dass es in jeder Idealclasse des Dirichlet'schen Körpers K_δ ein Ideal $\mathfrak{J}$ giebt, dessen Norm $N(\mathfrak{J})$ absolut genommen kleiner als $\frac{3}{2\pi^2}|\sqrt{D}|$ ausfällt, wo D die Discriminante des Körpers K_δ bedeutet. Da aber $D \leqq 2^8|\delta|^2$ und $\frac{3 \cdot 2^3}{\pi^2} < \sqrt{6}$ ist und da ferner die Norm $N(\mathfrak{J})$ absolut genommen gleich dem Quadrat des absoluten Betrages der Partialnorm $\nu = \nu(\mathfrak{J})$ wird, so ergiebt sich der Satz, dass in jeder Idealclasse des Körpers K_δ ein Ideal $\mathfrak{J}$ gefunden werden kann, für welches $|\nu(\mathfrak{J})|^2 < \sqrt{6}|\delta|$ ausfällt.

Wir beweisen nun zunächst durch Rechnung, dass der Satz 3 in allen Dirichlet'schen Körpern K_δ gilt, für welche $|\delta| < \sqrt{6}$ ist. Benutzen wir die soeben aus dem Minkowski'schen Satze abgeleitete Ungleichung, so wird dieser Nachweis durch folgende Tabelle geführt, in welcher unter der Rubrik δ die sämmtlichen absolut genommen unter $\sqrt{6}$ liegenden Werthe von δ und unter der Rubrik ν die den Bedingungen des Satzes 3 und der Ungleichung $|\nu|^2 < \sqrt{6}\,|\delta|$ genügenden ν sich angegeben finden, während daneben in der letzten Rubrik die Zahl des Körpers K_δ hinzugefügt ist, deren Partialnorm gleich ν wird.

*) Vgl. Comptes rendus 1891. Für obigen Zweck reicht schon die von H. Minkowski, Crelle B. 107, S. 296, aufgestellte Ungleichung aus.

δ	ν	
$1 \pm 2i$	$1 \mp i$	$\frac{1+i\sqrt{1\pm 2i}}{1\pm i}$
$2 \pm i$	$2 \mp i$	$1 \mp i + i\sqrt{2 \pm i}$
	$1 \pm i$	$i + i\sqrt{2 \pm i}$
$1 \pm i$	$\pm i$	$i + i\sqrt{1 \pm i}$
i	$1 + i$	$1 + i\sqrt{i}$

Es sei jetzt δ eine ganze imaginäre Zahl, deren absoluter Betrag $|\delta| > \sqrt{6}$ ausfällt und wir nehmen an, der Satz 3 sei bereits bewiesen für alle diejenigen Körper $K_{\delta'}$, für welche $|\delta'| < |\delta|$ wird. Ist dann ν die Partialnorm eines Ideals $\mathfrak{J}$, deren Charakterensystem in K_δ aus lauter positiven Einheiten besteht, so bestimme in K_δ ein zu $\mathfrak{J}$ äquivalentes Ideal $\mathfrak{J}'$, dessen Partialnorm ν' absolut genommen und in's Quadrat erhoben $< \sqrt{6}\,|\delta|$ ausfällt. Da $\sqrt{6} < |\delta|$ ist, so wird $|\nu'| < |\delta|$. Da andererseits ν' die Partialnorm eines Ideals in K_δ ist, deren Charakterensystem aus lauter positiven Einheiten besteht, so ist nach Satz 1 die ganze imaginäre Zahl δ in dem durch $\sqrt{\nu'}$ bestimmten Körper $K_{\nu'}$ die Partialnorm eines Ideals, deren Charakterensystem aus lauter positiven Einheiten besteht. Nun gilt wegen $|\nu'| < |\delta|$ Satz 3 im Körper $K_{\nu'}$ und es ist daher δ die Partialnorm einer gewissen ganzen oder gebrochenen Zahl des Körper $K_{\nu'}$ und hieraus ergiebt sich nach Satz 2, dass auch ν' die Partialnorm einer gewissen Zahl in K_δ ist. Da das Ideal $\mathfrak{J}$ äquivalent $\mathfrak{J}'$ ist, so ist der Quotient beider Ideale eine Zahl des Körpers K_δ, mithin ist der Quotient der Zahlen ν und ν' und folglich auch ν selbst gleich der Partialnorm einer gewissen Zahl des Körpers K_δ. Der Satz 3 gilt folglich für den Körper K_δ und wir erkennen daraus seine allgemeine Gültigkeit.*)

Aus Satz 3 folgt endlich in sehr einfacher Weise der zu Anfang dieses Paragraphen ausgesprochene Satz über die Idealclassen des Hauptgeschlechtes. Wenn nämlich $\mathfrak{J}$ ein Ideal des Hauptgeschlechtes ist, so erfüllt seine Partialnorm $\nu(\mathfrak{J})$ — bezüglichenfalls, wenn sie

*) Der eben bewiesene Satz 3 liefert zugleich alle Mittel zur Aufstellung der nothwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass die ternäre diophantische Gleichung

$$\alpha\xi^2 + \beta\eta^2 + \gamma\zeta^2 = 0$$

mit beliebigen ganzen imaginären Coefficienten α, β, γ in ganzen imaginären Zahlen ξ, η, ζ lösbar ist.

nach der auf S. 317 angegebenen Vorschrift mit dem Einheitsfactor i versehen ist — alle Bedingungen des Satzes 3. Es giebt daher auf Grund desselben im Körper K_δ eine Zahl A derart, dass $\nu(\mathfrak{J}) = \nu(\mathsf{A})$ wird. Setzen wir $\frac{\mathfrak{J}}{\mathsf{A}} = \frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{H}'}$, wo $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{H}'$ zu einander prime Ideale sind, so ist nothwendigerweise $\frac{\mathfrak{H} \,.\, S\mathfrak{H}}{\mathfrak{H}' \,.\, S\mathfrak{H}'} = 1$ und mithin $\mathfrak{H}' = S\mathfrak{H}$. Da $\mathfrak{H} \,.\, S\mathfrak{H}$ gleich einer Zahl α des Körpers k gesetzt werden kann, so ergiebt sich $\mathfrak{J} = \frac{\mathsf{A}}{\alpha}\mathfrak{H}^2$ d. h. $\mathfrak{J}$ ist nothwendigerweise dem Quadrat des Ideals $\mathfrak{H}$ äquivalent.

§ 5.

Die ambigen Ideale.

Ein Ideal $\mathfrak{J}$ des Dirichlet'schen Körpers K, welches nach Anwendung der Operation S ungeändert bleibt und keine Zahl des Körpers k als Factor enthält, werde *ein ambiges Ideal* genannt. Um alle ambigen Ideale aufzustellen, bezeichnen wir wie in § 3 die sämmtlichen s in der Partialdiscriminante d des Körpers K aufgehenden Primzahlen mit $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ und setzen $\lambda_1 = \mathfrak{L}_1^2, \ldots, \lambda_s = \mathfrak{L}_s^2$; es sind dann wegen $\mathfrak{L} = S\mathfrak{L}$ die s Ideale $\mathfrak{L}_1, \ldots, \mathfrak{L}_s$ ambige Ideale und desgleichen sind die sämmtlichen 2^s Producte $\mathfrak{A} = \Pi\mathfrak{L}$ ambig, welche aus diesen s Idealen $\mathfrak{L}_1, \ldots, \mathfrak{L}_s$ gebildet werden können. Wir beweisen leicht den Satz, dass es im Körper K keine weiteren ambigen Ideale giebt. Wäre nämlich $\mathfrak{J} = \mathfrak{P}\mathfrak{Q} \ldots \mathfrak{R}$, wo $\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}, \ldots, \mathfrak{R}$ Primideale sind, ein ambiges Ideal, so müssten wegen $\mathfrak{J} = S\mathfrak{J}$ die Primideale $S\mathfrak{P}, S\mathfrak{Q}, \ldots, S\mathfrak{R}$ in einer gewissen Reihenfolge genommen mit $\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}, \ldots, \mathfrak{R}$ übereinstimmen. Wenn etwa $S\mathfrak{P} = \mathfrak{Q}$ sich ergeben würde, so enthielte $\mathfrak{J}$ den Factor $\mathfrak{P}S\mathfrak{P}$, welcher gleich einer ganzen imaginären Zahl ist, und da dieser Umstand der Voraussetzung widerspricht, so folgt $\mathfrak{P} = S\mathfrak{P}$ und ebenso $\mathfrak{Q} = S\mathfrak{Q}, \ldots, \mathfrak{R} = S\mathfrak{R}$, d. h. die Ideale $\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}, \ldots, \mathfrak{R}$ sind sämmtlich ambige Primideale und da das Quadrat eines solchen Ideals einer ganzen imaginären Zahl gleich wird, so schliessen wir zugleich, dass die Ideale $\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}, \ldots, \mathfrak{R}$ nothwendig unter einander verschieden sind. Wir sprechen das gewonnene Resultat in folgendem Satze aus:

Satz 1. *Die s in der Partialdiscriminante d aufgehenden Primideale $\mathfrak{L}_1, \ldots, \mathfrak{L}_s$ und nur diese sind ambige Primideale. Die 2^s aus diesen zu bildenden Producte $\mathfrak{A} = \Pi\mathfrak{L}$ machen die Gesammtheit aller ambigen Ideale des Körpers K aus.*

§ 6.

Die ambigen Classen.

Wenn $\mathfrak{J}$ ein Ideal der Classe C ist, so werde diejenige Idealclasse, welcher das Ideal $S\mathfrak{J}$ angehört, mit SC bezeichnet. Ist insbesondere $C = SC$, so heisst *die Idealclasse C ambig*. Da das Product $\mathfrak{J}\,.\,S\mathfrak{J}$ äquivalent 1 ist, so wird $C\,.\,SC = 1$ und folglich ist das Quadrat einer jeden ambigen Classe gleich der Hauptclasse 1. Umgekehrt wenn das Quadrat einer Classe C gleich 1 ist, so wird $C = \frac{1}{C} = SC$ und folglich ist C eine ambige Classe.

Es entsteht nun die Aufgabe, alle ambigen Classen aufzustellen. Da offenbar ein jedes ambige Ideal $\mathfrak{J}$ vermöge seiner Eigenschaft $\mathfrak{J} = S\mathfrak{J}$ einer ambigen Classe angehört, so haben wir vor Allem zu untersuchen, wie viele von einander verschiedene ambige Classen aus den 2^s ambigen Idealen entspringen.

Das Product aller in δ aufgehenden Ideale $\mathfrak{L}$ ist gleich $\sqrt{\delta}$ und mithin ein Hauptideal. Wir bestimmen nun im Körper K eine Grundeinheit E, d. h. eine Einheit von der Beschaffenheit, dass jede andere Einheit des Körpers gleich $\varrho\,\mathsf{E}^m$ wird, wo ϱ eine Einheitswurzel und m eine positive oder negative ganze Zahl bedeutet. Da die irreducible Gleichung, welcher ϱ genügt, nothwendig vom 2^{ten} oder 4^{ten} Grade sein muss, so kann ϱ nur eine 2^{te}, 3^{te}, 4^{te}, 5^{te} oder 8^{te} Einheitswurzel oder eine aus diesen zusammengesetzte Einheitswurzel sein. Die 3^{te} Einheitswurzel kommt im Körper K nur vor, wenn $\delta = 3$ ist. Es kann ferner leicht gezeigt werden, dass die 5^{te} Einheitswurzel im Körper K niemals vorkommt. Die 8^{te} Einheitswurzel endlich kommt im Körper K vor, falls $\delta = i$ ist. Die beiden Fälle $\delta = 3$ und $\delta = i$ werden unten für sich besonders erledigt und bei der nachfolgenden allgemeinen Untersuchung ausgeschlossen, so dass nunmehr ϱ lediglich $= \pm 1$ oder $= \pm i$ sein kann.

Die Grundeinheit E ist bis auf einen Factor ϱ völlig bestimmt. Die Entscheidung darüber, ob im Körper K ausser 1 und $\sqrt{\delta}$ noch ein anderes ambiges Hauptideal vorhanden ist, hängt lediglich davon ab, ob $\nu(\mathsf{E}) = \pm 1$ oder $= \pm i$ ausfällt.

Um dies zu erkennen, nehmen wir zunächst $\nu(\mathsf{E}) = \pm 1$ an. Da es freisteht, $i\mathsf{E}$ an Stelle von E als Grundeinheit zu wählen, so können wir annehmen, dass $\nu(\mathsf{E}) = +1$ wird. Wir setzen $1 + \mathsf{E} = \alpha\mathsf{A}$,*) wo α eine ganze imaginäre Zahl und A eine ganze Zahl des Körpers K bedeutet, welche durch keine ganze imaginäre Zahl theilbar ist. Aus der Gleichung $\frac{\mathsf{A}}{S\mathsf{A}} = \mathsf{E}$ ergiebt sich, dass A ein ambiges Hauptideal

*) Die linke Seite dieses Ansatzes ist ein besonderer Fall des von Kummer im Journal für Math. Bd. 50, S. 212 behandelten Ausdruckes.

ist. Dieses Hauptideal A ist ferner verschieden von 1 und von $\sqrt{\delta}$. Wäre nämlich $A = \varrho E^m$ oder $= \varrho E^m \sqrt{\delta}$, so wäre

$$\frac{A}{SA} = \pm \left(\frac{E}{SE}\right)^m = \pm E^{2m}$$

und diese Einheit kann nicht gleich E sein, da m eine ganze Zahl bedeutet und E keine Einheitswurzel ist. Ferner ist ersichtlich, dass ein jedes andere ambige Hauptideal des Körpers K aus $\sqrt{\delta}$ und A zusammengesetzt werden kann. Ist nämlich B ein beliebiges ambiges Hauptideal, so ist nothwendig $\frac{B}{SB} = \varrho E^m$. Aus der Gleichung $\nu\left(\frac{B}{SB}\right) = +1$ folgt $\varrho = \pm 1$; wir setzen $\varrho = (-1)^n$, wo n den Werth 0 oder 1 hat; dann genügt die Zahl $\Gamma = B(\sqrt{\delta})^n A^{-m}$ der Gleichung $\frac{\Gamma}{S\Gamma} = +1$ und ist folglich eine Zahl des Körpers k, woraus die Behauptung ersichtlich wird.

Ist andrerseits die Partialnorm $\nu(E) = i$, so kann es kein von 1 und $\sqrt{\delta}$ verschiedenes ambiges Hauptideal geben. Denn wäre $\mathfrak{A} = A$ ein solches, so ist nothwendigerweise $\frac{A}{SA} = \varrho E^m$. Da aber $\nu\left(\frac{A}{SA}\right) = 1$ ist, so folgt nothwendigerweise $[\nu(E)]^m = \pm 1$ und daher muss m eine gerade Zahl sein. Wegen $E^2 = \frac{iE}{SE}$ würde dann die Zahl $B = AE^{-\frac{m}{2}}$ der Gleichung $\frac{B}{SB} = \varrho$ genügen und da $\nu\left(\frac{B}{SB}\right) = +1$ ist, so folgt $\varrho = \pm 1$. Berücksichtigen wir, dass B durch keine ganze imaginäre Zahl theilbar sein darf, so hat die Annahme $\frac{B}{SB} = +1$ nothwendig $B = \varrho$ und die Annahme $\frac{B}{SB} = -1$ nothwendig $B = \varrho\sqrt{\delta}$ zur Folge, womit die Behauptung bewiesen ist.

Wir drücken nun eines der s ambigen Primideale durch die $s-1$ übrigen ambigen Primideale und durch $\sqrt{\delta}$ und ferner, wenn die Partialnorm der Grundeinheit $= \pm 1$ ausfällt, noch eines dieser $s-1$ ambigen Ideale durch die $s-2$ übrigen und durch A aus. Bezeichnen wir dann allgemein eine Anzahl von Idealclassen als unter einander unabhängig, wenn keine derselben gleich 1 oder gleich einem Product der übrigen ist, so gilt offenbar der Satz:

Satz 2. *Die s ambigen Primideale bestimmen $s-2$ oder $s-1$ von einander unabhängige ambige Classen, je nachdem die Partialnorm der Grundeinheit $= \pm 1$ oder $= \pm i$ ist. Die sämmtlichen 2^s ambigen Ideale bestimmen im ersteren Falle 2^{s-2}, im letzteren 2^{s-1} von einander verschiedene ambige Idealclassen.*

Was die beiden oben ausgeschlossenen Fälle $\delta = 3$ und $\delta = i$ betrifft, so gilt im ersteren Falle ebenfalls der eben ausgesprochene allgemeine Satz, da das einzige ambige Ideal $\mathfrak{L} = \sqrt{3}$ ein Hauptideal ist und die Partialnorm der Grundeinheit gleich $\pm i$ ausfällt. Im zweiten Falle $\delta = i$ dagegen verliert das im Satze angegebene Criterium seine Anwendbarkeit, da die Partialnorm der Einheitswurzel $\sqrt{i}$ gleich $-i$ wird. Man erkennt, dass auch in diesem Falle $\delta = i$ das einzige vorhandene aus der Zerlegung von $1+i$ entspringende ambige Ideal ein Hauptideal ist.

Es werde hier noch der allgemeinere Fall hervorgehoben, in welchem δ gleich einer Primzahl und überdies $\equiv \pm 1$ nach $(1+i)^4$ ist. In diesem Falle wird ebenfalls $s = 1$ und die obige Entwickelung zeigt, dass nothwendigerweise die Partialnorm der Grundeinheit $= \pm i$ sein muss.

Es bleibt noch übrig, die Frage zu beantworten, ob im Körper K ambige Classen vorhanden sind, welche kein ambiges Ideal enthalten. Zu dem Zwecke wählen wir in der ambigen Classe C ein beliebiges Ideal $\mathfrak{J}$ aus; es ist dann $\frac{\mathfrak{J}}{S\mathfrak{J}}$ gleich einer Zahl A des Körpers K. Da es freisteht $i\mathsf{A}$ an Stelle von A zu wählen, so können wir die Annahmen $\nu(\mathsf{A}) = +1$ oder $= +i$ zu Grunde legen.

Im ersteren Falle betrachten wir die Zahl $\mathsf{B} = 1 + S\mathsf{A}$. Wegen $\frac{\mathsf{B}}{S\mathsf{B}} = \frac{1}{\mathsf{A}}$ wird $\frac{\mathsf{B}\mathfrak{J}}{S(\mathsf{B}\mathfrak{J})} = 1$ d. h. $\mathsf{B}\mathfrak{J} = S(\mathsf{B}\mathfrak{J})$. Setzen wir daher $\mathsf{B}\mathfrak{J} = \frac{\alpha}{\beta}\mathfrak{A}$, wo α und β ganze imaginäre Zahlen sind und das Ideal $\mathfrak{A}$ durch keine ganze imaginäre Zahl theilbar ist, so folgt, dass $\mathfrak{A}$ ein ambiges Ideal ist: die Classe C enthält mithin ein ambiges Ideal.

Ziehen wir zweitens die Annahme $\nu(\mathsf{A}) = i$ in Betracht, so erkennen wir zunächst, dass in diesem Falle das Charakterensystem von i aus lauter positiven Einheiten bestehen muss. Für die vorliegende Frage kommt es nun darauf an, ob die Partialnorm der Grundeinheit $\nu(\mathsf{E}) = +1$ oder $= +i$ ausfällt. Ist letzteres der Fall, so setzen wir einfach $\frac{\mathsf{A}}{\mathsf{E}}$ an Stelle von A und zeigen dann durch die eben angewandte Schlussweise, dass in der Idealclasse C ein ambiges Ideal vorkommt. Ist dagegen $\nu(\mathsf{E}) = +1$, so enthält die Classe C kein ambiges Ideal. Wäre nämlich $\mathfrak{A} = \mathsf{B}\mathfrak{J}$ ein solches, wo B eine Zahl in K bedeutet, so würde $\frac{\mathfrak{A}}{S\mathfrak{A}} = \frac{\mathsf{B}}{S\mathsf{B}}\mathsf{A}$ folgen. Andrerseits müsste aber $\frac{\mathfrak{A}}{S\mathfrak{A}}$ gleich einer Einheit, etwa gleich $\varrho\mathsf{E}^m$ sein und da $\nu(\mathsf{E}) = 1$ ist, so würde hieraus $\nu(\mathsf{A}) = \pm 1$ folgen, was der Annahme widerspricht.

Wir treffen nun die Voraussetzung, dass im Körper K das Charakterensystem von i aus lauter positiven Einheiten besteht; nach Satz 3

in § 4 giebt es dann eine Zahl A, deren Partialnorm gleich i ist und wenn wir noch $\nu(\mathsf{E}) = 1$ annehmen, so muss die Zahl A nothwendig gebrochen sein. Setzen wir $\mathsf{A} = \frac{\mathfrak{J}}{\mathfrak{J}'}$, wo $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{J}'$ zu einander prime Ideale sind, so wird $\frac{\mathfrak{J}.S\mathfrak{J}}{\mathfrak{J}'.S\mathfrak{J}'} = 1$ und hieraus folgt $\mathfrak{J}' = S\mathfrak{J}$ d. h. $\mathfrak{J}$ ist äquivalent mit $S\mathfrak{J}$ und bestimmt folglich eine ambige Classe C; diese Classe C enthält nach dem vorhin Bewiesenen kein ambiges Ideal. Wir fassen die gewonnenen Resultate in folgendem Satze zusammen.

Satz 3. *Es giebt im Körper K dann und nur dann eine ambige Classe, welche kein ambiges Ideal enthält, wenn das Charakterensystem von i aus lauter positiven Einheiten besteht und wenn zugleich die Partialnorm der Grundeinheit gleich ± 1 ist.*

Die nämlichen Hilfsmittel führen zugleich zur Darstellung sämmtlicher ambigen Classen der genannten Eigenschaft. Nehmen wir nämlich an es gäbe 2 ambige Idealclassen, die kein ambiges Ideal enthalten und wählen aus diesen je ein Ideal $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{J}'$ aus, so zeigt die obige Entwicklung, dass die Partialnormen der beiden Zahlen $\mathsf{A} = \frac{\mathfrak{J}}{S\mathfrak{J}}$ und $\mathsf{A}' = \frac{\mathfrak{J}'}{S\mathfrak{J}'}$ gleich $\pm i$ sein müssen und es wird folglich $\nu\left(\frac{\mathsf{A}}{\mathsf{A}'}\right) = \pm 1$. Nehmen wir, was frei steht, in dieser Gleichung das obere Vorzeichen an, so folgt, dass $\mathsf{B} = 1 + \frac{S\mathsf{A}}{S\mathsf{A}'}$ der Gleichung $\frac{\mathsf{B}}{S\mathsf{B}} = \frac{\mathsf{A}'}{\mathsf{A}}$ genügt. Dieselbe ergiebt $\mathsf{B}\frac{\mathfrak{J}}{\mathfrak{J}'} = S\left(\mathsf{B}\frac{\mathfrak{J}}{\mathfrak{J}'}\right)$; setzen wir daher $\mathsf{B}\frac{\mathfrak{J}}{\mathfrak{J}'} = \frac{\alpha}{\beta}\mathfrak{A}$, wo α und β ganze imaginäre Zahlen und das Ideal $\mathfrak{A}$ durch keine ganze imaginäre Zahl theilbar ist, so erweist sich $\mathfrak{A}$ als ein ambiges Ideal und der Quotient der beiden Ideale $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{J}'$ ist mithin einem ambigen Ideale äquivalent. Wir gewinnen aus diesen Ueberlegungen den Satz:

Satz 4. *Wenn im Körper K eine ambige Idealclasse vorhanden ist, welche kein ambiges Ideal enthält, so entstehen alle übrigen Classen der nämlichen Beschaffenheit dadurch, dass man jene Classe der Reihe nach mit allen aus ambigen Idealen entspringenden Classen multiplicirt.*

Die bisherigen Resultate ermöglichen die Berechnung der Anzahl aller ambigen Classen. Betrachten wir zunächst den Fall, dass das Charakterensystem von i aus lauter positiven Einheiten besteht, so erkennen wir aus den soeben bewiesenen Sätzen 2, 3 und 4, dass es in diesem Falle genau 2^{s-1} ambige Classen giebt, wo s die Anzahl der Primtheiler der Partialdiscriminante d bedeutet. Von diesen 2^{s-1} ambigen Classen entspringen sämmtliche oder nur die Hälfte aus ambigen Idealen, je nachdem die Partialnorm der Grundeinheit gleich $\pm i$ oder gleich ± 1 ausfällt. Kommt jedoch im Charakterensystem von i eine negative Einheit vor, so ist die Norm der Grundeinheit nothwendig gleich ± 1; nach den Sätzen 2 und 3 dieses Paragraphen

giebt es dann nur 2^{s-2} ambige Classen und diese entspringen sämmtlich aus ambigen Idealen. Setzen wir nun $c = s$ oder $= s - 1$, je nachdem das Charakterensystem von i aus lauter positiven Einheiten besteht oder nicht, so bedeutet c nach den Darlegungen des § 3 die Anzahl der Einzelcharaktere, welche das Geschlecht einer Idealclasse bestimmen und wir erhalten den Satz:

Satz 5. *Es giebt genau $c - 1$ von einander unabhängige ambige Classen, wo c die Anzahl der Einzelcharaktere bedeutet, welche das Geschlecht einer Classe bestimmen. Die Anzahl der sämmtlichen von einander verschiedenen ambigen Idealclassen ist demgemäss $= 2^{c-1}$.*

Dieser allgemeine Satz gilt auch, wie man leicht erkennt, für den besonderen durch $\sqrt{i}$ bestimmten Dirichlet'schen Körper, welcher oben von der Betrachtung ausgeschlossen wurde.

§ 7.

Die Anzahl der existirenden Geschlechter.

Die in § 4, 5 und 6 gewonnenen Resultate setzen uns in den Stand, die Anzahl der in einem Dirichlet'schen Zahlkörper K vorhandenen Geschlechter zu berechnen. Da das Charakterensystem einer Idealclasse des Körpers K aus c Einzelcharakteren besteht, deren jeder den Werth $+1$ oder -1 annehmen kann, so sind im Ganzen 2^c Charakterensysteme möglich und es entsteht die wichtige Frage, ob für jedes dieser 2^c möglichen Charakterensysteme ein Geschlecht existirt oder ob nur ein Theil dieser Charakterensysteme unter den Geschlechtern wirklich vertreten ist. Um über diese Frage Auskunft zu erhalten, bezeichnen wir die Anzahl der von einander verschiedenen existirenden Geschlechter mit g und die Anzahl der Classen des Hauptgeschlechtes mit f. Da offenbar auch jedes andere Geschlecht f Classen enthalten muss, so ist die Anzahl sämmtlicher Classen des Körpers $= gf$.

Bezeichnen wir nun die Classen des Hauptgeschlechts mit $H_1, \ldots, H_f$, so können wir nach dem in § 4 bewiesenen Satze $H_1 = Q_1^2, \ldots, H_f = Q_f^2$ setzen, wo $Q_1, \ldots, Q_f$ gewisse Classen des Körpers bedeuten. Es sei jetzt C eine beliebige Classe des Körpers K; da dann C^2 offenbar zum Hauptgeschlecht gehört, so ist $C^2 = Q_r^2$, wo Q_r eine der eben bestimmten Classen $Q_1, \ldots, Q_f$ bedeutet. Es ist folglich $\frac{C}{Q_r}$ eine ambige Idealclasse A, d. h. es wird $C = AQ_r$. Da nach Satz 5 in § 6 die Anzahl der ambigen Classen 2^{c-1} beträgt, so stellt der Ausdruck AQ genau $2^{c-1}f$ Idealclassen dar. Diese sind auch sämmtlich von einander verschieden. Denn wäre $AQ_r = A'Q_{r'}$, wo A' eine ambige Classe und $Q_{r'}$ eine der vorhin bestimmten Classen $Q_1, \ldots, Q_f$

bedeutet, so würde $Q_r^2 = Q_{r'}^2$ d. h. $H_r = H_{r'}$ und folglich $r = r'$ sein. Aus $Q_r = Q_{r'}$ folgt auch zugleich $A = A'$, womit die Behauptung bewiesen ist.

Die Gleichsetzung der so gefundenen Anzahl $2^{c-1}f$ sämmtlicher Classen mit der vorhin angegebenen Zahl gf ergiebt $g = 2^{c-1}$. Wir haben somit die am Anfang dieses Paragraphen gestellte Frage beantwortet und es gilt der Satz:

Die Anzahl der existirenden Geschlechter ist gleich der Hälfte der möglichen Charakterensysteme, nämlich $= 2^{c-1}$, *wo c die Anzahl der das Geschlecht bestimmenden Charaktere bezeichnet.*

§ 8.

Das Reciprocitätsgesetz.

Nachdem im vorigen Paragraph gezeigt worden ist, dass nur die Hälfte aller möglichen Charakterensysteme wirklich unter den Geschlechtern vertreten ist, entsteht die Frage nach der Bedingung, welche ein Charakterensystem erfüllen muss, damit für dasselbe ein Geschlecht existirt. Diese Frage wird durch das schon von Dirichlet aufgestellte Reciprocitätsgesetz der quadratischen Reste und Nichtreste im Gebiete der ganzen imaginären Zahlen beantwortet.

Um zunächst den quadratischen Restcharakter der Zahl i zu bestimmen, nehmen wir an, es sei $\varkappa$ eine von $1+i$ verschiedene Primzahl im Körper k und überdies $\equiv (00)$ nach $(1+i)^4$. Da zu Folge der in § 6 gemachten Bemerkung in dem durch $\sqrt{\varkappa}$ bestimmten Körper $K_\varkappa$ die Partialnorm der Grundeinheit $= \pm i$ ist, so muss nach dem zu Anfang des § 3 bewiesenen Satze i quadratischer Rest von $\varkappa$ sein. Ist $\varkappa$ eine Primzahl und $\equiv (10)$ nach $(1+i)^4$, so ist $i\varkappa \equiv (00)$ und folglich wird auch in diesem Falle $\left[\frac{i}{k}\right] = +1$.

Wir betrachten ferner den durch $\sqrt{i}$ bestimmten Dirichlet'schen Körper K_i. In diesem ist offenbar $1+i$ der einzige Primfactor der Partialdiscriminante. Das Symbol $\left[\frac{i}{1+i:i}\right]$ wird $= +1$ und es giebt im Körper K_i nur den einen Charakter $\left[\frac{\nu}{1+i:i}\right]$. Die Zahl der möglichen Charakterensysteme in K_i ist folglich $= 2$ und da nur die Hälfte derselben durch Geschlechter vertreten ist, so giebt es nur ein Geschlecht und es ist folglich stets $\left[\frac{\nu}{1+i:i}\right] = +1$, wo ν die Partialnorm eines beliebigen Ideals bedeutet. Es sei nun $\varkappa$ eine Primzahl und zwar $\equiv (t_\varkappa t_\varkappa')$ nach $(1+i)^4$; ist dann i quadratischer Rest von $\varkappa$, so ist $\varkappa$ nach § 2 die Partialnorm eines Primideals und hieraus ergiebt

sich $\left[\frac{\varkappa}{1+i:i}\right]=(-1)^{t'_\varkappa}=+1$ d. h. $t'_\varkappa=0$. Dieses Resultat ist die Umkehrung des vorigen; beide Resultate zusammen ergeben den Satz:

Wenn $\varkappa$ eine Primzahl und $\equiv(t_\varkappa t'_\varkappa)$ nach $(1+i)^4$ ist, so bestimmt sich der quadratische Restcharakter der Zahl i in Bezug auf $\varkappa$ durch die Formel

$$\left[\frac{i}{\varkappa}\right]=(-1)^{t'_\varkappa}.$$

Um den quadratischen Restcharakter von $1+i$ zu berechnen, betrachte ich zunächst den durch $\sqrt{\varkappa}$ bestimmten Körper $K_\varkappa$, wo $\varkappa$ eine Primzahl und $\equiv(000)$ nach $(1+i)^5$ ist. Da in diesem Körper nur ein Geschlecht vorhanden sein darf und, wie oben gezeigt, der Charakter $\left[\frac{i}{\varkappa:\varkappa}\right]=+1$ ist, so folgt, dass die Norm eines jeden Ideals ebenfalls den Charakter $+1$ haben muss. Da nach § 2 die Zahl $1+i$ in zwei Ideale des Körpers $K_\varkappa$ zerlegbar ist und folglich die Partialnorm eines Ideals ist, so folgt $\left[\frac{1+i}{\varkappa:\varkappa}\right]=\left[\frac{1+i}{\varkappa}\right]=+1$. Ist $\varkappa\equiv(100)$, so wird $i\varkappa\equiv(000)$ nach $(1+i)^5$ sein und mithin haben wir auch in diesem Falle $\left[\frac{1+i}{\varkappa}\right]=+1$.

Es sei jetzt $\varkappa$ eine Primzahl und $\equiv(t_\varkappa 0 t''_\varkappa)$ nach $(1+i)^5$. Nehmen wir nun $\left[\frac{1+i}{\varkappa}\right]=+1$ an, so ist $\varkappa$ in dem durch $\sqrt{1+i}$ bestimmten Körper zerlegbar und da in diesem Körper nur ein Geschlecht existirt und i den Charakter $+1$ besitzt, so ergiebt sich auch $\left[\frac{\varkappa}{1+i:1+i}\right]$ $=(-1)^{t''_\varkappa}=+1$, d. h. $t''_\varkappa=0$. Beide Resultate zusammengenommen bestimmen den quadratischen Restcharakter von $1+i$ in Bezug auf $\varkappa$ für $t'_\varkappa=0$ und zwar gilt unter dieser Voraussetzung die Formel

$$\left[\frac{1+i}{\varkappa}\right]=(-1)^{t''_\varkappa}.$$

Es sei endlich $\varkappa$ eine Primzahl und $\equiv(t_\varkappa 1 t''_\varkappa)$ nach $(1+i)^5$. In dem durch $\sqrt{(1+i)\varkappa}$ bestimmten Körper sind, wie man leicht ausrechnet, die Charaktere der Zahl i beide $=-1$ und es existirt folglich nur ein Geschlecht. Wenn daher ν die Partialnorm eines Ideals ist, so müssen die beiden Charaktere der Zahl ν, nämlich die Symbole $\left[\frac{\nu}{\varkappa:(1+i)\varkappa}\right]$ und $\left[\frac{\nu}{1+i:(1+i)\varkappa}\right]$ entweder beide positiv oder beide negativ sein. Hieraus ergiebt sich, falls wir $\nu=\varkappa$ nehmen, die Formel:

$$\left[\frac{1+i}{\varkappa}\right]=(-1)^{1+t''_\varkappa}.$$

Die beiden soeben gewonnenen Formeln lassen sich in eine zusammenfassen und wir erhalten somit den Satz:

Wenn $\varkappa$ eine Primzahl und $\equiv (t_\varkappa t'_\varkappa t''_\varkappa)$ nach $(1+i)^5$ ist, so bestimmt sich der quadratische Restcharakter der Zahl $1+i$ in Bezug auf $\varkappa$ durch die Formel:

$$\left[\frac{1+i}{\varkappa}\right] = (-1)^{t'_\varkappa + t''_\varkappa}.$$

Um endlich das Reciprocitätsgesetz für 2 beliebige von $1+i$ verschiedene Primzahlen abzuleiten, berücksichtigen wir den Umstand, dass von den beiden ganzen imaginären Zahlen α und $i\alpha$ stets die eine $\equiv (0 t_\alpha)$ nach $(1+i)^4$ ist. Wir nehmen bei der nachfolgenden Untersuchung die beiden Primzahlen $\varkappa$ und π in dieser Gestalt an, so dass stets $t_\varkappa = 0$, $t_\pi = 0$ zu setzen ist.

Es sei zunächst $\varkappa$ eine Primzahl $\equiv (00)$ nach $(1+i)^4$. Ist dann π eine Primzahl von der Art, dass $\left[\frac{\varkappa}{\pi}\right] = +1$ wird, so kann π in dem durch $\sqrt{\varkappa}$ bestimmten Körper $K_\varkappa$ zerlegt werden und ist folglich die Partialnorm eines Ideals. Durch die oben angewandte Schlussweise folgt dann, dass $\left[\frac{\pi}{\varkappa}\right] = +1$ sein muss. Wir haben somit die beiden folgenden Thatsachen erkannt:

1) aus $\varkappa \equiv (00)$, $\pi \equiv (00)$ nach $(1+i)^4$ und $\left[\frac{\varkappa}{\pi}\right] = +1$ folgt $\left[\frac{\pi}{\varkappa}\right] = +1$,

2) „ $\varkappa \equiv (00)$, $\pi \equiv (01)$ „ „ „ „ „ „

Es sei ferner $\varkappa \equiv (01)$ nach $(1+i)^4$, so giebt es in dem durch $\sqrt{\varkappa}$ bestimmten Körper $K_\varkappa$ zwei Charaktere, aber nur ein Geschlecht, weil das Charakterensystem der Zahl i, wie man leicht durch Rechnung findet, aus 2 negativen Einheiten besteht. Ist daher π eine Primzahl von der Art, dass $\left[\frac{\varkappa}{\pi}\right] = +1$ wird, so müssen auch die Charaktere $\left[\frac{\pi}{1+i : \varkappa}\right]$ und $\left[\frac{\pi}{\varkappa : \varkappa}\right]$ entweder beide positiv oder beide negativ sein; hieraus folgt $\left[\frac{\pi}{\varkappa}\right] = +1$ und wir haben somit die beiden folgenden Thatsachen erkannt:

3) aus $\varkappa \equiv (01)$, $\pi \equiv (00)$ nach $(1+i)^4$ und $\left[\frac{\varkappa}{\pi}\right] = +1$ folgt $\left[\frac{\pi}{\varkappa}\right] = +1$,

4) „ $\varkappa \equiv (01)$, $\pi \equiv (01)$ „ „ „ „ „ „

Diese 4 Sätze zeigen, dass unter der Voraussetzung $t_\varkappa = 0$, $t_\pi = 0$ allgemein $\left[\frac{\varkappa}{\pi}\right] = \left[\frac{\pi}{\varkappa}\right]$ ist.

Es sei nämlich zunächst $t'_\varkappa = 0$, $t'_\pi = 0$. Nach 1) folgt aus $\left[\frac{\varkappa}{\pi}\right] = +1$ nothwendig $\left[\frac{\pi}{\varkappa}\right] = +1$. Ist aber $\left[\frac{\varkappa}{\pi}\right] = -1$, so muss auch

$\left[\frac{\pi}{\varkappa}\right] = -1$ sein, da ja ebenfalls nach 1) bei Vertauschung von $\varkappa$ mit π aus $\left[\frac{\pi}{\varkappa}\right] = +1$ nothwendig auch $\left[\frac{\varkappa}{\pi}\right] = +1$ folgen würde.

Es sei ferner $t'_\varkappa = 0$, $t'_\pi = 1$. Nach 2) folgt aus $\left[\frac{\varkappa}{\pi}\right] = +1$ nothwendig $\left[\frac{\pi}{\varkappa}\right] = +1$. Ist aber $\left[\frac{\varkappa}{\pi}\right] = -1$, so muss auch $\left[\frac{\pi}{\varkappa}\right] = -1$ sein, da ja nach 3) aus $\left[\frac{\pi}{\varkappa}\right] = +1$ auch $\left[\frac{\varkappa}{\pi}\right] = +1$ folgen würde.

Endlich sei $t'_\varkappa = 1$, $t'_\pi = 1$. Nach 4) folgt aus $\left[\frac{\varkappa}{\pi}\right] = +1$ nothwendig $\left[\frac{\pi}{\varkappa}\right] = +1$. Ist aber $\left[\frac{\varkappa}{\pi}\right] = -1$, so muss auch $\left[\frac{\pi}{\varkappa}\right] = -1$ sein, da ja ebenfalls nach 4) aus $\left[\frac{\pi}{\varkappa}\right] = +1$ nothwendig auch $\left[\frac{\varkappa}{\pi}\right] = +1$ folgen würde. Um die eben gefundene Formel $\left[\frac{\varkappa}{\pi}\right] = \left[\frac{\pi}{\varkappa}\right]$ für 2 beliebige Primzahlen $\varkappa$, π anzuwenden, für welche $t_\varkappa$ und t_π nicht nothwendig $= 0$ sind, müssen wir in jener Formel an Stelle $\varkappa$, π bezüglich $i^{t_\varkappa}\varkappa$, $i^{t_\pi}\pi$ einsetzen und erhalten dann den folgenden Satz:

Wenn $\varkappa$ und π von $1+i$ verschiedene Primzahlen und bezüglich $\equiv (t_\varkappa t'_\varkappa)$ bezüglich $\equiv (t_\pi t'_\pi)$ nach $(1+i)^4$ sind, so gilt das Reciprocitätsgesetz

$$\left[\frac{\varkappa}{\pi}\right]\left[\frac{\pi}{\varkappa}\right] = (-1)^{t_\varkappa t'_\pi + t'_\varkappa t_\pi}.$$

Wir definiren nun das allgemeine Symbol $\left[\frac{\alpha}{\beta}\right]$, wo $\alpha = \prod^{\varkappa} \varkappa$ und $\beta = \prod^{\pi} \pi$ zwei beliebige zu einander und zu $1+i$ prime Zahlen sind, durch die Gleichung

$$\left[\frac{\alpha}{\beta}\right] = \prod^{\varkappa,\pi} \left[\frac{\varkappa}{\pi}\right];$$

hierin ist das Product über alle Primfactoren $\varkappa$ und π der beiden Zahlen α bezüglich β zu erstrecken, wie sie in der Productdarstellung von α bezüglich β vorkommen. Es folgt dann unmittelbar der Satz:

Wenn α und β zwei beliebige zueinander und zu $1+i$ prime ganze Zahlen sind und $\alpha \equiv (t_\alpha t'_\alpha)$, $\beta \equiv (t_\beta t'_\beta)$ nach $(1+i)^4$ gesetzt wird, so ist

$$\left[\frac{\alpha}{\beta}\right]\left[\frac{\beta}{\alpha}\right] = (-1)^{t_\alpha t'_\beta + t'_\alpha t_\beta}.$$

Diese Formel setzt uns in den Stand die Bedingung anzugeben, welche in einem beliebigen Dirichlet'schen Körper zwischen den c Charakteren bestehen muss, damit dieselben das Charakterensystem eines existirenden Geschlechtes bilden.

Wir nehmen zunächst an, dass δ nicht durch $1+i$ theilbar sei und setzen dann in obiger Formel $\alpha = \delta$ und $\beta = \nu$, wo ν eine zu δ und zu $1+i$ prime Partialnorm eines Ideals im Körper K_δ bedeutet. Da dann nach § 2 die Zahl δ von allen in ν zu ungerader Potenz vorkommenden Primzahlen quadratischer Rest sein muss, so ist $\left[\frac{\delta}{\nu}\right] = +1$ und folglich wird

$$\left[\frac{\nu}{\delta}\right] = (-1)^{t_\delta t'_\nu + t'_\delta t_\nu}.$$

Ist nun $\delta \equiv (00)$ nach $(1+i)^4$, so wird die Partialdiscriminante $d = \delta$ und wenn wir daher sämmtliche in derselben aufgehenden Primzahlen mit $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ bezeichnen, so wird

$$\left[\frac{\nu}{\lambda_1}\right] \cdots \left[\frac{\nu}{\lambda_s}\right] = \left[\frac{\nu}{\lambda_1 : \delta}\right] \cdots \left[\frac{\nu}{\lambda_s : \delta}\right] = +1.$$

Ist dagegen δ nicht $\equiv (00)$ nach $(1+i)^4$, so kommt $1+i$ in der Partialdiscriminante d des Körpers K_δ als Factor vor. Wir bezeichnen dann die in δ aufgehenden Primzahlen mit $\lambda_1, \ldots, \lambda_{s-1}$ und setzen $1 + i = \lambda_s$. Wegen $\left[\frac{\nu}{1+i : \delta}\right] = (-1)^{t_\delta t'_\nu + t'_\delta t_\nu}$ erhalten wir wiederum:

$$\left[\frac{\nu}{\lambda_1 : \delta}\right] \cdots \left[\frac{\nu}{\lambda_s : \delta}\right] = +1.$$

Endlich sei δ durch $1+i$ theilbar; wir setzen $\delta = (1+i)\delta'$ und ertheilen ν die obige Bedeutung. Da wiederum δ von allen in ν zu ungerader Potenz vorkommenden Primzahlen quadratischer Rest sein muss, so kann bei der Berechnung der Factoren des Symbols $\left[\frac{\delta'}{\nu}\right]$ die Zahl δ' durch $1+i$ ersetzt werden; die oben gefundene Formel für den quadratischen Restcharakter von $1+i$ ergiebt dann $\left[\frac{\delta'}{\nu}\right] = (-1)^{t'_\nu + t''_\nu}$. Setzen wir ferner in der allgemeinen Reciprocitätsgleichung $\alpha = \delta'$, $\beta = \nu$ und benutzen dann den soeben gefundenen Werth des Symbols $\left[\frac{\delta'}{\nu}\right]$, so erhalten wir $\left[\frac{\nu}{\delta'}\right] = (-1)^{t_{\delta'} t'_\nu + t'_{\delta'} t_\nu + t'_\nu + t''_\nu}$. Andererseits hat das Symbol $\left[\frac{\nu}{1+i : \delta}\right]$ den gleichen Werth und hieraus ergiebt sich wiederum, wenn wir die sämmtlichen in δ enthaltenen Primzahlen mit $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ bezeichnen, die Gleichung

$$\left[\frac{\nu}{\lambda_1 : \delta}\right] \cdots \left[\frac{\nu}{\lambda_s : \delta}\right] = +1.$$

Es gilt daher in allen Fällen der Satz:

Ein vorgelegtes Charakterensystem ist dann und nur dann durch ein Geschlecht vertreten, wenn das Product aller Charaktere desselben $= +1$ *ist.*

§ 9.

Der specielle Dirichlet'sche Körper.

Wenn der durch $\sqrt{\delta}$ bestimmte Dirichlet'sche Körper K ausser dem Körper k noch einen anderen quadratischen Körper enthalten soll, so muss, wie man leicht erkennt, δ gleich einer reellen oder gleich einer rein imaginären Zahl sein. In diesem Falle bezeichnen wir den durch $\sqrt{\delta}$ bestimmten Dirichlet'schen biquadratischen Körper als einen *speciellen Dirichlet'schen Körper* und setzen $\partial = \pm \delta$ bezüglich $\partial = \pm 2i\delta$, so dass ∂ stets eine reelle positive Zahl bedeutet, welche durch kein Quadrat einer reellen Zahl theilbar ist. Der specielle Dirichlet'sche Körper K ist ein Galois'scher Körper. Eine beliebige Zahl desselben kann in die Gestalt:

$$\mathsf{A} = a + bi + c\sqrt{\partial} + di\sqrt{\partial}$$

gebracht werden, wo a, b, c, d rationale Zahlen sind und wir erhalten die 3 zu A conjugirten Zahlen durch Anwendung der 3 Substitutionen:

$$\begin{aligned} S &= (\sqrt{\partial} : -\sqrt{\partial}), \\ S' &= (i : -i), \\ S'' = SS' &= (\sqrt{\partial} : -\sqrt{\partial},\ i : -i)\cdot \end{aligned}$$

Diesen 3 Substitutionen entsprechen 3 in K enthaltene quadratische Zahlkörper: alle Zahlen nämlich, welche bei Anwendung von S ungeändert bleiben, bilden den durch i bestimmten quadratischen Körper k und alle bei Anwendung der Substitution S' bezüglich S'' ungeändert bleibenden Zahlen des Körpers K bilden je einen quadratischen Körper, nämlich den durch $\sqrt{\partial}$ bezüglich durch $\sqrt{-\partial}$ bestimmten quadratischen Zahlkörper; der erstere möge mit k', der zweite mit k'' bezeichnet werden.

Wir fügen hier noch eine Entwicklung an, welche im folgenden Paragraph gebraucht werden wird.

Wenn ein Ideal des Körpers K als grösster gemeinsamer Theiler von solchen Zahlen dargestellt werden kann, welche lediglich Zahlen der Unterkörper k' bezüglich k'' sind, so sagen wir, das Ideal „*liege*" im Körper k' bezüglich k''. Ist $\mathfrak{J}$ irgend ein Ideal in K, so liegt stets das Product $\mathfrak{J} \cdot S'\mathfrak{J}$ im Körper k'. Wählen wir nämlich irgend eine durch $\mathfrak{J}$ theilbare Zahl A und bestimmen dann eine ebenfalls durch $\mathfrak{J}$ theilbare Zahl B derart, dass $\frac{\mathsf{B}}{\mathfrak{J}}$ prim zu $\frac{\mathsf{A}}{\mathfrak{J}} S'\left(\frac{\mathsf{A}}{\mathfrak{J}}\right)$ ist, so wird nothwendig auch $S'\left(\frac{\mathsf{B}}{\mathfrak{J}}\right)$ und daher auch $\frac{\mathsf{B}}{\mathfrak{J}} S'\left(\frac{\mathsf{B}}{\mathfrak{J}}\right)$ prim zu

$\frac{\mathsf{A}}{\mathfrak{J}} S'\left(\frac{\mathsf{A}}{\mathfrak{J}}\right)$ und hieraus folgt $\mathfrak{J} . S'\mathfrak{J} = (\mathsf{A} . S'\mathsf{A},\ \mathsf{B} . S'\mathsf{B})$, womit die Behauptung bewiesen ist. Ebenso wird gezeigt, dass $\mathfrak{J} . S''\mathfrak{J}$ stets in dem Körper k'' liegt.

§ 10.

Die Anzahl der Idealclassen des speciellen Dirichlet'schen Körpers K.

In diesem letzten Paragraph soll kurz der Weg gezeigt werden, welcher zu einem rein arithmetischen Beweise des in der Einleitung erwähnten Dirichlet'schen Satzes über die Anzahl der Idealclassen in K führt.

Zu dem Zweck stellen wir zunächst folgende Ueberlegungen an. Sind c', c'' irgend zwei Idealclassen der beiden quadratischen Körper k' bezüglich k'' und wählt man aus diesen beiden Classen je ein Ideal $\mathfrak{i}'$, $\mathfrak{i}''$, so gehört jedes dieser beiden Ideale, als Ideal des biquadratischen Körpers K aufgefasst, einer Idealclasse in K an; die beiden somit durch c', c'' bestimmten Idealclassen des biquadratischen Körpers K mögen mit $\overline{c'}$ bezüglich $\overline{c''}$ und ihr Product mit $\overline{c'c''}$ bezeichnet werden. Es gilt dann zunächst der Satz:

Jede Classe des Hauptgeschlechtes im biquadratischen Körper K ist gleich einem Producte $\overline{c'c''}$, wo c', c'' Classen der quadratischen Körper k' bezüglich k'' sind.

Zum Beweise dieses Satzes benutzen wir die Thatsache, dass jedes Ideal $\mathfrak{H}$ des Hauptgeschlechtes dem Quadrate eines Ideals $\mathfrak{J}$ im biquadratischen Körper äquivalent ist. Es gilt andrerseits die Identität

$$\mathfrak{J}^2 = \frac{(\mathfrak{J}.S'\mathfrak{J})\,(\mathfrak{J}.S''\mathfrak{J})}{S'\mathfrak{J}.S''\mathfrak{J}}.$$

Da das Product $S'\mathfrak{J} . S''\mathfrak{J}$ bei Anwendung der Substitution S ungeändert bleibt, so ist dasselbe gleich einer Zahl in k und folglich ein Hauptideal. Da $\mathfrak{J} . S'\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{J} . S''\mathfrak{J}$ bezüglich in den Körpern k' und k'' liegen, so erkennen wir, dass $\mathfrak{J}^2$ und mithin auch $\mathfrak{H}$ äquivalent dem Product eines in k' und eines in k'' liegenden Ideals ist.

Es seien nun $p_1, \ldots, p_\pi$ die in ∂ aufgehenden der Congruenz $p \equiv 1$ nach 4 genügenden und $q_1, \ldots, q_\varkappa$ die in ∂ aufgehenden der Congruenz $q \equiv 3$ nach 4 genügenden Primzahlen. Die ersteren Primzahlen lassen sich als Product zweier ganzer imaginärer Zahlen darstellen und zwar sei $p_1 = \alpha_1\beta_1, \ldots, p_\pi = \alpha_\pi\beta_\pi$.

Wir bezeichnen jetzt im biquadratischen Körper K diejenigen Geschlechter als *die Geschlechter der Hauptart*, für welche die Charaktere der Norm ν den Bedingungen:

$$\left[\frac{\nu}{\alpha_1:\partial}\right]\left[\frac{\nu}{\beta_1:\partial}\right]=+1,\cdots,\left[\frac{\nu}{\alpha_\pi:\partial}\right]\left[\frac{\nu}{\beta_\pi:\partial}\right]=+1$$

und

$$\left[\frac{\nu}{q_1:\partial}\right]=+1,\cdots,\left[\frac{\nu}{q_\varkappa:\partial}\right]=+1$$

genügen. Unmittelbar aus dieser Definition folgt die Thatsache, dass genau der $2^{\pi+\varkappa-1}$te Theil bezüglich der $2^{\pi+\varkappa}$te Theil sämmtlicher Geschlechter des Körpers K von der Hauptart ist, je nachdem ∂ ungerade oder gerade ist. Es gilt ferner der Satz:

Jedes Product $\overline{c'c''}$ gehört im biquadratischen Körper K einem Geschlechte der Hauptart an, und umgekehrt jede Classe C des biquadratischen Körpers K, welche einem Geschlechte der Hauptart angehört, ist gleich einem Product $\overline{c'c''}$.

Um den ersten Theil dieses Satzes zu beweisen, berücksichtigen wir, dass die Partialnorm eines jeden in k' oder k'' liegenden Ideals eine ganze rationale Zahl wird und benutzen dann die beiden folgenden Thatsachen:

1. Ist $p=\alpha\beta$ eine rationale in k zerlegbare Primzahl, so ist jede rationale Zahl im Gebiet der ganzen imaginären Zahlen gleichzeitig quadratischer Rest oder Nichtrest in Bezug auf die conjugirt imaginären Factoren α und β.

2. Ist q eine rationale in k unzerlegbare Primzahl, so ist jede rationale Zahl im Gebiet der ganzen imaginären Zahlen quadratischer Rest in Bezug auf q.

Um die Richtigkeit der Umkehrung zu erkennen, bemerken wir, dass jedenfalls entweder die Discriminante des quadratischen Körpers k' oder die des quadratischen Körpers k'' den Factor 2 enthalten muss. Aus der bekannten Theorie der quadratischen Körper folgt daher, dass nothwendig in einem jener beiden quadratischen Körper ein Geschlecht existiren muss, dessen Charaktere in Bezug auf die Primzahlen $p_1,\ldots,p_\pi$ der Reihe nach mit den Werthen der Symbole $\left[\frac{\nu}{\alpha_1:\partial}\right],\cdots,\left[\frac{\nu}{\alpha_\pi:\partial}\right]$ übereinstimmen. Ist a eine Classe dieses Geschlechtes im quadratischen Körper k' oder k'', so gehört, wie man leicht erkennt, die Classe $C\bar{a}$ im biquadratischen Körper K dem Hauptgeschlechte an und wird daher nach dem früher bewiesenen Satze gleich $\overline{c'c''}$; hieraus folgt $C=\frac{\overline{c'c''}}{\bar{a}}$.

Das nächste Ziel ist die Berechnung der Anzahl derjenigen Paare von Classen c', c'' der quadratischen Körper k' bezüglich k'', für welche $\overline{c'c''}=1$ wird. Wir bedürfen dazu folgender Begriffe und Sätze aus der Theorie der quadratischen Körper:

Ein Ideal des quadratischen Körpers, welches gleich seinem conjugirten und überdies durch keine ganze rationale Zahl theilbar ist,

werde ein *ambiges Ideal* genannt. Die ambigen Ideale setzen sich aus ambigen Primidealen zusammen und diese bestimmen sich durch die Eigenschaft, dass ihre Quadrate den in der Discriminante des Körpers enthaltenen rationalen Primzahlen gleich sind.

Eine Classe des quadratischen Körpers, deren Quadrat die Hauptclasse ist, heisst eine *ambige Classe*. Ist der quadratische Körper imaginär, so enthält jede ambige Classe desselben ein ambiges Ideal und die Anzahl der ambigen Classen ist $= 2^{\sigma-1}$, wo σ die Anzahl der in der Discriminante aufgehenden rationalen Primzahlen ist.

Es seien c', c'' zwei Classen der quadratischen Körper k' bezüglich k'' von der Art, dass $\overline{c'c''} = 1$ wird. Wir wählen dann aus diesen Classen c' und c'' je ein Ideal $\mathfrak{j}'$, bezüglich $\mathfrak{j}''$ aus und setzen $\mathfrak{j}'\mathfrak{j}'' = \mathsf{A}$, wo A eine Zahl des biquadratischen Körpers K bedeutet. Durch Anwendung der Substitution S'' ergiebt sich leicht $(\mathfrak{j}'.S''\mathfrak{j}')\mathfrak{j}''^2 = \mathsf{A}S''\mathsf{A}$ d. h. $\mathfrak{j}''^2 = \alpha''$, wo α'' eine Zahl im quadratischen Körper k'' ist. Es folgt mithin, dass $\mathfrak{j}''$ einer ambigen Classe a'' in k'' angehört und da k'' ein imaginärer quadratischer Körper ist, so ist dem eben angeführten Satze zufolge $\mathfrak{j}''$ einem ambigen Ideale $\mathfrak{a}''$ in k'' äquivalent. Nun liegen, wie man leicht erkennt, sämmtliche ambige Primideale des Körpers k'' zugleich auch in dem quadratischen Körper k'; ausgenommen ist lediglich der Fall $\partial \equiv 1$ nach 4, in welchem das durch Zerlegung der Zahl 2 entstehende ambige Primideal $\mathfrak{l}''$ im Körper k'', aber nicht im Körper k' liegt. Da $\mathfrak{l}'' = 1 + i$ und folglich ein Hauptideal des biquadratischen Körpers K ist, so wird, wenn l'' die durch $\mathfrak{l}''$ bezeichnete Classe in k'' bezeichnet, offenbar $\overline{l''} = 1$. Es sei nun $\mathfrak{a}''$ nicht durch $\mathfrak{l}''$ theilbar und $\mathfrak{a}'$ dasjenige ambige Ideal in k', welches, als Ideal in K betrachtet, dem Ideal $\mathfrak{a}''$ gleich ist, und a' sei die durch $\mathfrak{a}'$ bestimmte ambige Classe in k': es ist dann offenbar $\overline{a'a''} = 1$. Somit gilt der Satz:

Zu jeder ambigen Classe a'' in k'' und nur zu diesen lässt sich eine Classe a' in k' finden derart, dass $\overline{a'a''} = 1$ wird.

Es bleibt jetzt noch übrig, die Frage zu entscheiden, wann zu einer Classe a'' des Körpers k'' mehr als eine Classe c' existirt, für welche $\overline{c'a''} = 1$ wird. Es ist hierzu offenbar nothwendig, dass im Körper k' eine von 1 verschiedene Classe c' existirt, für welche $\overline{c'} = 1$ ist.

Um hierüber zu entscheiden, nehmen wir an, es sei $\mathfrak{h}'$ ein Ideal in k', welches im biquadratischen Körper K ein Hauptideal ist. Setzen wir $\mathfrak{h}' = \mathsf{A}$, wo A eine Zahl in K ist, so wird offenbar $\frac{\mathsf{A}}{S'\mathsf{A}}$ eine Einheit des Körpers K, deren absoluter Betrag $= 1$ und welche daher eine Einheitswurzel ϱ ist. Setzen wir nun $\mathsf{B} = \mathsf{A}, = i\mathsf{A}, = \frac{\mathsf{A}}{1-i}$,

oder $= \frac{\mathsf{A}}{1+i}$, je nachdem ϱ den Werth $+1$, -1, $+i$ oder $-i$ hat, so ergiebt sich $\frac{\mathsf{B}}{S'\mathsf{B}} = 1$ d. h. B ist eine reelle Zahl. Folglich ist $\mathfrak{h}'$ entweder gleich einer reellen Zahl d. h. ein Hauptideal in k' oder $\mathfrak{h}'$ wird gleich einer reellen Zahl, multiplicirt mit einem Ideal $\mathfrak{l}'$, welches als Ideal in K aufgefasst, gleich $1+i$ ist. Da somit $\mathfrak{l}'^2 = 2$ sein muss, so tritt dieser letztere Fall nur unter der Bedingung $\partial \equiv 3$ nach 4 oder $\partial \equiv 0$ nach 2 ein. Umgekehrt bestimmt das durch die Gleichung $\mathfrak{l}'^2 = 2$ definirte Ideal $\mathfrak{l}'$ stets in k' eine Classe l', für welche $\overline{l'} = 1$ wird. Der Fall, in welchem K noch andere Einheitswurzeln enthält, ist leicht für sich erledigt. Es folgt aus unseren Entwicklungen das Resultat:

Die Anzahl der Paare von Classen c', c'' in den Körpern k', bezüglich k'', für welche $\overline{c'c''} = 1$ wird, ist im Falle eines ungeraden ∂ gleich der Zahl $2^{\pi+\varkappa-1}$ oder $= 2^{\pi+\varkappa}$ und im Falle eines geraden ∂ gleich der Zahl $2^{\pi+\varkappa}$ oder gleich $2^{\pi+\varkappa+1}$, je nachdem die Zahl 2, abgesehen von einem Einheitsfactor, das Quadrat einer Zahl des reellen quadratischen Körpers k' ist oder nicht.

Bezeichnen wir nun die Anzahl der Idealclassen c', c'' in den beiden Körpern k', k'' bezüglich mit h', h'', so erhalten wir $h'h''$ Combinationen von der Gestalt $\overline{c'c''}$ und wenn wir diese Anzahl $h'h''$ durch die soeben gefundene Anzahl der die Bedingung $\overline{c'c''} = 1$ erfüllenden Classenpaare dividiren, so ergiebt sich die Anzahl der sämmtlichen von einander verschiedenen Classen $\overline{c'c''}$ des biquadratischen Körpers, welche von der Hauptart sind. Da aber, wie oben angegeben worden ist, genau der $2^{\pi+\varkappa-1}$te Theil bezüglich der $2^{\pi+\varkappa}$te Theil sämmtlicher Geschlechter des Körpers K der Hauptart angehört, jenachdem ∂ ungerade oder gerade ist, so gewinnen wir den Satz:

Die Anzahl der Idealclassen des speciellen Dirichlet'schen Zahlkörpers K ist gleich dem Product der Anzahlen der Idealclassen in den beiden quadratischen Körpern k' und k'' oder gleich der Hälfte dieses Productes, je nachdem in dem reellen quadratischen Körper die Zahl 2, *abgesehen von einem Einheitsfactor, das Quadrat einer Zahl ist oder nicht.*

Bezeichnet α' die Zahl in k', deren Quadrat, abgesehen von einem Einheitsfactor, die Zahl 2 ergiebt, so ist $\frac{1+i}{\alpha'}$ eine Einheit des biquadratischen Körpers K, deren Partialnorm $= \pm i$ wird. Es gilt auch umgekehrt der Satz, dass die Zahl 2, abgesehen von einem Einheitsfactor, gleich dem Quadrat einer Zahl in k' sein muss, sobald in K eine Einheit existirt, deren Partialnorm $= \pm i$ ist. Benutzen wir diese Thatsachen, so können wir den gefundenen Satz auch in folgender Weise aussprechen.

Die Anzahl der Idealclassen in K ist gleich dem Product der Classenanzahlen in k' und k'' oder gleich der Hälfte dieses Productes, je nachdem die Partialnorm der Grundeinheit des Körpers K gleich $\pm i$ oder $= \pm 1$ wird.

Wir erkennen die inhaltliche Uebereinstimmung dieses Satzes mit dem von Dirichlet*) bewiesenen Satze, wenn wir berücksichtigen, dass der von Dirichlet ausgesprochene Satz die Anzahlen von *Formenclassen* mit gegebener Determinante betrifft, während es sich in unserem Satze um Anzahlen von *Idealclassen* der Körper handelt.

Königsberg den 14. April 1894.

*) Werke Bd. 1, S. 618.

Ueber algebraische Raumcurven.

Von

Paul Stäckel in Halle a./S.

In einer kürzlich erschienenen Abhandlung: *Ueber algebraisch rectificirbare Raumcurven**) zeigte ich, dass diese Curven sämmtlich Evoluten algebraischer Raumcurven sind, dass aber nicht umgekehrt jede beliebige algebraische Raumcurve zur Evolutenbildung benutzt werden darf, sondern nur diejenigen, bei welchen der Sinus des Torsionswinkels algebraisch von den Coordinaten abhängt. Für den besonderen Fall, dass die Rückkehrkante der Evolutenfläche in einen Punkt ausartet, führte ich die Untersuchung vollständig durch, und es ergab sich das wichtige Resultat, dass bei den ebenen und sphärischen Curven jene Bedingung für den Sinus des Torsionswinkels stets von selbst erfüllt ist. Dagegen entwickelte ich für die Evoluten algebraischer Raumcurven, deren Evolutenfläche eine wirkliche Rückkehrkante besitzt, zwar eine Reihe von interessanten Sätzen, es gelang mir aber damals nicht explicite alle algebraischen Raumcurven zu bestimmen, für welche der Sinus des Torsionswinkels algebraisch von den Coordinaten abhängt, und es konnte daher scheinen, als ob das Problem alle algebraisch rectificirbaren algebraischen Raumcurven zu ermitteln von mir nur auf eine andere ebenso schwierige Aufgabe zurückgeführt worden sei.

Weitere Forschungen haben mir aber gezeigt, dass gerade diese Zurückführung eine elegante Lösung des Problems liefert, und zwar gelangte ich dazu bei einer genaueren Untersuchung der schon in meiner oben erwähnten Abhandlung (die ich im Folgenden mit A. citiren werde) discutirten *Evoluten sphärischer algebraischer Raumcurven.* Ich werde daher zunächst einige hierauf bezügliche Theoreme herleiten, mit deren Hilfe ich dann die *explicite Bestimmung aller algebraisch rectificirbaren algebraischen Raumcurven* durchführe.

*) Diese Annalen, Bd. 43, S. 171—184.

Nachdem ich noch eine Anwendung des allgemeinen Resultates auf ein Problem aus der Theorie der *Krümmungslinien* gegeben habe, indem ich nämlich alle abwickelbaren algebraischen Flächen mit algebraischen Krümmungslinien bestimme, gehe ich dazu über zu untersuchen, in welcher Weise *der Sinus des Torsionswinkels algebraisch von den Coordinaten abhängt* und werde dadurch veranlasst den von Laguerre für die Ebene eingeführten *courbes de direction* eine entsprechende Classe von Raumcurven an die Seite zu stellen und einige Sätze über diese „D-Curven" herzuleiten.

Zum Schlusse gehe ich auf die schon in A. berührte Frage ein, wann eine *rationale Raumcurve* gleichzeitig *Schraubenlinie* ist und beweise im Besonderen einen dort mitgetheilten Satz über *Raumcurven dritter Ordnung.*

1.

Ich erinnere zunächst an einige Gleichungen aus der Theorie der *Evoluten von Raumcurven.*

Ist (x, y, z) eine algebraisch rectificirbare algebraische Raumcurve und s ihre Bogenlänge, so stellen die Gleichungen:

$$(1)\qquad \begin{aligned} \xi &= x - (s - s_0)\frac{dx}{ds}, \\ \eta &= y - (s - s_0)\frac{dy}{ds}, \\ \zeta &= z - (s - s_0)\frac{dz}{ds}, \end{aligned}$$

in denen s_0 eine Constante bedeutet, eine *Evolvente* (ξ, η, ζ) der Curve (x, y, z) dar, und hieraus folgt, dass jede solche Raumcurve (x, y, z) die *Evolute* einer algebraischen Raumcurve (ξ, η, ζ) sein muss.

Ist umgekehrt (ξ, η, ζ) eine algebraische Raumcurve, so denke man sich, was immer möglich ist, ihre Coordinaten ξ, η, ζ in der Weise durch eine unabhängige Veränderliche t ausgedrückt, dass sie algebraisch von t abhängen. Ihre Ableitungen nach t mögen beziehungsweise mit ξ', η', ζ'; ξ'', η'', ζ''; $\xi''', \eta''', \zeta'''$; ... bezeichnet werden. Dann lauten die *Monge-Lancret'schen Gleichungen* für die ∞^1 Evoluten der Curve (ξ, η, ζ):

$$(2)\qquad (x-\xi)\xi' + (y-\eta)\eta' + (z-\zeta)\zeta' = 0,$$

$$(3)\qquad (x-\xi)\xi'' + (y-\eta)\eta'' + (z-\zeta)\zeta'' = \xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2,$$

$$(4)\qquad (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2 = \varrho^2 : \sin^2(\vartheta - \vartheta_0).$$

In ihnen bedeutet ϱ den *Krümmungsradius* der Curve im Punkte (ξ, η, ζ), welcher durch die Gleichung:

$$(5)\qquad \varrho^2 = \frac{(\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2)^3}{(\eta'\zeta'' - \eta''\zeta')^2 + (\zeta'\xi'' - \zeta''\xi')^2 + (\xi'\eta'' + \xi''\eta')^2}$$

gegeben wird, und der Torsionswinkel $\vartheta - \vartheta_0$*) ist definirt als das Integral über den infinitesimalen Torsionswinkel $d\vartheta$, man hat also:

$$(6)\quad \vartheta - \vartheta_0 = \int \begin{vmatrix} \xi' & \xi'' & \xi''' \\ \eta' & \eta'' & \eta''' \\ \zeta' & \zeta'' & \zeta''' \end{vmatrix} \frac{(\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2)^{\frac{1}{2}}}{(\eta'\zeta'' - \eta''\zeta')^2 + (\zeta'\xi'' - \zeta''\xi')^2 + (\xi'\eta'' - \xi''\eta')^2}\, dt.$$

Sollen also x, y, z algebraisch von t abhängen, so muss $\sin(\vartheta - \vartheta_0)$ eine algebraische Function von t werden. Sobald aber diese Bedingung erfüllt ist, ergiebt sich auch der Bogen s als algebraische Function von t, denn vermöge (1) und (4) ist:

$$(7)\qquad (s - s_0)^2 = \varrho^2 : \sin^2(\vartheta - \vartheta_0),$$

und daher:

$$(8)\qquad s - s_0 = -\varrho : \sin(\vartheta - \vartheta_0);$$

das negative Vorzeichen ist gewählt worden, damit die späteren Rechnungen sich möglichst bequem gestalten. *Es kommt mithin genau auf dasselbe heraus, ob man verlangt, dass der Sinus des Torsionswinkels der Evolvente* (ξ, η, ζ) *algebraisch von ihren Coordinaten abhängt, oder ob man fordert, dass ihre Evoluten* (x, y, z) *algebraisch rectificirbare algebraische Raumcurven sind.*

2.

Soweit war die allgemeine Untersuchung im Abschnitte 3 von A. geführt worden. Im Abschnitte 5 hatte ich dann die *sphärischen* algebraischen Raumcurven untersucht und in diesem besonderen Falle durch ein Verfahren, welches die Benutzung der *Monge-Lancret'schen Gleichungen* nicht erforderte, gezeigt, dass die Evoluten solcher Curven stets algebraisch rectificirbar sind. Hieraus folgt, dass bei allen sphärischen algebraischen Curven der Sinus ihres Torsionswinkels algebraisch von den Coordinaten abhängt, und es wird nahe liegen, hierfür einen directen Beweis zu suchen. Ein solcher Beweis aber ergiebt sich, wenn man eine bekannte Formel aus der allgemeinen Theorie der Raumcurven in einer Weise umformt, welche, wie mir scheint, die Bedeutung dieser Formel erst in das rechte Licht treten lässt.

Es handelt sich um die meines Wissens zuerst von de Saint-Venant im Jahre 1844 aufgestellte Formel:

$$(\mathrm{A})\qquad R^2 = \varrho^2 + r^2\left(\frac{d\varrho}{d\sigma}\right)^2,$$

*) In A. hatte ich diese Grösse als *totale Torsion* bezeichnet. Ich ziehe es aber vor, um Missverständnisse zu beseitigen, diese Benennung aufzugeben und den von Herrn Hoppe (Journal für Mathematik, Bd. 58, S. 374, 1860) vorgeschlagenen Ausdruck: Torsionswinkel zu gebrauchen.

in welcher $d\sigma$ das Bogenelement der Curve (ξ, η, ζ), ϱ den Krümmungs-, r den Torsionsradius und R den Halbmesser der Schmiegungskugel bezeichnet.*) Beachtet man nun, dass

$$r = \frac{d\sigma}{d\vartheta}$$

ist, so geht (A) über in

$$(A') \qquad R^2 = \varrho^2 + \left(\frac{d\varrho}{d\vartheta}\right)^2;$$

diese Formel hat bereits Herr Schell im Jahre 1859 angegeben.**)

Ist nunmehr im Besonderen die betrachtete Raumcurve eine sphärische, so ist R constant und aus

$$d\vartheta = \frac{d\varrho}{\sqrt{R^2 - \varrho^2}}$$

folgt durch Integration

$$(B) \qquad \frac{\varrho}{R} = -\sin(\vartheta - \vartheta^*),$$

wo die Integrationsconstante ϑ^* so zu bestimmen ist, dass für $\vartheta = \vartheta^*$ der Krümmungsradius ϱ verschwindet. Bei sphärischen Curven lässt sich also die Formel (A) so deuten, dass *der auf den Radius der Kugel als Längeneinheit bezogene Krümmungsradius, abgesehen vom Vorzeichen, gleich dem Sinus des zugehörigen, von einem gewissen Anfangspunkte aus gezählten Torsionswinkels ist.*

Ob die Formel (B) auf Neuheit Anspruch machen darf, will ich dahingestellt sein lassen, da eine solche Umformung von (A) ja recht nahe liegt. Es könnte scheinen, als ob sie sich in Salmon-Fiedler's *analytischer Geometrie des Raumes* findet.***) Dort heisst es nämlich, nachdem in Art. 130 $d\eta$ als infinitesimaler Torsionswinkel definirt worden ist, in Art. 137:

„*Den Radius der durch vier auf einander folgende Punkte bestimmten Kugel zu finden.* (Schmiegungskugel.)

Ist R der Radius einer Kugel, ϱ der Radius der von ihr mit einer Ebene, die gegen die Normalebene in irgend

*) de Saint-Venant, Mémoire sur les lignes courbes non planes, présenté à l'académie des sciences le 16. sept. 1844, Journal de l'école polytechnique, Cahier 30, S. 1—76, Paris 1845 (Formel (y'') auf S. 76). Wenn Paul Serret auf Seite 37 seines schönen Werkes: Théorie nouvelle géometrique et mécanique des lignes à double courbure, Paris 1860 die Entdeckung der Relation (A) J. A. Serret zuschreibt, so bezieht er sich wohl auf dessen Abhandlung: Sur quelques formules relatives à la théorie des courbes à double courbure, Journal de mathématiques t. XVI, welche zeigt, dass in der That auch dieser die Formel (A) entdeckt hat (Formel 26, Seite 302). Diese Abhandlung erschien jedoch erst 1851.

**) Allgemeine Theorie der Curven doppelter Krümmung, Leipzig 1859, S. 44, wo sich auch ein einfacher geometrischer Beweis dieser Formel findet.

***) Analytische Geometrie des Raumes, II. Theil. 3. Auflage, Leipzig 1880. Seite 172.

einem Punkte den Winkel η bildet, bestimmten Schnittes, so ist nach dem Satze von Meunier

(9) $$R \cos \eta = \varrho;$$

und für eine darauf folgende Ebene, welche den Winkel $\eta + d\eta$ macht,

(10) $$d\varrho = - R \sin \eta \, d\eta.$$

Also ist:

$$R^2 = \varrho^2 + \left(\frac{d\varrho}{d\eta}\right)^2.\text{“}$$

Man überzeugt sich aber leicht, dass der Winkel η im Allgemeinen von dem Torsionswinkel $\int d\eta$ verschieden ist. Denn betrachtet man beispielsweise eine Curve von constanter Krümmung aber variabler Torsion — und jeder sphärischen Raumcurve ist eine solche Curve zugeordnet*) —, so wird nach (A′) $R = \varrho$ und aus (9) folgt $\cos \eta = 1$, sodass in diesem Falle η constant, $\int d\eta$ aber variabel ist.

Die Erklärung hierfür zu finden ist nicht schwer. Allerdings erfährt der mit η bezeichnete Winkel den Zuwachs $d\eta$, wo $d\eta$ den infinitesimalen Torsionswinkel bedeutet. Dass deshalb η gleich dem Torsionswinkel ist, darf man aber nur dann schliessen, wenn es immer derselbe Winkel ist, der sich um den infinitesimalen Torsionswinkel vermehrt. Das ist jedoch nicht der Fall, da sich die Kugel vom Radius R und ihre Normalebene ändern, wenn man zu einem fünften Punkte der Curve übergeht.

Es lässt sich auch sofort entscheiden, wann η wirklich der Torsionswinkel ist. Aus (9) folgt nämlich durch Differentiation:

$$\delta R \cos \eta - R \sin \eta \, \delta \eta = \delta \varrho.$$

Soll also $d\eta = \delta \eta$ sein, so zeigt (10), dass identisch

$$\delta R \cdot \cos \eta = 0$$

sein muss. Mithin ist R constant, da $\cos \eta = 0$ auf den Grenzfall $R = \infty$ führt. Ist aber R constant, so ist die Curve entweder eine sphärische oder eine Curve constanter Krümmung.**) Die zweite Möglichkeit muss jedoch ausgeschlossen werden, da, wie eben bewiesen wurde, bei ihr (9) übergeht in $R = \varrho$; es ist dann $\cos \eta = 1$, also $\sin \eta \, d\eta = \sin \eta \, \delta \eta$, ohne dass deshalb $d\eta = \delta \eta$ zu sein brauchte. Mithin bleibt gerade nur die erste Möglichkeit, die der *sphärischen* Curven übrig, *sodass die Formel* (B) *für die sphärischen Curven charakteristisch ist.*

---

*) Darboux, Leçons sur la théorie générale des surfaces, t. I, Paris 1887, S. 43.

**) J. A. Serret, a. a. O. S. 202.

Diese ausführliche Darlegung des Sachverhalts wird, wie ich hoffe, Missverständnisse beseitigen, zu denen die Fassung des Art. 137 leicht Anlass geben kann.*) Ich möchte aber ausdrücklich hervorheben, dass in ihm ein ebenso eleganter als strenger Beweis der Formel

$$(\mathrm{A}') \qquad R^2 = \varrho^2 + \left(\frac{d\varrho}{d\vartheta}\right)^2$$

gegeben wird. Eine Vereinfachung ist allerdings noch möglich, da man, wie ich einer freundlichen Mittheilung von Herrn W. Dyck entnehme, die Berufung auf den Meunier'schen Satz vermeiden kann; denn es ist geometrisch evident, dass die Schmiegungsebene aus der Schmiegungskugel den Krümmungskreis herausschneidet, und das genügt zur Herleitung der Gleichung

$$(9) \qquad R \cos \eta = \varrho.$$

Wie ich nachträglich gefunden habe, hat auf diese Art bereits 1835 Th. Olivier die Gleichungen (9) und (10) abgeleitet.**) Merkwürdigerweise ist er aber nicht zu der Formel (A') gelangt, vielmehr erhält er nach einer mühsamen Rechnung die unschöne Relation:

$$R = \frac{\sqrt{2\varrho(\varrho + d\varrho)\left(1 - \sqrt{1 - d\vartheta^2}\right) + d\varrho^2}}{d\vartheta},$$

welche allerdings in (A') übergeht, sobald man

$$1 - \sqrt{1 - d\vartheta^2}$$

durch $\frac{1}{2}\, d\vartheta^2$ ersetzt.

3.

Ist die betrachtete sphärische Raumcurve *algebraisch*, so darf man unbeschadet der Allgemeinheit annehmen, dass ihre Coordinaten α, β, γ algebraische Functionen der unabhängigen Veränderlichen t sind, welche die Gleichung:

$$(11) \qquad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$$

identisch erfüllen. Dann ist auch der Krümmungsradius ϱ_s nach (5) eine algebraische Function von t und aus der Formel

$$(\mathrm{B}') \qquad \varrho_s = -\sin(\vartheta - \vartheta^*)$$

folgt daher, dass dasselbe von $\sin(\vartheta - \vartheta^*)$, also auch von $\sin(\vartheta - \vartheta_0)$, gilt, wo ϑ_0 eine willkürliche Constante bedeutet.

Die Formel (B') besagt daher, dass bei einer jeden sphärischen algebraischen Curve der Sinus des Torsionswinkels eine algebraische

*) Am Schlusse des Abschnittes 5 komme ich übrigens hierauf noch einmal zurück und gebe die wahre Verallgemeinerung der Formel (B).

**) De la courbure et de la flexion d'une courbe à double courbure, Journal de l'école polytechnique, Cah. 24, S. 71 (1835).

Function der Coordinaten ist, und hieraus folgt, dass ihre Evoluten algebraisch rectificirbare algebraische Curven sind. Damit ist aber der am Anfange des zweiten Abschnittes angekündigte Beweis erbracht.

Um die Bogenlänge der zu einem bestimmten Werthe von ϑ_0 gehörigen Evolute zu ermitteln, schreibe ich (B′) in der Form:

$$\vartheta - \vartheta_0 = \vartheta^* - \vartheta_0 - \arcsin \varrho_s$$

und erhalte hieraus vermöge (8):

$$s - s_0 = \frac{\varrho_s}{\cos(\vartheta^* - \vartheta_0)\,\varrho_s - \sin(\vartheta^* - \vartheta_0)\sqrt{1 - \varrho_s^2}}. \tag{12}$$

Setzt man hierin

$$\vartheta_0 = \vartheta^*,$$

so kommt das *paradoxe Resultat:*

$$s - s_0 = 1. \tag{13}$$

Um zu erkennen, was die Gleichung (13) bedeutet, muss man auf die Gleichungen (1) zurückgehen und entnimmt daraus, dass $s - s_0$ die Länge des Fadens bedeutet, dessen Endpunkt bei der Abwickelung von der Evolute die Evolvente erzeugt. Mithin gehört zu dem Werthe ϑ^* der Constanten ϑ_0 als *ausgeartete Evolute* der Mittelpunkt der Kugel, also der Punkt:

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0.$$

Das Paradoxon tritt also deshalb auf, weil bei der vorliegenden Untersuchung Punktcoordinaten benutzt wurden, während die Definition der Evoluten sich auf ihre Tangenten bezieht, also die gerade Linie als Element des Raumes voraussetzt.

Fasst man die Sache so auf, so tritt an Stelle der Evolute ihre abwickelbare Tangentenfläche, und jetzt hat es nichts überraschendes, wenn diese geradlinige Fläche in einen Kegel übergeht, den Kegel nämlich, dessen Geraden den Mittelpunkt der Kugel:

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$$

mit den Punkten der sphärischen Curve (α, β, γ) verbinden. Man erkennt vielmehr auf diese Weise ohne jede Rechnung, dass bei einer sphärischen Curve (α, β, γ) die Gleichungen

$$(x - \alpha)\,\alpha' + (y - \beta)\,\beta' + (z - \gamma)\,\gamma' = 0, \tag{2'}$$

$$(x - \alpha)\,\alpha'' + (y - \beta)\,\beta'' + (z - \gamma)\,\gamma'' = \alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2, \tag{3'}$$

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + (z - \gamma)^2 = \varrho^2 : \sin^2(\vartheta - \vartheta_0) \tag{4'}$$

für einen gewissen Werth ϑ^* von ϑ_0 durch

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0$$

erfüllt werden müssen. Setzt man aber diese Werthe wirklich ein, so gehen (2′) und (3′) in Identitäten über, während (4′) die Relation:

$$1 = \varrho^2 : \sin^2(\vartheta - \vartheta^*) \tag{4''}$$

ergiebt. Man kommt so zu der Formel:

$$(\mathrm{B}') \qquad \varrho = -\sin(\vartheta - \vartheta^*),$$

und in der That war es gerade diese Ueberlegung, durch welche ich auf die Gleichung (B′) geführt worden bin.

Da ich jedoch diese Herleitung nur als eine heuristische ansah, suchte ich einen directen Beweis zu erhalten, indem ich in (B′) für ϱ und $\vartheta - \vartheta^*$ ihre Werthe aus (5) und (6) einsetzte und gelangte so zu dem rein analytischen Theoreme:

Sind α, β, γ drei Functionen der unabhängigen Veränderlichen t, welche nur der Bedingung unterworfen sind, dass sie die Gleichung:

$$(11) \qquad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$$

identisch erfüllen, so hat man bei richtiger Bestimmung der Integrationsconstanten:

$$(\mathrm{J}) \quad \int \begin{vmatrix} \alpha' & \alpha'' & \alpha''' \\ \beta' & \beta'' & \beta''' \\ \gamma' & \gamma'' & \gamma''' \end{vmatrix} \frac{(\alpha'^2+\beta'^2+\gamma'^2)^{\frac{1}{2}}}{(\beta'\gamma''-\beta''\gamma')^2+(\gamma'\alpha''-\gamma''\alpha')^2+(\alpha'\beta''-\alpha''\beta')^2}\,dt$$

$$= -\arcsin \frac{(\alpha'^2+\beta'^2+\gamma'^2)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{(\beta'\gamma''-\beta''\gamma')^2+(\gamma'\alpha''-\gamma''\alpha')^2+(\alpha'\beta''-\alpha''\beta')^2}}.$$

Da die *Identität* (J), welche mit der Formel (B′) vollständig gleichbedeutend ist, für die folgenden Untersuchungen grosse Wichtigkeit besitzt, will ich im folgenden Abschnitte ihre Richtigkeit auf analytischem Wege feststellen.

4.

Wird zur Abkürzung

$$(14) \quad \beta'\gamma'' - \beta''\gamma' = a, \quad \gamma'\alpha'' - \gamma''\alpha' = b, \quad \alpha'\beta'' - \alpha''\beta' = c$$

gesetzt, so folgt aus

$$\int \frac{(a\alpha'''+b\beta'''+c\gamma''')(\alpha'^2+\beta'^2+\gamma'^2)^{\frac{1}{2}}}{a^2+b^2+c^2}\,dt = -\arcsin \frac{(\alpha'^2+\beta'^2+\gamma'^2)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

durch Differentiation:

$$(15) \quad (a\alpha''' + b\beta''' + c\gamma''')\sqrt{a^2+b^2+c^2-(\alpha'^2+\beta'^2+\gamma'^2)^3}$$
$$= (aa' + bb' + cc')(\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2)$$
$$- 3(a^2+b^2+c^2)(\alpha'\alpha'' + \beta'\beta'' + \gamma'\gamma'').$$

Um diese Gleichung zu verificiren leite ich aus (11) durch Differentiation her:

(16) $$\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' = 0,$$

(17) $$\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 + \alpha\alpha'' + \beta\beta'' + \gamma\gamma'' = 0,$$

(18) $$3(\alpha'\alpha'' + \beta'\beta'' + \gamma'\gamma'') + \alpha\alpha''' + \beta\beta''' + \gamma\gamma''' = 0$$

und bilde die Determinante:

(19) $$A = \begin{vmatrix} \alpha & \alpha' & \alpha'' \\ \beta & \beta' & \beta'' \\ \gamma & \gamma' & \gamma'' \end{vmatrix}.$$

Dann wird:

$$A \cdot A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \alpha\alpha''+\beta\beta''+\gamma\gamma'' \\ 0 & \alpha'^2+\beta'^2+\gamma'^2 & \alpha'\alpha''+\beta'\beta''+\gamma'\gamma'' \\ \alpha\alpha''+\beta\beta''+\gamma\gamma'' & \alpha'\alpha''+\beta'\beta''+\gamma'\gamma'' & \alpha''^2+\beta''^2+\gamma''^2 \end{vmatrix}$$
$$= (\alpha'^2+\beta'^2+\gamma'^2)(\alpha''^2+\beta''^2+\gamma''^2) - (\alpha'\alpha''+\beta'\beta''+\gamma'\gamma'')^2$$
$$- (\alpha'^2+\beta'^2+\gamma'^2)(\alpha\alpha''+\beta\beta''+\gamma\gamma'')^2,$$

und vermöge (17) und der *Lagrange'schen Identität:*

(20) $$\begin{aligned}&(\beta'\gamma''-\beta''\gamma')^2 + (\gamma'\alpha''-\gamma''\alpha')^2 + (\alpha'\beta''-\alpha''\beta')^2 \\ &= (\alpha'^2+\beta'^2+\gamma'^2)(\alpha''^2+\beta''^2+\gamma''^2) - (\alpha'\alpha''+\beta'\beta''+\gamma'\gamma'')^2\end{aligned}$$

ergiebt sich schliesslich:

(21) $$A^2 = a^2 + b^2 + c^2 - (\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2)^3.$$

Weiter setze ich

(22) $$B = \begin{vmatrix} \alpha' & \alpha'' & \alpha''' \\ \beta' & \beta'' & \beta''' \\ \gamma' & \gamma'' & \gamma''' \end{vmatrix}$$

und bilde das Product:

$$A \cdot B = \begin{vmatrix} 0 & -(\alpha'^2+\beta'^2+\gamma'^2)^2 & -3(\alpha'\alpha''+\beta'\beta''+\gamma'\gamma'') \\ \alpha'^2+\beta'^2+\gamma'^2 & \alpha'\alpha''+\beta'\beta''+\gamma'\gamma'' & \alpha'\alpha'''+\beta'\beta'''+\gamma'\gamma''' \\ \alpha'\alpha''+\beta'\beta''+\gamma'\gamma'' & \alpha''^2+\beta''^2+\gamma''^2 & \alpha''\alpha'''+\beta''\beta'''+\gamma''\gamma''' \end{vmatrix}$$
$$= (\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2)\,[(\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2)(\alpha''\alpha''' + \beta''\beta''' + \gamma''\gamma''')$$
$$-(\alpha'\alpha''+\beta'\beta''+\gamma'\gamma'')(\alpha'\alpha'''+\beta'\beta'''+\gamma'\gamma''')]$$
$$- 3(\alpha'\alpha'' + \beta'\beta'' + \gamma'\gamma'')\,[(\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2)(\alpha''^2 + \beta''^2 + \gamma''^2)$$
$$- (\alpha'\alpha'' + \beta'\beta'' + \gamma'\gamma'')^2].$$

Aus (20) folgt aber durch Differentiation:

(23) $$\begin{aligned}&(\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2)(\alpha''\alpha''' + \beta''\beta''' + \gamma''\gamma''') \\ &\qquad - (\alpha'\alpha'' + \beta'\beta'' + \gamma'\gamma'')(\alpha'\alpha''' + \beta'\beta''' + \gamma'\gamma''') \\ &= aa' + bb' + cc',\end{aligned}$$

mithin wird:

$$A \,.\, B = (aa'+bb'+cc')(\alpha'^2+\beta'^2+\gamma'^2) \\ -3(a^2+b^2+c^2)(a'\alpha''+\beta'\beta''+\gamma'\gamma''). \tag{24}$$

Jetzt aber erhält man durch Verbindung von (21) und (24) gerade die zu beweisende Gleichung (15), aus welcher man durch Integration die Richtigkeit der Identität (J) erschliesst.

5.

Die auf so verschiedene Arten hergeleitete Identität (J) soll jetzt genauer betrachtet werden, und da erkennt man sofort, dass ihre linke Seite die bemerkenswerthe Eigenschaft hat, *invariant* zu bleiben, wenn

$$\alpha', \beta', \gamma'$$

beziehungsweise durch

$$\xi' = \mu\alpha', \quad \eta' = \mu\beta', \quad \zeta' = \mu\gamma' \tag{25}$$

ersetzt wird, wo μ eine beliebige Function von t bedeutet.

Diese Eigenschaft ist geometrisch aufgefasst fast selbstverständlich. Die Gleichungen (25) besagen nämlich, dass die *Tangenten* der Curven (ξ, η, ζ) und (α, β, γ) in entsprechenden Punkten, das heisst in Punkten, welche zu demselben Werthe von t gehören, *parallel* sind. Dann aber sind auch in entsprechenden Punkten die *Schmiegungsebenen* parallel, mithin stimmen dort auch die *infinitesimalen Torsionswinkel* überein, und das ist eben die geometrische Bedeutung jener *Invarianteneigenschaft.*

Man wird so darauf geführt jeder beliebigen Raumcurve (ξ, η, ζ) eine sphärische Raumcurve (α, β, γ) durch die Gleichungen

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1, \tag{11}$$

$$\xi' = \mu\alpha', \quad \eta' = \mu\beta', \quad \zeta' = \mu\gamma' \tag{25}$$

zuzuordnen und hat dann, wenn ϱ_s den Krümmungsradius der sphärischen Curve bezeichnet, während ϑ die alte Bedeutung hat:

$$\sin(\vartheta - \vartheta_0) = -\varrho_s. \tag{C}$$

Dass eine solche Zuordnung immer möglich ist, ergiebt sich analytisch daraus, dass man vier Bedingungsgleichungen, aber auch vier zu bestimmende Functionen $\alpha, \beta, \gamma, \mu$ hat. Geometrisch aber folgt es daraus, dass die sphärische Curve (α, β, γ) ja nur die Eigenschaft zu haben braucht, in entsprechenden Punkten parallele Tangenten oder, was dasselbe ist, parallele Schmiegungsebenen zu besitzen. Eine solche Zuordnung ist also sogar auf unendlich viele Arten möglich.

Auf diese Weise gewinnt man, und das ist hier der entscheidende Gesichtspunkt, für den Sinus des Torsionswinkels einer beliebigen Raumcurve einen neuen Ausdruck, und es lässt sich dadurch die Bedingung, dass bei einer algebraischen Raumcurve dieser Sinus

algebraisch von den Coordinaten abhängen soll, auf eine handlichere Form bringen, es muss nämlich *der Krümmungsradius der zugeordneten sphärischen Curve* (α, β, γ) *eine algebraische Function von* t *sein.*

Das ist sicher der Fall, wenn diese sphärische Curve selbst algebraisch ist. Es lässt sich aber zeigen, dass es auch nur unter dieser Bedingung eintritt, oder genauer, dass es dann und nur dann eintritt, wenn unter den unendlich vielen sphärischen Curven (α, β, γ) auch algebraische vorhanden sind.

Zu diesem Zwecke dient folgende geometrische Hilfsbetrachtung. Aus der Definition der *Evoluten* (x, y, z) folgt, dass die *Schmiegungsebene* im Punkte (x, y, z) durch die *Tangente* der *Evolvente* im entsprechenden Punkte (ξ, η, ζ) geht. Da weiter die Tangente in (x, y, z) auf der Tangente in (ξ, η, ζ) senkrecht steht, so ist die Hauptnormale der Evolute der Tangente der Evolvente parallel. Betrachtet man aber die *sphärische Indicatrix* der Evolute (x, y, z), das heisst die Curve, welche entsteht, wenn man diese Evolute durch parallele Tangenten auf der Einheitskugel

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$$

abbildet,*) so ist klar, dass die Tangente der sphärischen Indicatrix der Hauptnormale ihrer Curve (x, y, z) parallel sein muss. *Folglich ist die Tangente der sphärischen Indicatrix* (α, β, γ), *welche zur Evolute* (x, y, z) *gehört, der Tangente der Evolvente* (ξ, η, ζ) *parallel,* und diese Indicatrix ist also eine der zugeordneten sphärischen Curven (α, β, γ), die oben betrachtet wurden.

Dies festgestellt, sei ϱ_s und damit auch $\sin(\vartheta - \vartheta_0)$ eine algebraische Function von t. Dann sind alle ∞^1 Evoluten (x, y, z) der Curve (ξ, η, ζ) algebraische Curven, mithin gilt dasselbe von der sphärischen Indicatrix einer Evolute (x, y, z), und es giebt daher sogar unendlich viele zugeordnete Curven (α, β, γ), welche algebraisch sind. *Mithin haben die algebraischen Raumcurven, bei denen der Sinus des Torsionswinkels algebraisch von den Coordinaten abhängt, die charakteristische Eigenschaft, dass unter ihren zugeordneten sphärischen Curven* (α, β, γ) *algebraische vorkommen.*

Damit ist aber die Aufgabe, alle Raumcurven dieser Art zu ermitteln, auf die zurückgeführt, *alle algebraischen Raumcurven zu finden, deren Schmiegungsebenen den Schmiegungsebenen einer gegebenen sphärischen algebraischen Curve parallel sind.* Diese Aufgabe zu lösen hat keine principiellen Schwierigkeiten, und es kann sich nur darum handeln, die Lösung in möglichst einfacher und übersichtlicher Weise durchzuführen.

*) Vergl. Paul Serret, a. a. O. S. 75. Diese Abbildung benutzte aber schon Senff in der auf Anregung von Bartels entstandenen Arbeit: Theoremata principalia e theoria curvarum et superficierum, Dorpat 1831.

Das soll der Gegenstand des folgenden Abschnittes sein. Hier möchte ich aber noch einen *analytischen* Beweis des Satzes geben, dass *die sphärische Indicatrix der Evolute* (x, y, z) *eine zugeordnete sphärische Curve der Evolvente* (ξ, η, ζ) ist und daran eine Bemerkung über die *Lancret'sche Gleichung* knüpfen.

Aus den Definitionsgleichungen der Evolute (x, y, z):

$$\begin{aligned} \xi &= x - (s - s_0)\frac{dx}{dt}, \\ \eta &= y - (s - s_0)\frac{dy}{ds}, \\ \zeta &= z - (s - s_0)\frac{dz}{ds} \end{aligned} \tag{1}$$

folgt durch Differentiation

$$\begin{aligned} \xi' &= -(s - s_0)\frac{d}{dt}\frac{dx}{ds}, \\ \eta' &= -(s - s_0)\frac{d}{dt}\frac{dy}{ds}, \\ \zeta' &= -(s - s_0)\frac{d}{dt}\frac{dz}{ds}. \end{aligned} \tag{26}$$

Nun ist aber

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = ds^2, \tag{27}$$

folglich werden die Gleichungen:

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1, \tag{11}$$

$$\xi' = \mu\alpha', \quad \eta' = \mu\beta', \quad \zeta' = \mu\gamma' \tag{25}$$

identisch erfüllt durch:

$$\alpha = \frac{dx}{ds}, \quad \beta = \frac{dy}{ds}, \quad \gamma = \frac{dz}{ds}, \tag{28}$$

$$\mu = -(s - s_0), \tag{29}$$

womit der Beweis jenes Satzes erbracht ist.

Gleichzeitig hat sich aber auch ergeben, dass $\mu = -(s - s_0)$ ist, und diese Relation hat ebenfalls ihre geometrische Bedeutung. Setzt man nämlich in der Identität (J):

$$\alpha' = \frac{\xi'}{\mu}, \quad \beta' = \frac{\eta'}{\mu}, \quad \gamma' = \frac{\zeta'}{\mu}, \tag{25'}$$

so ergiebt sich eine Identität in ξ, η, ζ, μ, welche unter Benutzung der Gleichungen (5) und (6) für ϱ^2 und $\vartheta - \vartheta_0$ übergeht in:

$$\frac{\varrho}{\mu} = \sin(\vartheta - \vartheta_0). \tag{30}$$

Geht man daher aus von einer gegebenen Raumcurve (ξ, η, ζ) und wählt als zugeordnete sphärische Curve die Indicatrix einer ihrer Evoluten (x, y, z), sodass also

$$\alpha = \frac{dx}{ds}, \quad \beta = \frac{dy}{ds}, \quad \gamma = \frac{dz}{ds} \tag{28}$$

wird, so hat man auch

$$\mu = -(s - s_0), \tag{29}$$

und es ist daher

(31) $$\frac{\varrho}{s-s_0} = -\sin(\vartheta - \vartheta_0);$$

dabei bedeutet $s - s_0$ die Bogenlänge der zum Werthe ϑ_0 gehörigen Evolute (x, y, z). Die Gleichung (31) ist aber vollständig gleichbedeutend mit der früheren Gleichung:

(8) $$s - s_0 = -\varrho : \sin(\vartheta - \vartheta_0),$$

welche ihrerseits vermöge der Gleichungen:

(1) $$\begin{aligned} \xi &= x - (s - s_0)\frac{dx}{ds}, \\ \eta &= y - (s - s_0)\frac{dy}{ds}, \\ \zeta &= z - (s - s_0)\frac{dz}{ds} \end{aligned}$$

aus der Lancret'schen Gleichung:

(4) $$(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2 = \varrho^2 : \sin^2(\vartheta - \vartheta_0)$$

folgte. Hat man also bereits die Gleichung

(30) $$\frac{\varrho}{\mu} = \sin(\vartheta - \vartheta_0),$$

so folgt aus (29) und (1) die Lancret'sche Gleichung (4).

Damit ist aber für die Lancret'sche Gleichung, welche ich im Abschnitte 3 *von A. auf rein geometrischem Wege hergeleitet hatte, ein neuer, sehr durchsichtiger analytischer Beweis gefunden*, denn diese Gleichung folgt aus den Definitionsgleichungen der Evoluten vermöge der Identität (J), sodass man also sagen darf:

Die Identität (J) *und die Lancret'sche Gleichung* (4) *sind vollständig gleichbedeutend.*

Aber noch in anderer Richtung ist die Gleichung

(31) $$\frac{\varrho}{s-s_0} = -\sin(\vartheta - \vartheta_0)$$

von Interesse, sie ergänzt nämlich in erwünschter Weise die Betrachtungen des zweiten Abschnittes, indem sie *die wahre Verallgemeinerung der Relation:*

(B') $$\varrho_s = -\sin(\vartheta - \vartheta^*)$$

liefert, welche dort für sphärische Curven abgeleitet wurde. In der That geht (31) in (B') über, wenn man $\vartheta_0 = \vartheta^*$ setzt und bedenkt, dass dann

(13) $$s - s_0 = 1$$

wird. Man wird also sagen können:

Für jede beliebige Raumcurve hat das Verhältniss

$$\varrho : \sin(\vartheta - \vartheta_0)$$

eine geometrische Bedeutung, es ist nämlich gleich der Bogenlänge der zu dem Werthe ϑ_0 gehörigen Evolute.

6.

Nach dieser Zwischenbemerkung kehre ich zu der Aufgabe zurück, deren Lösung noch zu leisten war, *alle algebraischen Raumcurven zu finden, deren Schmiegungsebenen den Schmiegungsebenen einer gegebenen sphärischen algebraischen Curve parallel sind.*

Wird wie oben:

$$\beta'\gamma''-\beta''\gamma'=a,\quad \gamma'\alpha''-\gamma''\alpha'=b,\quad \alpha'\beta''-\alpha''\beta'=c \tag{14}$$

gesetzt, so lautet die Gleichung der Schmiegungsebene der sphärischen algebraischen Curve (α, β, γ):

$$a(\mathfrak{x}-\alpha)+b(\mathfrak{y}-\beta)+c(\mathfrak{z}-\gamma)=0.$$

Die Gleichung der Schmiegungsebene der algebraischen Curve (ξ, η, ζ) im entsprechenden Punkte lässt sich daher in der Form:

$$a\mathfrak{x}+b\mathfrak{y}+c\mathfrak{z}=\varphi(t)$$

schreiben, wo $\varphi(t)$ eine algebraische Function von t bezeichnet. Nun umhüllen die Schmiegungsebenen einer Raumcurve eine abwickelbare Fläche, deren Rückkehrkante gerade diese Raumcurve ist. Folglich sind die drei gesuchten algebraischen Functionen ξ, η, ζ von t aus den Gleichungen zu bestimmen:

$$\begin{aligned} a\,\xi+b\,\eta+c\,\zeta&=\varphi,\\ a'\xi+b'\eta+c'\zeta&=\varphi',\\ a''\xi+b''\eta+c''\zeta&=\varphi''. \end{aligned} \tag{32}$$

Die Auflösung dieser linearen Gleichungen gestaltet sich am einfachsten, wenn man drei neue Unbekannte u, v, w durch die Gleichungen:

$$\begin{aligned} \xi&=\alpha'u+\alpha''v+\alpha'''w,\\ \eta&=\beta'u+\beta''v+\beta'''w,\\ \zeta&=\gamma'u+\gamma''v+\gamma'''w \end{aligned} \tag{33}$$

einführt. Setzt man noch zur Abkürzung wie früher:

$$\begin{vmatrix} \alpha' & \alpha'' & \alpha''' \\ \beta' & \beta'' & \beta''' \\ \gamma' & \gamma'' & \gamma''' \end{vmatrix}=B \tag{34}$$

und ausserdem:

$$\begin{vmatrix} \alpha' & \alpha''' & \alpha^{IV} \\ \beta' & \beta''' & \beta^{IV} \\ \gamma' & \gamma''' & \gamma^{IV} \end{vmatrix}=C, \tag{35}$$

so folgt aus (32):

$$\begin{aligned} Bw&=\varphi,\\ -Bv\qquad&=\varphi',\\ Bu-B'v-Cw&=\varphi''. \end{aligned} \tag{36}$$

Es ist daher:

$$(37)\qquad \begin{aligned} w &= \frac{\varphi}{B} \\ v &= \quad -\frac{\varphi'}{B} \\ u &= \frac{C\varphi}{B^2} - \frac{B'\varphi'}{B^2} + \frac{\varphi''}{B}. \end{aligned}$$

Mithin leisten die Gleichungen:

$$(38)\qquad \begin{aligned} B^2\xi &= \alpha'(C\varphi - B'\varphi' + B\varphi'') - \alpha'' B\varphi' + \alpha''' B\varphi, \\ B^2\eta &= \beta'(C\varphi - B'\varphi' + B\varphi'') - \beta'' B\varphi' + \beta''' B\varphi, \\ B^2\zeta &= \gamma'(C\varphi - B'\varphi' + B\varphi'') - \gamma'' B\varphi' + \gamma''' B\varphi \end{aligned}$$

die explicite Bestimmung aller algebraischen Raumcurven, bei denen der Sinus des Torsionswinkels algebraisch von den Coordinaten abhängt.

In diesen Gleichungen treten vier algebraische Functionen von t auf, nämlich α, β, γ und φ, welche bis auf die Bedingung:

$$(11)\qquad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$$

vollkommen beliebig, also drei willkürlichen algebraischen Functionen von t äquivalent sind. Hieraus ist zu schliessen, dass die *Mächtigkeit* dieser Raumcurven, im Sinne von Herrn G. Cantor, dieselbe ist wie die aller algebraischen Raumcurven.

7.

Es bleibt übrig mit Hülfe der Ausdrücke für ξ, η, ζ *die explicite Bestimmung aller algebraisch rectificirbaren algebraischen Raumcurven* (x, y, z) durchzuführen. Hierzu dienen die Gleichungen (1), welche sich in:

$$(1')\qquad \begin{aligned} x &= \xi + (s - s_0)\frac{dx}{ds}, \\ y &= \eta + (s - s_0)\frac{dy}{ds}, \\ z &= \zeta + (s - s_0)\frac{dz}{ds} \end{aligned}$$

umformen lassen. Nun war:

$$(28)\qquad \frac{dx}{ds} = \alpha, \quad \frac{dy}{ds} = \beta, \quad \frac{dz}{ds} = \gamma,$$

also wird:

$$(39)\qquad \begin{aligned} x &= \alpha(s - s_0) + \alpha' u + \alpha'' v + \alpha''' w, \\ y &= \beta(s - s_0) + \beta' u + \beta'' v + \beta''' w, \\ z &= \gamma(s - s_0) + \gamma' u + \gamma'' v + \gamma''' w, \end{aligned}$$

und alles kommt darauf an, auch $s - s_0$ durch α, β, γ und φ auszudrücken. Zu diesem Zwecke könnte man auf die Gleichungen (26) zurückgehen, welche mit Hilfe von (28) die Form:

$$(40)\qquad \xi' = -(s - s_0)\alpha', \quad \eta' = -(s - s_0)\beta', \quad \zeta' = -(s - s_0)\gamma'$$

annehmen. Es ist aber vortheilhafter das Resultat in symmetrischer Form zu erhalten. Deshalb differentiire ich die letzte der Gleichungen (32) und finde vermöge (40):

(41) $$B(s-s_0) = a'''\xi + b'''\eta + c'''\zeta - \varphi'''.$$

Werden hierin für ξ, η, ζ ihre Werthe aus (33) eingesetzt und noch zur Abkürzung:

(42) $$\begin{vmatrix} \alpha' & \alpha''' & \alpha^V \\ \beta' & \beta''' & \beta^V \\ \gamma' & \gamma''' & \gamma^V \end{vmatrix} = D$$

eingeführt, so kommt nach einigen Reductionen:

(43) $$B(s-s_0) = 2B'u - (B''-C)v - (2C'-D)w - \varphi''',$$

und es wird daher endlich:

(44) $$B^3(s-s_0) = (2B'C - 2BC' - BD)\varphi + (BB'' - B'^2 - BC)\varphi' + 2BB'\varphi'' - B^2\varphi'''.$$

Demnach sind alle algebraisch rectificirbaren algebraischen Raumcurven enthalten in den Gleichungen (39), *wenn darin für* $s - s_0$, u, v *und* w *die Werthe aus* (44) *und* (37) *eingesetzt werden.* In den so gewonnenen Gleichungen sind α, β, γ und φ algebraische Functionen von t, die nur der Bedingung:

(11) $$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$$

unterworfen sind; die *Mächtigkeit* dieser Curven ist daher dieselbe wie die aller algebraischen Raumcurven.

Kennt man umgekehrt eine algebraisch rectificirbare algebraische Raumcurve (x, y, z), so lassen sich sofort die zugehörigen Functionen α, β, γ und φ angeben. Denn es ist:

(28) $$\alpha = \frac{dx}{ds}, \quad \beta = \frac{dy}{ds}, \quad \gamma = \frac{dz}{ds}$$

und

(32) $$\varphi = a\xi + b\eta + c\zeta,$$

wo a, b, c durch die Gleichungen (14), ξ, η, ζ durch die Gleichungen:

(1'') $$\xi = x - (s-s_0)\alpha, \quad \eta = y - (s-s_0)\beta, \quad \zeta = z - (s-s_0)\gamma$$

bestimmt sind, in denen ausser x, y, z und α, β, γ nur noch die Bogenlänge s vorkommt, sodass die Ermittelung von φ höchstens noch die Ausführung einer *Quadratur* erfordert, welche sich überdies stets auf algebraischem Wege erledigen lässt.

8.

Von den Ergebnissen der vorhergehenden Untersuchung lässt sich eine interessante *Anwendung* auf die Theorie der *Krümmungslinien* machen.

Im Abschnitte 2 von A. zeigte ich, dass *eine abwickelbare algebraische Fläche dann und nur dann algebraische nicht-ebene Krümmungslinien besitzt, wenn ihre Rückkehrkante eine algebraisch rectificirbare algebraische Raumcurve ist.* Alle diese Raumcurven (x, y, z) wurden aber soeben explicite bestimmt. Sind nun α, β, γ die Richtungscosinus der Tangente der Raumcurve x, y, z, so stellen die Gleichungen:

$$(45) \qquad X = x + \alpha\tau, \quad Y = y + \beta\tau, \quad Z = z + \gamma\tau$$

die abwickelbare algebraische Fläche dar, deren Rückkehrkante gerade die Curve (x, y, z) ist. Benutzt man jetzt die Ausdrücke für x, y, z, welche die Gleichungen (39) geben, so erkennt man, dass die gesuchten Flächen dargestellt werden durch:

$$(46) \qquad \begin{aligned} X &= \alpha\sigma + \alpha' u + \alpha'' v + \alpha''' w, \\ Y &= \beta\sigma + \beta' u + \beta'' v + \beta''' w, \\ Z &= \gamma\sigma + \gamma' u + \gamma'' v + \gamma''' w. \end{aligned}$$

Hierin sind α, β, γ und u, v, w algebraische Functionen von t, während σ eine zweite unabhängige Veränderliche bedeutet.

Die Curven $t =$ const. sind die erzeugenden Geraden, die Curven $\sigma =$ const. die nicht-ebenen Krümmungslinien der Fläche, welche mithin algebraische Curven werden, und zwar sind sie gerade die ∞^1 Evolventen (ξ, η, ζ) der Curve (x, y, z).

Hiermit ist die vollständige Lösung der Aufgabe gefunden, *alle abwickelbaren algebraischen Flächen zu bestimmen, welche algebraische nicht-ebene Krümmungslinien besitzen.* Es ist dies um so bemerkenswerther, als bis jetzt nicht viele algebraische Flächen bekannt sind, denen diese Eigenschaft zukommt.

Bekanntlich werden bei einer Transformation durch reciproke Radienvectoren Krümmungslinien in Krümmungslinien übergeführt. Da ferner bei einer Inversion auch jedes algebraische Gebilde in ein algebraisches Gebilde übergeht, so folgt, dass die eben gefundenen abwickelbaren algebraischen Flächen mittelst Inversion algebraische Flächen liefern, bei welchen die eine Schaar der Krümmungslinien aus Kreisen besteht, die alle durch einen Punkt gehen, während die andere Schaar von algebraischen Raumcurven gebildet wird. Die *Dupin'schen Cycliden* bilden einen besonderen Fall dieser interessanten Classe von algebraischen Flächen.

9.

Neben der *Bogenlänge* trat bei den vorhergehenden Untersuchungen als gleichberechtigte Grösse der *Sinus des Torsionswinkels* auf, und wenn zuerst gefragt wurde, wann die Bogenlänge algebraisch von den Coordinaten abhängt, so wurde nachher untersucht, wann dies für den Sinus

des Torsionswinkels gilt. Nun hat Herr Koenigsberger bewiesen, dass die Bogenlänge jeder algebraisch rectificirbaren algebraischen Raumcurve (x, y, z) einer Gleichung zweiten Grades genügt*), es ist nämlich

$$(47)\qquad (s-s_0)^2 = r^2(x, y, z)\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right],$$

wo $r(x, y, z)$, $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{dz}{dx}$ rationale Functionen von x sind. Ich will daher auch für den Sinus der totalen Torsion die Art der algebraischen Abhängigkeit von den Coordinaten bestimmen.

Gegeben sei also eine algebraische Raumcurve (ξ, η, ζ), und es werde angenommen, dass man weiss, der Sinus ihres Torsionswinkels hänge algebraisch von ξ, η, ζ ab. Sieht man daher η und ζ als algebraische Functionen von ξ an, sodass also $t = \xi$ zu nehmen ist, so hat man:

$$(48)\qquad \int \frac{\eta''\zeta''' - \eta'''\zeta''}{(\eta'\zeta'' - \eta''\zeta')^2 + \zeta''^2 + \eta''^2} \sqrt{1 + \eta'^2 + \zeta'^2}\, d\xi = \arcsin F(\xi),$$

wo $F(\xi)$ eine algebraische Function von ξ bedeutet. Nun sind die Ableitungen von η und ζ nach ξ rationale Functionen von ξ, η, ζ, mithin steht in (48) links ein *Abel'sches Integral*, welches an Irrationalitäten ausser η und ζ noch die Quadratwurzel aus der rationalen Function von ξ, η, ζ:

$$1 + \eta'^2 + \zeta'^2$$

enthält.

Jetzt kommt ein Satz von Abel in Betracht**), welcher sich auf die Integration algebraischer Differentiale mittelst Logarithmen bezieht, und nach welchem, wenn eine Relation besteht:

$$(49)\qquad \int \omega\, d\xi = h \log \Phi(\xi),$$

in welcher ω und Φ algebraische Functionen von ξ bedeuten, während h eine Constante ist, alsdann Φ stets als rationale Function von ξ und ω dargestellt werden kann. Es ist aber identisch:

$$(50)\qquad \arcsin \frac{1}{2i}(\Phi - \Phi^{-1}) = -i \log \Phi.$$

Weiss man also, dass

$$(51)\qquad \int \omega\, d\xi = \arcsin F(\xi)$$

ist, wo $F(\xi)$ eine algebraische Function von ξ sein soll, so ist auch

$$(52)\qquad \int \omega\, d\xi = -i \log \Phi(\xi),$$

*) Ueber algebraisch rectificirbare Curven, diese Annalen, Bd. 32, S. 590. 1888.

**) Précis d'une théorie des fonctions elliptiques, Chap. II, § 1. Crelle's Journal, Bd. 4, S. 264.

und $\Phi(\xi)$, welches durch die Gleichung

$$(53) \qquad \Phi - \Phi^{-1} = 2iF$$

definirt wird, ist ebenfalls eine algebraische Function von ξ, mithin nach dem oben erwähnten Abel'schen Theoreme eine rationale Function von ξ und ω. Folglich ist auch nach (53) $F(\xi)$ eine rationale Function von ξ und ω.

Wendet man dieses Resultat auf (48) an, so ergiebt sich, dass $F(\xi)$ eine rationale Function von

$$\xi,\ \eta,\ \zeta,\ \sqrt{1+\eta'^2+\zeta'^2}$$

sein muss, und man erschliesst hieraus weiter, dass sich $F(\xi)$ stets in der Form:

$$(54) \qquad F(\xi) = R_1(\xi, \eta, \zeta) + R_2(\xi, \eta, \zeta)\sqrt{1+\eta'^2+\zeta'^2}$$

darstellen lässt, wo R_1 und R_2 rationale Functionen ihrer Argumente bedeuten.

Hiermit ist aber schliesslich der Satz gewonnen:

Ist bei einer algebraischen Raumcurve der Sinus des Torsionswinkels eine algebraische Function der Coordinaten, so genügt er einer Gleichung zweiten Grades, deren Coefficienten rational von den Coordinaten abhängen.

Es möge noch darauf aufmerksam gemacht werden, dass bei dem Beweise dieses Satzes die Integrationsconstante in (48) ganz willkürlich blieb. Er gilt daher, gleichgültig welches der Anfangspunkt der Zählung für den Torsionswinkel ist, was später von Wichtigkeit sein wird.

Die Gleichung zweiten Grades für $F = \sin(\vartheta - \vartheta_0)$:

$$(55) \qquad F^2 - 2R_1F + R_1^2 - (1+\eta'^2+\zeta'^2)R_2^2 = 0$$

wird *reducibel* im *Rationalitätsbereiche* (ξ, η, ζ), wenn in (54) $F(\xi)$ eine rationale Function von ξ, η, ζ ist. Das kann auf zwei Arten geschehen, indem entweder R_2 identisch verschwindet oder indem

$$1+\eta'^2+\zeta'^2$$

das Quadrat einer rationalen Function von ξ, η, ζ ist. Von besonderer Wichtigkeit ist der zweite Fall, weil er für eine Curvenclasse eintritt, die schon an sich von Bedeutung ist, nämlich für die algebraischen Raumcurven, bei denen die Bogenlänge ein zur Curve selbst gehöriges Abel'sches Integral ist.

Die ebenen algebraischen Curven $\varphi(\xi, \eta) = 0$, denen die entsprechende Eigenschaft zukommt, bei denen also das Bogenelement $d\sigma$ in der Form:

$$(56) \qquad d\sigma = \Re(\xi, \eta)\, d\xi$$

darstellbar ist, sind von Laguerre untersucht worden, der sie *courbes de direction* nannte, weil sie als Enveloppen von Geraden angesehen

werden können, die einen bestimmten Sinn haben.*) Die vorstehenden Betrachtungen zeigen, dass man entsprechend im Raume die Curven (ξ, η, ζ) auszuzeichnen hat, bei denen:

(57) $$d\sigma = \mathfrak{R}(\xi, \eta, \zeta)\, d\xi$$

ist. Um mich kurz ausdrücken zu können, will ich die durch (57) definirten Curven als „*D-Curven*“ bezeichnen.

10.

Auf die *D-Curven* wird man auch durch Untersuchungen ganz anderer Art geführt, wenn man nämlich fragt, wie man einen Satz über ebene Curven, welchen Herr Humbert gefunden hat, auf Raumcurven übertragen kann.

Nachdem Herr Humbert in der interessanten Abhandlung, welche den Ausgangspunkt meiner Arbeit A. bildete**), nachgewiesen hat, dass die Bogenlänge s jeder algebraisch rectificirbaren ebenen algebraischen Curve $f(x, y) = 0$ einer Gleichung zweiten Grades:

(58) $$(s - s_0)^2 = P^2(x, y)\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right]$$

genügt, in welcher P eine rationale Function von x und y bedeutet, fährt er S. 136 folgendermassen fort:

„*De cette équation on déduit que la courbe $f = 0$ est la développée d'une courbe algébrique, et que ces deux courbes se correspondent point par point.*“

In der That stellen die Gleichungen:

(59) $$\begin{aligned} \xi &= x - (s - s_0)\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}} = x - P\frac{\partial f}{\partial y}, \\ \eta &= y + (s - s_0)\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}} = y + P\frac{\partial f}{\partial x}, \end{aligned}$$

vermöge deren ξ und η rationale Functionen von x und y sind, eine Evolvente (ξ, η) der Curve (x, y) dar, während umgekehrt die Evolute (x, y) der Curve (ξ, η) gegeben wird durch:

(60) $$\begin{aligned} x &= \xi - \varrho\frac{d\eta}{d\sigma} = \xi - \frac{1}{\Delta}\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}\left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \eta}\right)^2\right], \\ y &= \eta + \varrho\frac{\partial \xi}{d\sigma} = \eta - \frac{1}{\Delta}\frac{\partial \varphi}{\partial \eta}\left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \eta}\right)^2\right], \end{aligned}$$

*) Nouvelles Annales, série 3, t. II. 1883.

**) Sur les courbes algébriques planes rectifiables, Journal de Mathématiques 4. série. t. 4. S. 135—151. 1888.

wo zur Abkürzung

$$(61)\qquad \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\right)^2 \frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi^2} - 2\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi\,\partial\eta} + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\right)^2 \frac{\partial^2\varphi}{\partial\eta^2} = \Delta$$

gesetzt ist; mithin sind auch x und y rationale Functionen von ξ und η.

Es ist jedoch vielleicht nicht überflüssig dieser Darlegung hinzuzufügen, dass der Beweis des Satzes:

> Jede algebraisch rectificirbare ebene algebraische Curve ist die Evolute einer ebenen algebraischen Curve und umgekehrt

von dem Humbert'schen Satze über die Bogenlänge, welcher in Gleichung (58) seinen Ausdruck findet, *vollständig unabhängig* ist. Zu diesem Beweise genügen die Gleichungen:

$$(59')\qquad \begin{aligned} \xi &= x - (s - s_0)\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}},\\ \eta &= y + (s - s_0)\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}} \end{aligned}$$

in Verbindung mit den Gleichungen (60). Nimmt man aber (58) hinzu, so ergiebt sich der zweite Theil jener Behauptung von Herrn Humbert, dass nämlich die Curven (x, y) und (ξ, η) durch die rationalen Transformationen (59) und (60) in einander übergeführt werden können. Dabei zeigen die Gleichungen (60), dass jedem Punkte (ξ, η) ein bestimmter Punkt (x, y) zugeordnet ist. Zu einem Punkte (x, y) aber gehören, wie schon Herr Humbert bemerkt hat, im allgemeinen zwei Punkte ξ, η, denn die rationale Function P ist nur bis aufs Vorzeichen bestimmt, es sei denn, dass die Curve $f(x, y) = 0$ eine *courbe de direction* ist.

Geht man nunmehr über zur Betrachtung algebraischer *Raumcurven* (x, y, z), so gilt nach Herrn Koenigsberger die der Gleichung (58) entsprechende Relation:

$$(47)\qquad (s - s_0)^2 = r^2(x, y, z)\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right],$$

aus welcher folgt, dass für die Evolventen (ξ, η, ζ) der Raumcurve (x, y, z) die Gleichungen bestehen:

$$(62)\qquad \begin{aligned} \xi &= x - (s - s_0)\frac{dx}{ds} = x - r(x, y, z),\\ \eta &= y - (s - s_0)\frac{dy}{ds} = y - r(x, y, z)\frac{dy}{dx},\\ \zeta &= z - (s - s_0)\frac{dz}{ds} = z - r(x, y, z)\frac{dz}{dx}, \end{aligned}$$

sodass auch in diesem Falle ξ, η, ζ rationale Functionen von x, y, z werden; dabei ist r nur bis aufs Vorzeichen bestimmt, es sei denn, dass die Curve $f(x, y, z) = 0$ eine *D-Curve* ist.

Wie steht es aber, wenn man umgekehrt x, y, z als Functionen von ξ, η, ζ betrachtet? An Stelle der Gleichungen (60) treten dann die *Monge-Lancret'schen Gleichungen:*

$$(2)\qquad (x-\xi)\,\xi' + (y-\eta)\eta' + (z-\zeta)\,\zeta' = 0,$$

$$(3)\qquad (x-\xi)\,\xi'' + (y-\eta)\eta'' + (z-\zeta)\,\zeta'' = \xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2,$$

$$(4)\qquad (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2 = \varrho^2 : \sin^2(\vartheta-\vartheta_0).$$

Aus (2) und (3) erhält man jetzt:

$$x-\xi = \frac{\eta'\zeta''-\eta''\zeta'}{\xi'\eta''-\xi''\eta'}(z-\zeta) - \eta'\cdot\frac{\xi'^2+\eta'^2+\zeta'^2}{\xi'\eta''-\xi''\eta'},$$

$$y-\eta = \frac{\zeta'\xi''-\zeta''\xi'}{\xi'\eta''-\xi''\eta'}(z-\zeta) + \xi'\cdot\frac{\xi'^2+\eta'^2+\zeta'^2}{\xi'\eta''-\xi''\eta'}$$

und findet so für $z-\zeta$ die Gleichung zweiten Grades:

$$(63)\qquad \begin{aligned} 0 = {} & [(\eta'\zeta''-\eta''\zeta')^2 + (\zeta'\xi''-\zeta''\xi')^2 + (\xi'\eta''-\xi''\eta')^2](z-\zeta)^2 \\ & + 2(\xi'^2+\eta'^2+\zeta'^2)[\xi'(\zeta'\xi''-\zeta''\xi')-\eta'(\eta'\zeta''-\eta''\zeta')](z-\zeta) \\ & + (\xi'^2+\eta'^2)(\xi'^2+\eta'^2+\zeta'^2)^2 - (\xi'\eta''-\xi''\eta')^2.\varrho^2 : \sin^2(\vartheta-\vartheta_0). \end{aligned}$$

Wird hierin für ϱ^2 der Werth aus (5) eingesetzt:

$$(5)\qquad \varrho^2 = \frac{(\xi'^2+\eta'^2+\zeta'^2)^3}{(\eta'\zeta''-\eta''\zeta')^2+(\zeta'\xi''-\zeta''\xi')^2+(\xi'\eta''-\xi''\eta')^2},$$

so ergiebt sich für die *Discriminante* der Gleichung (63) der Ausdruck:

$$(\xi'\eta''-\xi''\eta')^2(\xi'^2+\eta'^2+\zeta'^2)^3 : \sin^2(\vartheta-\vartheta_0) - (\xi'^2+\eta'^2+\zeta').\,W,$$

und es ist:

$$(64)\qquad \begin{aligned} W = {} & (\xi'^2+\eta'^2)\,[(\eta'\zeta''-\eta''\zeta')^2 + (\zeta'\xi''-\zeta''\xi')^2 + (\xi'\eta''-\xi''\eta')^2] \\ & - [\xi'(\zeta'\xi''-\zeta''\xi') - \eta'(\eta'\zeta''-\eta''\zeta')]^2 \\ = {} & [\xi'(\eta'\zeta''-\eta''\zeta')+\eta'(\zeta'\xi''-\zeta''\xi')]^2+(\xi'^2+\eta'^2)(\xi'\eta''-\xi''\eta')^2 \\ = {} & (\xi'^2+\eta'^2+\zeta'^2)\,(\xi'\eta''-\xi''\eta')^2. \end{aligned}$$

Die gesuchte Discriminante wird also:

$$(65)\qquad \Delta = (\xi'\eta''-\xi''\eta')^2\,(\xi'^2+\eta'^2+\zeta'^2) : \mathrm{tg}^2(\vartheta-\vartheta_0).$$

Bei dieser Rechnung wurde absichtlich die Hilfsveränderliche t beliebig gelassen, weil man so den Vortheil der Symmetrie hat. Um das erhaltene Resultat anzuwenden muss man aber

$$t = \xi$$

setzen und findet dann:

$$(65')\qquad \Delta = (1+\eta'^2+\zeta'^2) : \mathrm{tg}^2\,(\vartheta-\vartheta_0).$$

Soll also die zum Werthe ϑ_0 gehörige Evolute (x, y, z) der Curve

(ξ, η, ζ) so beschaffen sein, dass x, y, z rationale Functionen von ξ, η, ζ werden, so muss für diesen Werth von ϑ_0 der Ausdruck Δ das Quadrat einer rationalen Function von ξ, η, ζ werden.

Von besonderem Interesse ist der Fall, *dass alle ∞^1 Evoluten der Curve (ξ, η, ζ) diese Eigenschaft besitzen.* Soll das eintreten, so muss für willkürliches ϑ_0:

$$\sqrt{1+\eta'^2+\zeta'^2} : \operatorname{tg}(\vartheta-\vartheta_0) = R(\xi, \eta, \zeta;\ \vartheta_0) \tag{66}$$

sein, wo R in ξ, η, ζ rational ist. Um aus (66) weitere Folgerungen zu ziehen, forme ich diese Gleichung um in

$$\sqrt{1+\eta'^2+\zeta'^2} = R\,.\operatorname{tg}(\vartheta-\vartheta_0) \tag{66'}$$

und differentiire diese Identität partiell nach ϑ_0. Dann kommt:

$$0 = \frac{\partial R}{\partial \vartheta_0}\operatorname{tg}(\vartheta-\vartheta_0) + R : \cos^2(\vartheta-\vartheta_0)$$

und, da $\frac{\partial R}{\partial \vartheta_0}$ nicht identisch verschwinden kann, ist also

$$R = -\frac{\partial R}{\partial \vartheta_0}\sin(\vartheta-\vartheta_0)\cos(\vartheta-\vartheta_0)$$

und

$$\sqrt{1+\eta'^2+\zeta'^2} = -\frac{\partial R}{\partial \vartheta_0}\sin^2(\vartheta-\vartheta_0). \tag{67}$$

Hieraus folgt durch abermalige partielle Differentiation:

$$0 = -\frac{\partial^2 R}{\partial \vartheta_0^2}\sin^2(\vartheta-\vartheta_0) - 2\frac{\partial R}{\partial \vartheta_0}\sin(\vartheta-\vartheta_0)\cos(\vartheta-\vartheta_0)$$

oder, da auch $\frac{\partial^2 R}{\partial \vartheta_0^2}$ nicht identisch verschwinden kann:

$$\operatorname{tg}(\vartheta-\vartheta_0) = -2\frac{\partial R}{\partial \vartheta_0} : \frac{\partial^2 R}{\partial \vartheta_0^2}. \tag{68}$$

Diese Gleichung aber zeigt, dass (66) nur bestehen kann, wenn $\operatorname{tg}(\vartheta-\vartheta_0)$ und mithin auch $\sqrt{1+\eta'^2+\zeta'^2}$ selbst eine rationale Function von ξ, η, ζ ist.

Sollen also die Coordinaten aller ∞^1 Evoluten der Curve (ξ, η, ζ) rationale Functionen von ξ, η, ζ sein, so ist diese Curve nothwendig eine D-Curve.

Jetzt sei umgekehrt (ξ, η, ζ) eine D-Curve, also $\sqrt{1+\eta'^2+\zeta'^2}$ eine rationale Function von ξ, η, ζ. Damit ihre Evoluten (x, y, z) überhaupt algebraische Raumcurven sind, ist nothwendig und hinreichend, dass der Sinus ihres Torsionswinkels algebraisch von den Coordinaten abhängt. Dann aber ist nach (54) sowohl $\sin(\vartheta-\vartheta_0)$ also auch $\cos(\vartheta-\vartheta_0)$ in der Form

$$R_1(\xi, \eta, \zeta) + R_2(\xi, \eta, \zeta)\sqrt{1+\eta'^2+\zeta'^2}$$

darstellbar, mithin, da die Curve (ξ, η, ζ) eine D-Curve ist, eine rationale Function von ξ, η, ζ, und dasselbe gilt daher auch von

$$\sqrt{1+\eta'^2+\zeta'^2} : \operatorname{tg}(\vartheta-\vartheta_0),$$

folglich ist Δ das Quadrat einer rationalen Function von ξ, η, ζ, und es lassen sich mithin x, y, z rational durch ξ, η, ζ ausdrücken.

Das Resultat der vorhergehenden Untersuchung lässt sich in folgenden Lehrsatz zusammenfassen:

Dann und nur dann hat eine algebraische Raumcurve (ξ, η, ζ) mit algebraischen Evoluten (x, y, z) die Eigenschaft, dass die Coordinaten aller ∞^1 Evoluten rational durch ξ, η, ζ ausgedrückt werden können, wenn sie eine D-Curve ist.

Hieraus geht hervor, dass der Humbert'sche Satz über ebene Curven und ihre Evoluten nicht ohne weiteres auf Raumcurven übertragen werden darf, es tritt vielmehr die wesentliche Beschränkung hinzu, dass die Curven *D-Curven* sein müssen, die algebraische Evoluten haben. Eine interessante aber wie es scheint nicht ganz leichte Aufgabe wäre es, alle diese D-Curven explicite zu bestimmen.

11.

Wenn auch durch die vorhergehenden Entwickelungen *die allgemeine Theorie der algebraisch rectificirbaren algebraischen Raumcurven zu einem gewissen Abschlusse gebracht ist*, so bleibt doch, wie schon die am Schlusse von Abschnitt 10 formulirte Aufgabe zeigt, noch viel zu thun, sobald man die betrachteten Curven weiteren Bedingungen unterwirft. Hier will ich nur auf eine am Schlusse des Abschnittes 4 von A. berührte Frage eingehen. Dort theilte ich nämlich einen Lehrsatz über *Raumcurven dritter Ordnung* mit, auf welchen ich bei der Untersuchung des Problems geführt worden bin, *alle rationalen Raumcurven zu bestimmen, welche gleichzeitig Schraubenlinien sind.* Ich will daher zum Schluss noch einige Sätze über solche rationale Raumcurven herleiten, aus denen sich schliesslich ein Beweis für jenen Lehrsatz ergeben wird.

Die Gleichungen:

$$(69)\qquad x=\lambda\frac{A}{D},\quad y=\lambda\frac{B}{D},\quad z=\frac{C}{D},$$

in denen λ eine Constante bedeutet, über welche noch verfügt werden soll, während A, B, C, D ganze rationale Functionen von t des Grades k sind, stellen eine rationale Raumcurve dar, deren Ordnung $\leq k$ ist. Soll diese Curve gleichzeitig eine Schraubenlinie sein, so ist nothwendig und hinreichend, dass bei geeigneter Wahl des Coordinatensystems:

$$(70)\qquad s-s_0=\mu z$$

wird, wo μ eine Constante bedeutet, die nothwendig grösser als 1 ist. Man hat daher, wenn

$$\lambda^2 = \mu^2 - 1 \tag{71}$$

gesetzt wird, die Bedingungsgleichung:

$$(A'D - AD')^2 + (B'D - BD')^2 = (C'D - CD')^2. \tag{72}$$

Denkt man sich nun A, B, C, D als Functionen k^{ten} Grades, so hat man $4k + 4$ homogene Constanten zur Verfügung, während das identische Bestehen der Gleichung (72), welche in t vom Grade $4k-4$ ist, nur $4k - 3$ Bedingungsgleichungen ergiebt. Diese Ueberlegung lässt zwar vermuthen, dass es unter den rationalen Raumcurven jeder Ordnung auch Schraubenlinien giebt, allein das so entstehende *algebraische Problem* durchzuführen dürfte sehr grosse Schwierigkeiten haben. Deshalb verfahre ich anders. Die Gleichung (72) wird in allgemeinster Weise identisch erfüllt, wenn man:

$$\begin{aligned} A'D - AD' &= u^2 - v^2, \\ B'D - BD' &= 2uv, \\ C'D - CD' &= u^2 + v^2 \end{aligned} \tag{73}$$

setzt. Da der Grad der linken Seiten in t die Zahl $2k - 2$ nicht übersteigt, so sind u und v von einem Grade, welcher $\leq k - 1$ ist.

Aus (73) folgt durch Integration

$$x = \lambda \int \frac{u^2 - v^2}{D^2}\, dt, \quad y = \lambda \int \frac{2uv}{D^2}\, dt, \quad z = \int \frac{u^2 + v^2}{D^2}\, dt, \tag{74}$$

und da man unbeschadet der Allgemeinheit stets annehmen darf, dass D nur vom Grade $k - 1$ ist, so wird durch die Gleichungen (74) das Problem darauf zurückgeführt, *alle ganzen rationalen Functionen u, v und D von t, deren Grad $\leq k - 1$ ist, zu finden, für welche die drei Integralausdrücke:*

$$\int \frac{u^2}{D^2}\, dt, \quad \int \frac{2uv}{D^2}\, dt, \quad \int \frac{v^2}{D^2}\, dt$$

rationale Functionen von t des Grades k werden. Diese Aufgabe soll nur für einige besondere Formen von D vollständig durchgeführt werden.

12.

Ist zunächst

$$D = 1, \tag{75}$$

so stellen die Gleichungen

$$x = \lambda \int (u^2 - v^2)\, dt, \quad y = \lambda \int 2uv\, dt, \quad z = \int (u^2 + v^2)\, dt, \tag{76}$$

wenn der Grad der Functionen u und v die Zahl n erreicht, eine rationale Raumcurve der Ordnung

$$k = 2n + 1$$

dar, welche gleichzeitig eine Schraubenlinie ist.

Setzt man im besonderen $k = 3$, so wird $n = 1$, und daher hat man:

$$u = \varrho_1 t + \varrho_0, \qquad v = \sigma_1 t + \sigma_0. \tag{77}$$

Mithin werden alle *cubischen Parabeln*, welche gleichzeitig Schraubenlinien sind, dargestellt durch:

$$\begin{aligned} x &= \lambda\left[\tfrac{1}{3}(\varrho_1^2 - \sigma_1^2)t^3 + (\varrho_1\varrho_0 - \sigma_1\sigma_0)t^2 + (\varrho_0^2 - \sigma_0^2)t\right], \\ y &= \lambda\left[\tfrac{2}{3}\varrho_1\sigma_1 t^3 \quad + (\varrho_1\sigma_0 + \varrho_0\sigma_1)t^2 + \quad 2\varrho_0\sigma_0 t\right], \\ z &= \quad \tfrac{1}{3}(\varrho_1^2 + \sigma_1^2)t^3 + (\varrho_1\varrho_0 + \sigma_1\sigma_0)t^2 + (\varrho_0^2 + \sigma_0^2)t. \end{aligned} \tag{78}$$

Um diese Gleichungen auf eine elegantere Form zu bringen, empfiehlt es sich an Stelle von ϱ_1, ϱ_0, σ_1, σ_0 vier neue Parameter a, b, α, β durch die Gleichungen einzuführen:

$$\begin{aligned} a &= 3(\varrho_1^2 + \sigma_1^2), & b &= \varrho_0^2 + \sigma_0^2, \\ \sin\alpha &= \frac{2\varrho_1\sigma_1}{\varrho_1^2 + \sigma_1^2}, & \cos\alpha &= \frac{\varrho_1^2 - \sigma_1^2}{\varrho_1^2 + \sigma_1^2}, \\ \sin\beta &= \frac{2\varrho_0\sigma_0}{\varrho_0^2 + \sigma_0^2}, & \cos\beta &= \frac{\varrho_0^2 - \sigma_0^2}{\varrho_0^2 + \sigma_0^2}; \end{aligned} \tag{79}$$

man erkennt, dass zu reellen Werthen von ϱ_1, ϱ_0, σ_1, σ_0 stets auch reelle Werthe von a, b, α, β gehören. Auf diese Weise erhält man genau die in meiner ersten Abhandlung angegebenen Gleichungen:

$$\begin{aligned} x &= \lambda\left[\cos\alpha . at + \sqrt{3} . \cos\tfrac{\alpha+\beta}{2}\sqrt{ab} . t^2 + \cos\beta . bt^3\right], \\ y &= \lambda\left[\sin\alpha . at + \sqrt{3} . \sin\tfrac{\alpha+\beta}{2}\sqrt{ab} . t^2 + \sin\beta . bt^3\right], \\ z &= \qquad at + \sqrt{3} . \cos\tfrac{\alpha-\beta}{2}\sqrt{ab} . t^2 + bt^3. \end{aligned} \tag{80}$$

13.

Es sei zweitens D linear in t, also

$$D = t. \tag{81}$$

Setzt man dann:

$$u = u^\alpha t^\alpha + u_{\alpha-1}t^{\alpha-1} + \cdots + u_1 t + u_0, \tag{82}$$

$$v = v_\beta t^\beta + v_{\beta-1}t^{\beta-1} + \cdots + v_1 t + v_0, \tag{83}$$

so wird:

$$t\int\frac{u^2}{t^2}\,dt=\frac{1}{2\alpha-1}\,u_\alpha^2\,t^{2\alpha}+\cdots-u_0^2+2\,u_0u_1t\log t,$$

(84) $$t\int\frac{2uv}{t^2}\,dt=\frac{1}{\alpha+\beta-1}\,u_\alpha v_\beta t^{\alpha+\beta}+\cdots-u_0v_0+(u_0v_1+u_1v_0)t\log t,$$

$$t\int\frac{v^2}{t^2}\,dt=\frac{1}{2\beta-1}\,v_\beta^2\,t^{2\beta}+\cdots-v_0^2+2v_0v_1t\log t.$$

Mithin müssen die Coefficienten u_0, u_1, v_0, v_1 den drei Gleichungen:

(85) $$u_0u_1=0,\quad u_0v_1+u_1v_0=0,\quad v_0v_1=0$$

genügen. Ist aber diese Bedingung erfüllt, so werden die Integralausdrücke (84) ganze rationale Functionen von t beziehungsweise von dem Grade:

$$2\alpha,\quad \alpha+\beta,\quad 2\beta.$$

Damit die Raumcurve von der Ordnung k ist, muss eine dieser drei Zahlen gleich k, die beiden anderen $\leq k$ sein. Wäre nun k ungerade, so könnte nur

$$\alpha+\beta=k,\quad 2\alpha<k,\quad 2\beta<k$$

sein, was unmöglich ist. Folglich kann für $D=t$ die Ordnung k nur eine gerade sein. Ist aber $k=2n$, und setzt man

$$\alpha=\beta=n,$$

so brauchen bloss die Relationen (85) zu bestehen, damit die so entstehende Curve rational, von der Ordnung k und gleichzeitig eine Schraubenlinie ist.

Fasst man die Ergebnisse für $D=1$ und $D=t$ zusammen, so erkennt man, dass die oben ausgesprochene Vermuthung eine richtige war, dass nämlich *unter den rationalen Raumcurven jeder Ordnung k auch Schraubenlinien enthalten sind.*

Ist wieder $k=3$, so erhält man für $D=t$ die *hyperbolischen Parabeln* und findet, dass keine Curve dieser Art zugleich eine Schraubenlinie sein kann.

14.

Endlich sei D vom zweiten Grade in t. Dann darf man unbeschadet der Allgemeinheit

$$D=t^2+h$$

setzen und hat zu unterscheiden, ob die Constante $h=0$ oder $\neq 0$ ist.

Hat man

(86) $$D=t^2,$$

so wird, wenn u und v wieder durch (82) und (83) dargestellt werden:

(87) $$\begin{aligned} t^2\int\frac{u^2}{t^4}dt&=\frac{1}{2\alpha-3}u_\alpha^2t^{2\alpha-1}+\cdots+u_0u_1+2(u_0u_3+u_1u_2)t^2\log t-u_0^2\frac{1}{t},\\ t^2\int\frac{v^2}{t^4}dt&=\frac{1}{2\beta-3}v_\beta^2t^{2\beta-1}+\cdots+v_0v_1+2(v_0v_3+v_1v_2)t^2\log t-v_0^2\frac{1}{t},\end{aligned}$$

sodass also

(88) $$u_0 = 0, \quad v_0 = 0; \qquad u_1 u_2 = 0, \quad v_1 v_2 = 0$$

sein muss. Es bleibt übrig:

(89) $$t^2 \int \frac{uv}{t^4} dt = \frac{1}{\alpha+\beta-3} u_\alpha v_\beta t^{\alpha+\beta-1} + \cdots + (u_1 v_2 + u_2 v_1) t^2 \log t,$$

sodass man noch

(90) $$u_1 v_2 + u_2 v_1 = 0$$

erhält.

Hieraus ergiebt sich ohne Schwierigkeit, dass die Annahme $D = t^2$ gar keine anderen Curven liefert, als wie sie schon durch die Annahme $D = t$ erhalten wurden. Es kommt also, wenn D vom zweiten Grade in t sein soll, nur die Möglichkeit:

(91) $$D = t^2 + h \qquad (h \neq 0)$$

in Betracht.

Um diesen Fall allgemein zu erledigen, erweist es sich als vortheilhaft, u und v auf die Form zu bringen:

(92) $$\begin{aligned} u = {} & u_\alpha D^\alpha + u_{\alpha-1} D^{\alpha-1} + \cdots + u_1 D + u_0 \\ & + t(u'_\beta D^\beta + u'_{\beta-1} D^{\beta-1} + \cdots + u_1' D + u_0'), \end{aligned}$$

(93) $$\begin{aligned} v = {} & v_\gamma D^\gamma + v_{\gamma-1} D^{\gamma-1} + \cdots + v_1 D + v_0 \\ & + t(v'_\delta D^\delta + v'_{\delta-1} D^{\delta-1} + \cdots + v_1' D + v_0'). \end{aligned}$$

Dann wird

$$D \int \frac{u^2}{D^2} dt$$

gleich einer ganzen rationalen Function von t vermehrt um:

$$(2u_0 u_1 - 2h u_0' u_1' + u_0'^2) \cdot D \int \frac{dt}{D} + (u_0^2 - h u_0'^2) \cdot D \int \frac{dt}{D^2}$$
$$+ (2u_0 u_1' + u_1 u_0') \cdot D \int \frac{t\,dt}{D} + 2u_0 u_0' \cdot D \int \frac{t\,dt}{D^2}.$$

Es ist aber:

$$\int \frac{dt}{D} = \frac{1}{\sqrt{h}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{h}}, \qquad \int \frac{dt}{D^2} = \frac{1}{2h} \frac{t}{D} + \frac{1}{2h} \int \frac{dt}{D},$$
$$\int \frac{t\,dt}{D} = \frac{1}{2} \log D, \qquad \int \frac{t\,dt}{D^2} = -\frac{1}{2} \frac{1}{D},$$

mithin erhält man die Bedingungsgleichungen:

(94) $$\begin{aligned} & u_0 u_1' + u_1 u_0' = 0, \\ & 2u_0 u_1 - 2h u_0' u_1' + \tfrac{1}{2} u_0'^2 + \tfrac{1}{2h} u_0^2 = 0. \end{aligned}$$

Ebenso ergiebt sich aus der Betrachtung von

$$\int \frac{v^2}{D^2}\,dt \quad \text{und} \quad \int \frac{uv}{D^2}\,dt,$$

dass man beziehungsweise haben muss:

$$(95)\qquad v_0 v_1' + v_1 v_0' = 0,$$
$$2 v_0 v_1 - 2h v_0' v_1' + \tfrac{1}{2} v_0'^2 + \tfrac{1}{2h} v_0^2 = 0$$

und

$$(96)\qquad u_0 v_1' + u_1 v_0' + v_0 u_1' + v_1 u_0' = 0,$$
$$u_0 v_1 + v_0 u_1 - h(u_0' v_1' + u_1' v_0') + \tfrac{1}{2} u_0' v_0' + \tfrac{1}{2h} u_0 v_0 = 0.$$

Sind die 6 Relationen (94), (95) und (96) zwischen den Coefficienten u_0, u_1, u_0', u_1'; v_0, v_1, v_0', v_1' erfüllt, so muss weiter, damit die Raumcurve von der Ordnung k ist, eine der zehn Zahlen:

$$4\alpha - 1, \qquad 4\beta + 1, \qquad 2\alpha + 2\beta;$$
$$4\gamma - 1, \qquad 4\delta + 1, \qquad 2\gamma + 2\delta;$$
$$2\alpha + 2\gamma - 1, \quad 2\beta + 2\delta + 1, \quad 2\beta + 2\gamma, \quad 2\alpha + 2\delta$$

gleich k, die übrigen $\leq k$ sein, woraus folgt, dass die Ordnung k nothwendig ungerade ist.

Wird wieder $k = 3$ gesetzt, so wird zunächst, da der Grad von u und v höchstens gleich 2 sein kann,

$$\alpha = 1;\ \beta = 0;\ \gamma = 1,\ \delta = 0,$$

also ist:

$$(97)\qquad u = u_1 D + u_0, \quad v = v_1 D + v_0,$$

wo die Coefficienten u_0, u_1; v_0, v_1 den Bedingungsgleichungen genügen müssen:

$$(94')\qquad 2 u_0 u_1 + \frac{1}{2h} u_0^2 = 0,$$

$$(95')\qquad 2 v_0 v_1 + \frac{1}{2h} v_0^2 = 0,$$

$$(96')\qquad u_0 v_1 + v_0 u_1 + \frac{1}{2h} u_0 v_0 = 0.$$

Befriedigt man (94′) durch $u_0 = 0$, so wird nach (96′) $v_0 u_1 = 0$, also, da jetzt $u_1 \neq 0$ sein muss, auch $v_0 = 0$, und es wird daher

$$(98)\qquad u : v = u_1 : v_1.$$

Nimmt man aber an, dass $u_0 \neq 0$ sei, so ist nach (94′) $u_0 = -4h u_1$, und (96′) ergiebt:

$$u_1(4h v_1 + v_0) = 0.$$

Nun ist $u_1 = -\frac{1}{4h} u_0 \neq 0$, also folgt hieraus $v_0 = -4h v_1$, wodurch auch (95′) erfüllt ist. In diesem Falle wird also

$$u = u_1(D - 4h), \quad v = v_1(D - 4h),$$

und es ist daher wieder:

(98) $$u : v = u_1 : v_1.$$

Man erkennt aber leicht, dass die Relation (98) bei eigentlichen Raumcurven nicht bestehen kann, denn die Gleichungen:

(74) $$x = \lambda\int\frac{u^2 - v^2}{D^2}\,dt, \quad y = \lambda\int\frac{2uv}{D^2}\,dt, \quad z = \int\frac{u^2 + v^2}{D^2}\,dt$$

zeigen, dass alsdann x, y und z alle drei derselben Function von t proportional sind, sodass man statt der gesuchten Raumcurve eine *gerade Linie* erhält. Hieraus aber folgt, dass auch unter den *cubischen Ellipsen* und den *cubischen Hyperbeln*, für welche ja $D = t^2 + h$ ist, keine Schraubenlinien vorhanden sein können, und damit ist der oben angekündigte Nachweis erbracht, dass *alle Raumcurven dritter Ordnung, welche zugleich Schraubenlinien sind, durch die Gleichungen* (80) *dargestellt werden.*

Halle a. S., den 14. Juni 1894.

Anzahl der Zerlegungen einer ganzen rationalen Zahl in Summanden.

Von

J. Hermes in Lingen a. d. Ems.

Unter einer erweiterten Lamé'schen Reihe (r^{ter} Ordnung) sei eine Reihe ganzer Zahlen L verstanden, die mit r Nullen und $r+1$ Einsen beginnt und durch das Bildungsgesetz

$$L_{h+1} = L_h + L_{h-r}$$

definirt sein soll.

Für $r = 1$ giebt dies die bekannte Lamé'sche Reihe:

$$0,\ 1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21, \ldots$$

für $r = 2$ lautet die Lamé'sche Reihe zweiter Ordnung:

$$0,\ 0,\ 1,\ 1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 9, \ldots \text{ etc.}$$

Es sind aber auch die aufeinanderfolgenden Potenzen von Zwei in obiger Definition mit einbegriffen, nämlich für $r = 0$. Diese Reihen wollen wir nun zum Beweise eines Satzes über die Anzahl der Zerlegungen einer ganzen Zahl in Summanden benutzen, ausserdem aber noch die *Farey'sche Zahlenreihe*, bestehend aus ganzen Zahlen τ. Bei Behandlung der mir von Prof. Dr. Hurwitz gütigst mitgetheilten Farey'schen Reihen*) und ihrer geometrischen Verwendung kam ich auf die aus ihnen ganz unmittelbar folgende *Zahlen*reihe, aus der sich auch wieder die Farey'schen Bruchreihen verschiedener Ordnungen direct ergeben.

Für unsern jetzigen Zweck ist die ganzzahlige Reihe bequemer.

Die Farey'sche Zahlenreihe sei definirt durch

$$\tau_1 = 1 \quad \text{und} \quad \tau_n = \tau_{(n-2^\nu)} + \tau_{(2^{\nu+1}+1-n)},$$

falls $2^\nu < n \gtreqless 2^{\nu+1}$. Hiernach ergiebt sich die Reihe:

$$1;\ 2;\ 3,\ 3;\ 4,\ 5,\ 5,\ 4; \ldots.$$

Man hat, wenn bereits die ersten 2^ν Zahlen τ berechnet sind,

---

*) Vgl. A. Hurwitz in Zürich: „Ueber die angenäherte Darstellung der Zahlen durch rationale Brüche" wo pag. 2, in der Note, die ausführliche Litteratur über diesen Gegenstand angegeben ist. Vgl. ferner: On a curious property of vulgar fractions von Farey zuerst in Tilloch. Philosoph. magazine and journal T. XLVII 1816. p. 385—386 veröffentlicht. Vgl. auch: Osterprogramm 1891 des kgl. Waisenhauses zu Königsberg. i. Pr.

nur die h^{te} zu der h-letzten zu addiren, um die $2^\nu + h^{te}$ zu erhalten und kann daher das Bildungsgesetz auch

$$\tau_{2^\nu + h} = \tau_h + \tau_{2^\nu - h + 1}$$

schreiben, woher dann die folgenden 2^ν Zahlen vorwärts und rückwärts gelesen dieselben sein müssen, z. B. τ_9 bis τ_{16}:

$$5,\ 7,\ 8,\ 7,\ 7,\ 8,\ 7,\ 5.$$

Zu den Eigenschaften der Zahlen τ_n gehört es nun, dass sie sich in einer *bestimmten*, sogleich näher anzugebenden Weise als Gauss'sche Klammern*) darstellen lassen, doch ist dazu folgende *Bemerkung* nöthig.

Statt des Index n möge nämlich eine Summe abwechselnd positiv und negativ genommener Potenzen von Zwei eingeführt werden, so dass die Summe $= n$ ist. Der Einfachheit halber sollen nur die Differenzen der Exponenten der aufeinanderfolgenden, geordneten Potenzen angegeben werden. Diese Differenzen mögen *Spatien***) heissen. n kann nur auf *eine* Art so dargestellt werden, falls erste und letzte Potenz positiv verlangt werden und Spatien $=$ Null, oder negative Spatien ausgeschlossen sein sollen, z. B.

$$1047 = 2^0 - 2^1 + 2^3 - 2^4 + 2^5 - 2^{10} + 2^{11}.$$

Die Spatien sind hier 0***), 1, 2, 1, 1, 5, 1, daher sei τ_{1047} als

$$\tau(0, 1, 2, 1, 1, 5, 1)$$

bezeichnet. Endigt nämlich bei der Abtrennung der jedesmal nächst grösseren Potenz von 2 zuletzt die Darstellung mit $-2^\varkappa$, so setze man dafür $-2^{\varkappa+1} + 2$ und hebe, falls das vorletzte Glied $2^{\varkappa+1}$ sein sollte, dies gegen $-2^{\varkappa+1}$ fort, also: $1047 = 2^{11} - 1001 = 2^{11} - 2^{10} + 23 =$ etc.

Satz 1. *Die Farey'sche Zahl $\tau(\varkappa, \lambda \ldots \mu, \nu, \varrho)$ ist gleich der Gauss'schen Klammer $[1 + \varkappa, \lambda \ldots \mu, \nu, \varrho]$, wenn die Anzahl der Elemente ungerade.* Ist dagegen die Anzahl der Elemente {oder auch der Spatien} gerade, was gegen die in der *Bemerkung* verlangte Darstellung wäre, so muss man eine Umwandlung vornehmen

*) Vgl. Gauss Werke I, art. 27. Man pflegt jetzt die Gauss'sche Klammer ganz unabhängig von den Kettenbrüchen durch:

$$[\quad] = 1; \quad [\alpha] = \alpha$$

und

$$[\alpha, \beta, \ldots \gamma, \delta, \vdots\, \varepsilon, \zeta, \eta \ldots \vartheta] = [\alpha \ldots, \delta]\,[\varepsilon \ldots \vartheta] + [\alpha \ldots \gamma]\,[\zeta \ldots \vartheta]$$

zu definiren, indem der dazu nöthige Nachweis, dass der Theilstrich an beliebiger Stelle eintreten kann, durch Schluss von n auf $n + 1$ leicht zu führen ist. Im Folgenden wird der Satz:

$$[1, \alpha, \beta, \ldots] = [(\alpha + 1), \beta, \ldots]$$

gebraucht.

**) Eine Marke, um den Uebergang von positiver zu negativer Potenz anzudeuten, ist hier unnöthig, da ein regelmässiger Wechsel stattfinden soll.

***) Eigentlich: ∞, doch möge der kleinste Exponent: $\varkappa$ das Spatium: $\varkappa + \infty$ vertreten.

Beweis. Zunächst folgt unmittelbar aus der Definition der Zahlen τ, dass τ_n (für $n = 2^\nu$) $= \nu + 1$ ist, also: $\tau(\nu_1) = [1 + \nu_1]$; Nehmen wir ferner $(0, \nu_1, \nu_2)$; Dies bedeutet also $\tau_{(2^{\nu_2+\nu_1}-2^{\nu_1}+2^0)}$ und ist, da ja

$$2^{\nu_2+\nu_1} = 2^{\nu_2+\nu_1-1} + 2^{\nu_2+\nu_1-1}$$

gilt, nach der Definition, falls dort

$$2^{\nu_2+\nu_1-1} - 2^{\nu_1} + 2^0 = h$$

gesetzt wird, gleich der Summe:

$$\tau_{(2^{\nu_2+\nu_1-1}-2^{\nu_1}+2^0)} + \tau_{(2^{\nu_1}-2^0+1)};$$

dies ist wieder

$$\begin{aligned} &= \tau_{(2^{\nu_2+\nu_1-2}-2^{\nu_1}+2^0)} + 2\,.\,\tau_{(2^{\nu_1})} \\ &\qquad \text{etc.} \\ &= \tau_{(2^0\qquad\qquad)} + \nu_2 \tau_{(2^{\nu_1})} \\ &= \quad 1 \qquad + \nu_2(\nu_1 + 1) = [1 + \nu_1,\, \nu_2]. \end{aligned}$$

Gilt nun schon:

$$\begin{aligned} \tau(\ \nu_1 \ldots \nu_{2\varkappa-1}) &= [1 + \nu_1 \ldots \nu_{2\varkappa-1}] = K, \\ \tau(0\ \nu_1 \ldots \nu_{2\varkappa}) &= [1 + \nu_1 \ldots \nu_{2\varkappa}] \ \ = K', \end{aligned}$$

so wird

$$\begin{aligned} \tau(\nu_1 \ldots \nu_{2\varkappa+1}) &= \tau\big(\nu_1 \ldots (\nu_{2\varkappa+1} - 1)\big) + \tau(0, \nu_1 \ldots \nu_{2\varkappa}) \\ &= \tau\big(\nu_1 \ldots (\nu_{2\varkappa+1} - 2)\big) + 2K' \\ &= \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ &= \tau(\nu_1 \ldots \nu_{2\varkappa-1}) + \nu_{2\varkappa+1}\,.\,K' \\ &= K + \nu_{2\varkappa+1}\,.\,K' \end{aligned}$$

und dies ist nach der Definition der Gauss'schen Klammer,

$$= [1 + \nu_1, \ldots, \nu_{2\varkappa+1}].$$

Satz 2. *Jede Zahl τ kommt $\varphi(\tau)$-mal vor in der Farey'schen Zahlenreihe, wo φ die bekannte zahlentheoretische Function ist.*

Folgender *Beweis* zu diesem schon bekannten Satze dürfte neu sein.

Legen wir zum Index irgend eines τ' eine höhere Potenz von Zwei, als er schon hat, etwa: $2^{\sigma+\Sigma} = 2^{\sigma+\Sigma+1} - 2^{\sigma+\Sigma}$, hinzu, so möge τ entstehen, also $\tau > \tau'$. In Spatien dargestellt, habe τ' den Index $(\varkappa, \lambda \ldots \varrho)$ und τ den Index $(\varkappa, \lambda \ldots \varrho, \sigma, 1)$, indem

$$\Sigma = \varkappa + \lambda + \cdots + \varrho$$

sein soll. Bilden wir nun bei positiven ganzzahligen $\varkappa, \lambda \ldots \varrho$ [und $\sigma \geqq 0$] alle unechten*) Brüche $\frac{\tau}{\tau'}$, so wird ein solcher Bruch

*) Man könnte zugleich alle reciproken und negativen Brüche $\pm\frac{\tau'}{\tau}$ und $-\frac{\tau}{\tau'}$ einführen und erhält dann die Farey'schen Reihen verschiedener Ordnungen.

$$\frac{\tau}{\tau'} = \frac{[1+\varkappa, \lambda \ldots \varrho, \sigma+1]}{[1+\varkappa, \lambda \ldots \varrho]}$$

gleich dem regelmässigen Kettenbruche $(\sigma+1, \varrho \ldots \lambda, \varkappa+1)$, stellt also stets einen gehobenen Bruch dar, d. h. Zähler und Nenner sind relativ prim zu einander. Wählen wir umgekehrt einen ganz beliebigen unechten, positiven, gehobenen Bruch, so können wir ihn nur auf *eine* Art in einen regelmässigen Kettenbruch mit ungerader Elementenanzahl entwickeln und erhalten daher nach Satz 1 *ein* bestimmtes τ und τ'. Es kommt daher jeder derartige Bruch *einmal* und *nur einmal* vor. Sei jetzt ein bestimmtes τ das letzte in der Farey'schen Zahlenreihe und wählen wir von allen bis dahin, nach dem angegebenen Princip aufgestellten gehobenen, positiven, unechten Brüchen diejenigen mit dem Zähler τ aus:

$$\frac{\tau}{\tau_1'}, \frac{\tau}{\tau_2'}, \ldots, \frac{\tau}{\tau_\varphi'},$$

so müssen dies, weil jeder derartige Bruch einmal und nur einmal auftritt und es nur $\varphi(\tau)$ Zahlen τ' giebt, die $< \tau$ und zugleich relativ prim zu τ sind, der Anzahl nach $\varphi(\tau)$ sein, d. h. also τ kommt $\varphi(\tau)$-mal vor.

Aus der Definition der Zahlen τ folgt, dass sie in Abtheilungen zu 2^{h-1} Zahlen $\{h = 1, 2, \ldots\}$ angeordnet sind, wozu aber noch eine 0^{te} Abtheilung am Anfang, die nur 1 enthält, kommt. Die Anzahlen in den Abtheilungen sind also der Reihe nach $1, 2^0, 2^1, 2^2, \ldots, 2^{h-1}, \ldots$ Die Indices der 2^{h-1} Zahlen τ in der h^{ten} Abtheilung entstehen nach dem auf Seite 372 Gesagten, dadurch, dass zu dem Index $2^{h-1} = 2^h - 2^{h-1}$, womit die $(h-1)^{\text{te}}$ Abtheilung schliesst, die Indices früherer Abtheilungen, die schon auf die verlangte Art als Potenzsummen (von Zwei) dargestellt sind, hinzugefügt werden. Dies muss so geschehen, dass positive und negative Potenzen mit einander abwechseln. Legen wir daher zuerst die Indices der $0^{\text{ten}}, 1^{\text{ten}}, 2^{\text{ten}}, \ldots, (h-2)^{\text{ten}}$ Abtheilung, das sind $1 + 2^0 + 2^1 + \cdots + 2^{h-3} = 2^{h-2}$ Indices, der Reihe nach hinzu, so müssen wir, da die Indices die natürliche Zahlenreihe durchlaufen bis zum Index $2^h - 2^{h-1} + 2^{h-2} = 2^h - 2^{h-2}$ gelangt sein. Hiezu legen wir dann wiederum der Reihe nach die Indices der 0^{ten}, $1^{\text{ten}}, 2^{\text{ten}}, \ldots, (h-3)^{\text{ten}}$ Abtheilung hinzu und stehen dann bei einem τ mit dem Index $2^h - 2^{h-3}$ etc. ...

Es muss jetzt in jeder Abtheilung die *Spatiensumme* für die Indices der einzelnen τ *constant* und zwar in der h^{ten} Abtheilung durchweg $= h$ sein; denn der höchste Exponent von Zwei erreicht gerade diesen Werth und es wechseln auch positive und negative, stets kleiner werdende Potenzen, weil dies schon bei den Indices der früheren Abtheilungen der Fall war, mit einander ab. Theilt man daher h in:

1 und $h-1$, 2 und $h-2, \ldots h$, so erhält man: $2^{h-2}+2^{h-3}+\cdots+1=2^{h-1}$ Zerlegungen von h.

Satz 3. *Alle Gauss'schen Klammern* (mit positiven Elementen) *lassen sich nach der Summe ihrer Elemente in Abtheilungen bringen, die den Abtheilungen der Farey'schen Zahlenreihe entsprechen. Ist die Elementensumme $h+1$, so werden die 2^{h-1} Zahlen τ der h^{ten} Abtheilung, jede jedoch zweimal erhalten.*

Beweis. Nach Satz 1 ist die Summe der Elemente einer Gauss'schen Klammer um 1 grösser als die Spatiensumme und da diese nach der vorhergehenden Bemerkung h war, so muss die Summe der Elemente einer zugehörigen Gauss'schen Klammer $h+1$ sein. Es sind aber in einer Abtheilung, etwa der h^{ten}, wie Seite 372 erwähnt, die 2^{h-2} ersten Werthe τ der ersten Hälfte gleich den 2^{h-2} Werthen τ der zweiten Hälfte, andrerseits kann jede Gauss'sche Klammer [mit mehr als zwei Elementen] auf 4 Arten geschrieben werden:

$$[1+\varkappa, \ldots, \sigma+1]=[1, \varkappa, \ldots, \sigma, 1]=[1, \varkappa, \ldots, \sigma+1]=[1+\varkappa, \ldots, \sigma, 1],$$

wobei zwei Klammern eine gerade, zwei eine ungerade Anzahl Elemente haben. Da nun aus der Spatiensumme der Indices zweier in der Abtheilung symmetrisch liegender Elemente τ, direct irgend zwei dem Werthe nach gleiche Gauss'sche Klammern mit ungerader Elementenanzahl nach Satz 1 erhalten werden, so kann man immer noch die ihnen gleichen mit gerader Anzahl hinzufügen, um so *alle* möglichen Klammern mit der Elementensumme $h+1$ zu erhalten. Es sind deren also 2^h.

Aus Satz 3 wie auch aus der vorhergehenden Bemerkung folgt:

Satz 4. I) *Die Anzahl aller Zerlegungen einer Zahl m in Summanden beträgt, wenn ihre Permutationen*) mitgezählt werden*, 2^{m-1}.

II) *Die einzelnen Zerlegungen liefern*, als Elemente Gauss'scher Klammern aufgefasst, *die 2^{m-2} Farey'schen Zahlen τ der $(m-1)^{\text{ten}}$ Abtheilung, jede zweimal.*

Beweis. Man setze in 3) $m=h+1$.

Beispiel. $m=4$; $h=3$.

$$\left.\begin{array}{r}[1,1,1,1]=5\\ [2,1,1]=5\\ [1,2,1]=4\\ [1,1,2]=5\\ [3,1]=4\\ [1,3]=4\\ [2,2]=5\\ [4]=4\end{array}\right\}\ \text{Die } 3^{\text{te}} \text{ Abtheilung der Farey'schen Zahlenreihe enthält die } 2^2 \text{ Zahlen } 4, 5 \,\vdots\, 5, 4.$$

*) Werden Permutationen *nicht* mitgerechnet, so liefern die Anzahlen der Zerlegungen von $m=1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, \ldots$ die Euler'sche Reihe: 1, 2, 3,

Es sind also $2^3 = 8$ Zerlegungen von der Zahl $m = 4$ in Summanden.

Der Satz 4, I) lässt sich auch beweisen, wie wohl weniger einfach, wenn man die Richtigkeit des folgenden nur auf die Zerlegungen zu einer *gegebenen Anzahl* bezüglichen Satzes darthut:

Satz 5. *Wird eine Zahl m zu je k, $\{resp.\ k'\}$ Summanden auf alle mögliche Art auch mit Permutationen zerlegt, so erhält man* $\binom{m-1}{k-1}$, $\left\{resp.\ \binom{m-1}{k'-1}\right\}$ *Zerlegungen, so dass also auch, wenn $k + k' = m + 1$ ist, diese Anzahlen einander gleich sind,*

$$\binom{m-1}{k-1} = \binom{m-1}{k'-1}.$$

Da die Summe der Binomialcoefficienten gleich 2^{m-1} ist, ergiebt sich dann die Gesammtanzahl aller Zerlegungen gleich 2^{m-1}.

Dieser Satz 4, I) kann aber auch als Specialfall eines allgemeineren Satzes aufgefasst werden. Lässt man den kleinsten Summanden 1 bei der Zerlegung nicht zu, so möge die Zerlegung 1-frei heissen. Die Anzahl der 1-freien Zerlegungen von m ist gleich dem m^{ten} Gliede L_m der gewöhnlichen Lamé'schen Reihe. Schliesst man die Summanden $1, 2, 3, \ldots, r$ aus, so heisst die Zerlegung „$1, 2, \ldots, r$-*frei*“ oder „ϱ als niedrigsten Summanden enthaltend“, $r + 1 = \varrho$; $\varrho - 1 = r$.

Satz 6. *Die Anzahl der $1, 2, \ldots, r$-freien Zerlegungen einer Zahl m in Summanden (Permutationen mitgerechnet) ist gleich dem m^{ten} Gliede der Lamé'schen Reihe r^{ter} Ordnung.*

Dieser Satz kann wieder durch eine Verallgemeinerung von Satz 5 bewiesen werden, in dem zunächst nur permutirte Zerlegung zu je k Summanden betrachtet werden. Die Anzahl derselben sei mit $G_{(m,k,\varrho)}$ bezeichnet. Man hat dann

Satz 7.

$$G_{(m,k,\varrho)} = \frac{(m+1-k\varrho)\,(m+2-k\varrho)\ldots(m+k-1-k\varrho)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots k-1} = \binom{m+k-1-k\varrho}{k-1}$$

zu beweisen.

$$\{G(k=1) = 1\} \qquad \{m \geqq k > 1\}.$$

Zum Beweise brauchen wir folgenden *Hilfssatz* über Binomialcoefficienten:

Hilfssatz.*) *Werden aufeinanderfolgende Binomialcoefficienten der s^{ten} Potenz mit aufeinanderfolgenden Binomialcoefficienten der t^{ten} Potenz einzeln,* [so wie sie „bei willkürlichem Anfange“ untereinander zu stehen kommen] *mit einander multiplicirt, so ist die Summe der*

5, 7, 11, 15, 22, ... vgl. Euler: Introductio in analysin infinitorum Tom. I. C. XVI. De partitione numerorum pag. 275.

*) Vgl. Cauchy: Algebraische Analysis, Note 6.

Producte der $\varrho + 1^{te}$ *Binomialcoefficient* $\binom{s+t}{\varrho}$ *der* $s + t^{ten}$ *Potenz*, [falls die Schluss-1 unter $\binom{s}{\varrho}$ steht.] Hierbei hat man die Reihe der Binomialcoefficienten mit Nullen vervollständigt zu denken.*)

Beweis des Hilfssatzes.

Angenommen, der Satz ist giltig für die s^{te} und $(t-1)^{te}$ Potenz und wir erhielten schon $\binom{s+t-1}{\varrho-1}$ und beim Weiterrücken der zur $(t-1)^{ten}$ Potenz gehörenden Binomialcoefficienten um eine Stelle nach rechts $\binom{s+t-1}{\varrho}$, so wäre die Summe beider $\binom{s+t}{\varrho}$. Dies käme auf dasselbe hinaus, als ob wir mit den zur t^{ten} Potenz gehörenden Binomialcoefficienten multiplicirt und dann addirt hätten. — Dass der Satz am Anfange also bei der Operation mit 1, 1 gilt, ist evident, da zwei aufeinanderfolgende Binomialcoefficienten $\binom{s}{h-1} + \binom{s}{h}$ addirt $\binom{s+1}{h}$ geben.

Beweis zu den Sätzen 7, [6 und 5.]

Nehmen wir an, die G Zerlegungen von m zu je k Summanden, 1-, 2-, $\cdots$, $(\varrho-1)$-frei und permutirt seien aufgestellt. Einige werden die Zahl ϱ als kleinsten ihrer der Grösse nach geordneten Summanden haben.

Trennen wir ϱ als Summand ab, so bleiben die Zerlegungen von $m-\varrho$ zu je $k-1$ übrig. Für $G(m-\varrho,\ k-1,\ \varrho)$ gelte nun bereits die durch Satz 7 verlangte Formel:

$$\binom{m-\varrho+k-2-(k-1)\varrho}{k-2},$$

welche nach dem Hilfssatze

$$\begin{aligned}
&= \binom{k-1}{1}\binom{m-\varrho k-1}{0}\\
&+ \binom{k-1}{2}\binom{m-\varrho k-1}{1}\\
&+ \cdots\cdots\\
&+ \binom{k-1}{h}\binom{m-\varrho k-1}{h-1}\\
&+ \cdots\cdots\\
&+ \binom{k-1}{k-1}\binom{m-\varrho k-1}{k-2}
\end{aligned}$$

*) Z. B.:

	0,	0,	1,	7,	21,	35,	35 ...
	0,	1,	3,	3,	1,	0,	0 ...
Producte:	0,	0,	3,	21,	21,	0,	0

Summe: $45 = \binom{10}{2} = \binom{7+3}{2}$.

ist und in welcher die einzelnen Glieder auf die Anzahl Permutationen gehen, die bei $k-2$, $k-3$, ..., $(k-h-1)\ldots(k-k)=0$ gleichen Summanden ϱ stattfinden. [Dies möge auch Annahme sein, es ist dann zu zeigen, dass die Formel für grössere m und k resp. kleinere ϱ giltig bleibt. Dass sie am Anfange gilt, kann direct verificirt werden. Auch ist

$$\binom{m-k\varrho-1}{k-2}=\binom{m-\varrho-(\varrho+1)(k-1)+k-2}{k-2}$$

und dies muss dann $=G(m-\varrho,\ k-1,\ \varrho+1)$ sein].

Tritt nun ϱ als Summand zu jeder Permutation hinzu, so werden statt

$$\binom{k-1}{h}\binom{m-\varrho k-1}{h-1}$$

jetzt, wo $k-h$ gleiche Summanden ϱ und im Ganzen k Summanden sind $\frac{k}{k-h}$ mal soviel, also:

$$\frac{k}{k-h}\binom{k-1}{h}\binom{m-\varrho k-1}{h-1}=\binom{k}{h}\binom{m-\varrho k-1}{h-1}$$

sein, weil ja

$$\binom{k-1}{h}=\binom{k-1}{k-1-h}$$

ist. Daher erhalten wir:

$$\begin{aligned}&\binom{k}{1}\binom{m-\varrho k-1}{0}\\+&\binom{k}{2}\binom{m-\varrho k-1}{1}\\&\quad\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\+&\binom{k}{k-1}\binom{m-\varrho k-1}{k-2}\\+&\binom{k}{k}\cdot A,\end{aligned}$$

worin A jedoch Null ist. Nun sind aber noch die anderen Permutationen zu je k zu berücksichtigen, die nur höhere Summanden als ϱ ist, haben. Es darf daher, da $\binom{k}{k}=1$ ist, statt A ihre Anzahl $G(m, k, \varrho+1)$, die, wie wir noch zu zeigen haben, gleich

$$\binom{m-(\varrho+1)k+k-1}{k-1},$$

oder was auf dasselbe hinausläuft, gleich

$$\binom{m-\varrho k-1}{k-1}$$

ist, gesetzt werden. Dann hat man aber nach dem Hilfssatz

$$G(m, k, \varrho) = \binom{m + k - 1 - \varrho k}{k - 1},$$

was zunächst bewiesen werden sollte. Um nun zu zeigen, dass

$$G(m, k, \varrho + 1) = \binom{m - (\varrho + 1)k + k - 1}{k - 1}$$

ist, kann man denselben Schluss von vorhin anwenden, denn es ist ja nur ϱ um 1 grösser geworden. Man würde so der Reihe nach für A_i auf $G(m, k, \varrho + 2)$, $G(m, k, \varrho + 3) \ldots G(m, k, P)$ kommen. Dies letzte müsste

$$\binom{m + k - 1 - Pk}{k - 1}$$

sein und wird für $P = \frac{m}{k} =$ ganze Zahl zu $\binom{k-1}{k-1} = 1$. Ist hiebei k so gross als überhaupt möglich $\overline{\gtrless} P$, so bildet diese 1 ein Glied für sich und tritt auch bei Zerlegung von $m - k$, $m - 2k, \ldots$ und schliesslich von k selbst als Anzahl $G(k, 1, k) = 1$ auf.

Für $P > \frac{m}{k}$ wird $\binom{m + k - 1 - Pk}{k - 1} = 0$, wie es sein muss.

Für $P = \left[\frac{m}{k}\right]$ d. h. gleich der grössten im Bruche $\frac{m}{k}$ enthaltenen Anzahl Ganzen, {für $m \equiv \mathfrak{r}$ mod. k und $0 < \mathfrak{r} < k$} erhielten wir $\binom{\mathfrak{r} + k - 1}{k - 1}$. Um die Richtigkeit dieses Werthes nachzuweisen, beachten wir, dass wir ganz wie vorhin, nur dass A jetzt auch Null *bleibt**), die Anzahl der auf $(\ldots PP \ldots P), \ldots, (\ldots PP), (\ldots P)$ schliessenden Permutationen durch

$$\binom{k}{1}\binom{m - Pk - 1}{0} + \binom{k}{2}\binom{m - Pk - 1}{1} + \cdots + \binom{k}{\mathfrak{r}}\binom{m - Pk - 1}{\mathfrak{r} - 1}$$
$$+ \binom{k}{\mathfrak{r} + 1}\binom{m - Pk - 1}{\mathfrak{r}} + \cdots$$

angeben können, es ist aber schon $\binom{m - Pk - 1}{\mathfrak{r}} =$ Null und fallen die folgenden Glieder fort. Was bleibt, ist nach dem Hilfssatze

$$\binom{k + \mathfrak{r} - 1}{\mathfrak{r}} = \binom{k + \mathfrak{r} - 1}{k - 1},$$

wie es sein sollte. —

---

*) Eine Zerlegung für

$$m = \left[\frac{m}{k}\right] k + \mathfrak{r}$$

nämlich:

$$P^{(n)} \ldots P^{(n-1)} \ldots P'' \ldots P' \ldots,$$

worin die gestrichenen $P^{(k)} > P = \left[\frac{m}{k}\right]$ sind, zu je k, kann es nicht geben, denn $kP' > m$.

Was nun endlich der *Beweis von Satz* 6 anbetrifft, so ist leicht zu sehen, dass für $r = \varrho - 1$ $\Sigma G(m-\varrho) + \Sigma G(m-1) = \Sigma G(m)$ ist, und dass daher die Gesammtzahl $\Sigma G(m) = L(m, r)$ gleich dem m^{ten} Gliede der Lamé'schen Reihe r^{ter} Ordnung wird; denn, wenn wir in den Summen linker Hand die zu k und $k+1$ gehörenden Glieder addiren, so wird:

$$\frac{(m-\varrho+1-k\varrho)(m-\varrho+2-k\varrho)\ldots(m-\varrho+k-1-k\varrho)}{1.2\ldots(k-1)}$$
$$+\frac{\big(m-\varrho(k+1)\big)\big(m+1-\varrho(k+1)\big)\cdots\big(m+k-1-\varrho(k+1)\big)}{1.2\ldots k}$$
$$=\frac{\big(m+1-\varrho(k+1)\big)\big(m+2-\varrho(k+1)\big)\ldots\big\{m-\varrho(k+1)+k\big\}}{1.2\ldots k}=G(m,k)$$

d. h. ein zur rechtsstehenden Summe gehöriges Glied und zwar das, welches zu $k+1$ in Beziehung steht. [Satz 5 und Satz 4, I) sind als Specialfälle einbegriffen.]

Wir erhalten hieraus eine *Formel für das* m^{te} *Glied der Lamé'schen Reihe* r^{ter} *Ordnung.*

Um dieselbe allgemein zutreffend zu machen, führen wir Factoren, zur Nullten erhoben, ein, die gleich 1 sind und den Werth nicht verändern, so lange die Basis nicht verschwindet. Wird diese aber 0, so dass der unbestimmte Ausdruck 0^0 entstände, so soll derselbe das Glied annulliren. Es möge hier also $0^0 = 0$ festgesetzt sein, dann wird:

$$\begin{aligned}L(m,r) &= (m-1)^0(m-2)^0(m-3)^0\ldots(m-r)^0\\ &+(m-1)^0(m-2)^0(m-3)^0\ldots(m-r)^0(m-r-1)^0\ldots(m-2r)^0\cdot\frac{m-2r-1}{1}\\ &+(m-1)^0\ldots(m-3r)^0\cdot\frac{(m-3r-1)(m-3r-2)}{1.2}\\ &+\text{etc.}\ldots\end{aligned}$$

Für $r=1$ wird dies zum Endglied der gewöhnlichen Lamé'schen Reihe, [das sonst bekanntlich in der Form

$$L(m,1)=\frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{m-1}+(-1)^m\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^{m-1}\right\}$$
$$=\frac{1}{2^{m-2}}\left\{m-1+\frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3}\cdot 5+\frac{(m-1)(m-2)\cdots(m-5)}{1.2\ldots5}\cdot 5^2+\cdots\right\}$$

gegeben ist]. Wir erhalten

$$L(m,1)=(m-1)^0+(m-1)^0(m-2)^0\frac{m-3}{1}$$
$$+(m-1)^0(m-2)^0(m-3)^0\frac{(m-4)(m-5)}{1.2}+\text{etc.}\ldots$$

was leichter zu berechnen ist, z. B. $L_{(20,1)} = 4181$.

Für $r=0$ wird

$$L(m,0)=1+\frac{m-1}{1}+\frac{(m-1)(m-2)}{1.2}+\cdots=2^{m-1}$$

wie oben.

Zur Invariantentheorie.

Von

A. Hurwitz in Zürich.

§ 1.

Der Begriff der Invariante.

Es scheint mir nicht zweckmässig, in der Formentheorie den Begriff der Invariante, wie es zumeist geschieht, von vornherein an die Betrachtung der Formen anzuknüpfen. Denn der Begriff der Invariante hängt gewissermassen nur in indirecter Weise von den Formen ab. Die letzteren dienen nur dazu, die linearen Transformationen der Argumente der Invariante, gegenüber welchen diese die Eigenschaft der Invarianz besitzen soll, zu charakterisiren. Die linearen Transformationen selber bilden das wesentliche Element der Begriffsbildung. Da jede lineare Transformation von nicht verschwindender Determinante sich zerlegen lässt in eine „unimodulare" (d. h. von der Determinante 1) und in eine Transformation, welche in der Multiplication aller Variabeln mit ein und demselben Factor besteht, so ist es völlig ausreichend nur unimodulare Transformationen zu betrachten, so lange man sich auf homogene Functionen beschränkt. Man wird somit den Begriff der Invariante, in einer alle in der Formentheorie gebrauchten Bildungen umfassenden Weise, folgendermassen formuliren können:

Es seien $a, b, \dots l$, mehrere, etwa r Systeme von Variabeln. Gegeben seien ferner, diesen Systemen bezüglich zugeordnet, r lineare unimodulare Transformationen $A, B, \dots L$. Eine in jedem der r Variabelnsysteme homogene ganze rationale Function $J(a, b, \dots l)$ heisst eine Invariante des Systems von Transformationen $(A, B, \dots, L)$, wenn die Gleichung

$$J(a, b, \dots l) = J(a', b', \dots l')$$

in den Variabeln $a', b', \dots l'$ identisch gilt, falls die a durch die Transformation A, die b durch die Transformation B u. s. w. aus den $a', b', \dots$ bez. hervorgehen.

Die hier benutzte Abkürzung, nach welcher ein ganzes System von Variabeln $a_1, a_2, \ldots a_n$ durch einen einzigen Buchstaben a (das System $b_1, b_2, \ldots b_m$ durch b, das System $a_1', a_2', \ldots a_n'$ durch a' etc.) bezeichnet wird, werde ich im Folgenden durchgängig festhalten. Ich werde ferner durch die Gleichung

$$(a) = A(a')$$

andeuten, dass die Variabeln $a_1, a_2, \ldots a_n$ durch die Transformation A aus den Variabeln $a_1', a_2', \ldots a_n'$ hervorgehen. Diese Gleichung vertritt also n Gleichungen, welche $a_1, a_2, \ldots a_n$ als lineare homogene Functionen von $a_1', a_2', \ldots a_n'$ darstellen. Wenn $J(a, b, \ldots l)$ in dem festgesetzten Sinne eine Invariante des Systemes von Transformationen $(A, B, \ldots L)$ ist, so werde ich dies bisweilen auch kürzer so ausdrücken, dass ich sage, $J(a, b, \ldots l)$ sei invariant bei $\begin{pmatrix} a, & b, & \ldots & l \\ A, & B, & \ldots & L \end{pmatrix}$ oder, wenn es unnöthig ist, die Zuordnung der Transformationen zu den Variabelnsystemen anzudeuten, $J(a, b, \ldots l)$ sei invariant bei $(A, B, \ldots L)$.

Ist eine in jedem der Variablensysteme $a, b, \ldots l$ homogene Function $J(a, b, \ldots l)$ invariant sowohl bei $(A, B, \ldots L)$ wie bei $(A_1, B_1, \ldots L_1)$, so ist unmittelbar klar, dass sie auch bei $(AA_1, BB_1, \ldots LL_1)$ invariant ist, wo $AA_1, BB_1, \ldots$ die aus A und A_1 bez. B und B_1 etc. componirten Transformationen bedeuten. Die Transformationssysteme $(A, B, \ldots L)$, denen gegenüber eine bestimmte Function $J(a, b, \ldots l)$ invariant ist, bilden also eine Gruppe. Man kann dementsprechend den Begriff der Invariante an die Betrachtung der Gruppen solcher Transformationssysteme anknüpfen. Indessen dürfte es doch einfacher sein, den Begriff, so wie ich es oben gethan habe, nicht von vornherein auf eine Gruppe von Transformationssystemen, sondern auf ein einziges System $(A, B, \ldots L)$ zu beziehen. Was übrigens derartige Systeme simultaner Transformationen angeht (deren Einführung durch die Zerlegung der Argumente der Invariante in mehrere Systeme je homogen eingehender Variabeln nothwendig wird), so sind dieselben um Nichts allgemeiner als einzelne Transformationen. In der That, vereinigt man die Variabeln der verschiedenen Systeme $a, b, \ldots l$ zu einem einzigen System, so stellt sich ein System von Transformationen $(A, B, \ldots L)$ als eine einzige auf die Gesammtheit der Variabeln $a, b, \ldots l$ bezügliche Transformation dar.

§ 2.

Contragrediente Substitutionen.

Es ist schon oben erwähnt, dass bei der Definition der Invarianten einer Form $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$, die letztere nur dazu dient, die linearen

Transformationen zu charakterisiren, denen gegenüber die Eigenschaft der Invarianz bestehen soll. Wenn nämlich das System x der Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_n$ einer linearen Transformation

$$(x) = S(x') \tag{1}$$

unterworfen wird, so geht die Form f, deren Coefficientensystem mit a bezeichnet werde, über in eine Form f', deren Coefficienten a' lineare homogene Functionen der a sind. Umgekehrt sind dann auch die a lineare homogene Functionen der a', d. h. es ist

$$(a) = A(a'), \tag{2}$$

wo A eine durch S bestimmte Transformation bedeutet. Diese Transformation A, die Sylvester treffend als „inducirte" Transformation bezeichnet, ist gleichzeitig mit S unimodular, wie bekannt ist und übrigens weiter unten gezeigt wird. Die Invarianten der Form f sind nichts Anderes, wie die Functionen $J(a)$, welche im Sinne von § 1 invariant bei den Transformationen A sind.

Es bietet sich hier die Aufgabe dar, die Abhängigkeit der Transformation A von der Transformation S näher zu untersuchen, eine Aufgabe, die weiterhin (§ 9) behandelt werden soll. Zunächst möge nur der einfachste Fall betrachtet werden, wo die Form f eine Linearform ist. Dieser Fall führt bekanntermassen auf den wichtigen Begriff der contragredienten Transformation. Bezeichnen wir die Coefficienten von f mit u anstatt mit a, sodass

$$f = u_1 x_1 + u_2 x_2 + \cdots + u_n x_n = \sum ux \tag{3}$$

ist, so wird der Transformation (1) die Transformation

$$(u) = T(u') \tag{4}$$

entsprechen, die vollständig dadurch bestimmt ist, dass vermöge der Substitutionen (1) und (4) die Gleichung

$$\sum ux = \sum u'x' \tag{5}$$

zu einer in den u' und x' identischen Gleichung wird. Die Transformation T heisst die *contragrediente* oder *conträre* Transformation von S. Ich werde dieselbe zur Abkürzung mit CS bezeichnen.

Für die conträren Transformationen gelten die folgenden bekannten und leicht zu beweisenden Sätze:

1) Die conträre von der conträren Transformation ist die ursprüngliche Transformation, d. h.

$$CCS = S. \tag{6}$$

2) Die conträre von der zusammengesetzten Transformation SS_1 ist die zusammengesetzte von den conträren Transformationen CS und CS_1, d. h.

$$C(S \cdot S_1) = CS \cdot CS_1. \tag{7}$$

Dieser Satz lässt sich offenbar auch so aussprechen: Ersetzt man in einer Gruppe jede Transformation durch ihre conträre, so entsteht eine zu der Gruppe isomorphe Gruppe.

3) Die Determinante einer Transformation S hat den reciproken Werth von der Determinante der conträren Transformation CS.

4) Betrachtet man in der identischen Gleichung (5) die x als die unabhängigen, die x' als von den x vermöge der Substitution (1) abhängenden Variabeln, so ergiebt die Differentiation nach x_i, dass die conträre Transformation von S durch die Gleichungen

$$(8) \qquad u_i = \sum u' \cdot \frac{\partial x'}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2, \ldots n)$$

dargestellt wird.

§ 3.

Die Boole-Sylvester'schen Differentiationsprocesse.

Es giebt ein elementares Princip zur Bildung invarianter Differentiationsprocesse, welches fast alle in der Invariantentheorie gebrauchten Processe in einfacher Weise liefert. Dieses Princip ist in speciellen Fällen schon von dem Begründer der Invariantentheorie Boole, in grösserer Allgemeinheit aber von Sylvester*) aufgestellt worden. Nach dem Voraufgeschickten kann ich dasselbe leicht in seiner umfassendsten Gestalt darlegen.

Wenn die Variabeln $a_1, \ldots a_n$ durch die Transformation A aus den Variabeln $a_1' \ldots a_n'$ hervorgehen, wenn also

$$(1) \qquad (a) = A(a')$$

ist, so lassen sich die nach den a genommenen Differentialquotienten irgend einer Function so darstellen:

$$(2) \qquad \frac{\partial}{\partial a_i} = \sum_1^n {}_k \frac{\partial}{\partial a_k'} \cdot \frac{\partial a_k'}{\partial a_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots n).$$

Würden die Differentiationszeichen $\frac{\partial}{\partial a}$ und $\frac{\partial}{\partial a'}$ Veränderliche sein, so würden die Gleichungen (2) die conträre Transformation von A darstellen. Man kann also diese Gleichungen durch

$$(3) \qquad \left(\frac{\partial}{\partial a}\right) = CA\left(\frac{\partial}{\partial a'}\right)$$

andeuten. Die wiederholte Anwendung dieser Gleichungen lässt erkennen, dass die Differentialquotienten irgend einer Ordnung, etwa der s^{ten} Ordnung, genau in demselben Zusammenhange stehen, wie die Potenzen und Producte von Potenzen s^{ter} Ordnung der als Variable

*) Sylvester: „Sur les actions mutuelles des formes invariantives dérivées". Crelle's Journal Bd. 85, S. 89.

angesehenen Differentiationssymbole $\frac{\partial}{\partial a}, \frac{\partial}{\partial a'}$. Wenn also $J(a)$ invariant bei der Transformation CA ist, so wird $J\left(\frac{\partial}{\partial a}\right)$ ein invarianter Process gegenüber der Transformation A sein. Das heisst: wenn $f(a)$ durch die Transformation A in $f'(a')$ übergeht, so giebt die Anwendung der Operation $J\left(\frac{\partial}{\partial a}\right)$ auf $f(a)$ dasselbe Resultat, wie die Anwendung von $J\left(\frac{\partial}{\partial a'}\right)$ auf $f'(a')$.

Wendet man dieselbe Ueberlegung auf den Fall mehrerer Variabelnsysteme an, so hat man das Boole-Sylvester'sche Princip in seiner allgemeinsten Gestalt:

„*Es seien* $a, b, \ldots g, h, \ldots l$ *irgend welche Variabelnsysteme und* $A, B, \ldots G, H, \ldots L$ *ihnen bezüglich zugeordnete unimodulare Transformationen. Ist dann* $J(a, b, \ldots g, h, \ldots l)$ *invariant gegenüber dem Transformationssystem* $(CA, CB, \ldots CG, H, \ldots L)$, *so ist*

$$J\left(\frac{\partial}{\partial a}, \frac{\partial}{\partial b}, \cdots \frac{\partial}{\partial g}, h, \cdots l\right)$$

ein invarianter Process gegenüber dem Transformationssystem

$$(A, B, \ldots G, H, \ldots L).\text{“}$$

Insbesondere gilt also der Satz:

„Sind $J(a, b, \ldots g, h, \ldots l)$ und $K(a, b, \ldots g, h, \ldots l)$ invariant bei $(CA, CB, \ldots CG, H, \ldots L)$ bezüglich $(A, B, \ldots G, H, \ldots L)$ so ist das Resultat, welches man durch Anwendung der Operation

$$J\left(\frac{\partial}{\partial a}, \frac{\partial}{\partial b}, \cdots \frac{\partial}{\partial g}, h, \cdots l\right)$$

auf $K(a, b, \ldots g, h, \ldots l)$ erhält, wieder invariant bei

$$(A, B, \ldots G, H, \ldots L).\text{“}$$

§ 4.

Beispiele. Der Cayley'sche Ω-Process.

Als einfachstes Beispiel zu dem Princip des vorigen Paragraphen bietet sich der Aronhold'sche (Polaren-) Process dar. Seien $a, b, \ldots l$ Variablensysteme und $A, B, \ldots L$ ihnen bez. zugeordnete unimodulare Transformationen. Ich will nun annehmen, dass die Transformationen A und B identisch sind, was natürlich implicirt, dass die Anzahl der Variabeln b dieselbe ist, wie die der a. Da dann $\sum ab$ invariant bei $(A, CA, \ldots L)$ ist, so folgt, dass durch den Process $\sum a \frac{\partial}{\partial b}$ aus jeder Invariante des Transformationssystemes $(A, A, \ldots L)$ wieder eine Invariante entsteht.

In ähnlich einfacher Weise führt unser Princip zu dem Cayley'schen Ω-Process. In der That, seien

$$(1) \qquad \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n; \; \beta_1, \beta_2, \ldots \beta_n; \; \ldots; \; \omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n,$$

n cogrediente Variabelnsysteme von je n Variabeln, wobei, wie üblich, die Bezeichnung „cogrediente" Variabelnsysteme ausdrücken soll, dass diesen Variabelnsystemen immer dieselbe Transformation zugeordnet wird. Da nun die Determinante

$$(2) \qquad D = \begin{vmatrix} \alpha_1, & \alpha_2, & \ldots & \alpha_n \\ \beta_1, & \beta_2, & \ldots & \beta_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \omega_1, & \omega_2, & \ldots & \omega_n \end{vmatrix}$$

bei jeder unimodularen Transformation, welcher die Variabeln $\alpha, \beta, \ldots \omega$ simultan unterworfen werden, invariant ist, so schliesst man aus dem Boole-Sylvester'schen Princip, dass auch die Operation

$$(3) \qquad \Omega = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial \alpha_1}, & \frac{\partial}{\partial \alpha_2}, & \ldots & \frac{\partial}{\partial \alpha_n} \\ \frac{\partial}{\partial \beta_1}, & \frac{\partial}{\partial \beta_2}, & \ldots & \frac{\partial}{\partial \beta_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial}{\partial \omega_1}, & \frac{\partial}{\partial \omega_2}, & \ldots & \frac{\partial}{\partial \omega_n} \end{vmatrix}$$

bei jeder solchen Transformation invariant ist.

Im Anschluss hieran will ich zeigen, wie man ohne jede Rechnung die Erzeugung der Invarianten einer Form (oder eines Formensystems) mit Hülfe des Ω-Processes, wie sie von den Herren Gordan, Mertens und Hilbert*) benutzt worden ist, begründen kann.

Es sei $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ eine Form der n Veränderlichen x; die Coefficienten der Form mögen mit a bezeichnet werden. Der beliebigen unimodularen Transformation S der Variabeln x entspreche die Transformation A der Coefficienten, so dass die Form f aufgefasst als Function der a und x invariant bei (A, S) ist. Führt man nun die mit den x cogredienten Variablensysteme (1) ein, so ist offenbar

$$(4) \qquad f(\alpha_1 \xi_1 + \beta_1 \xi_2 + \cdots + \omega_1 \xi_n, \; \alpha_2 \xi_1 + \beta_2 \xi_2 + \cdots + \omega_2 \xi_n, \cdots)$$

*) Gordan-Kerschensteiner, Vorlesungen über Invariantentheorie, Bd. II, S. 114 ff.

Mertens, Ueber invariante Gebilde ternärer Formen, Sitzungsberichte der k. Akademie der Wissenschaften zu Wien, Bd. 95.

Hilbert, Ueber die Theorie der algebraischen Formen, Mathematische Annalen, Bd. 36, S. 524 ff.

für jede Wahl der Constanten $\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n$ invariant bei $\begin{pmatrix} a, \alpha, \beta, \dots \omega \\ A, S, S, \dots S \end{pmatrix}$. Das Gleiche gilt daher auch für die Coefficienten a' der nach Potenzen von $\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n$ entwickelten Function (4), d. h. für die Coefficienten der durch die Substitution

$$(5) \qquad x_i = \alpha_i \xi_1 + \beta_i \xi_2 + \cdots + \omega_i \xi_n \quad (i = 1, 2, \dots n)$$

transformirten Form $f(x_1, x_2, \dots x_n)$. Hieraus folgt weiter, dass auch

$$(6) \qquad D^\mu \,.\, F(a'),$$

wo μ einen positiven ganzzahligen Exponenten, $F(a')$ eine Form der a' bezeichnet, invariant bei $\begin{pmatrix} a, \alpha, \beta, \dots \omega \\ A, S, S, \dots S \end{pmatrix}$ ist. Da nun der Process Ω invariant ist, so entsteht durch wiederholte Anwendung des Processes auf (6) stets wieder eine Invariante und insbesondere eine Invariante der Form f, wenn der Process so häufig angewendet wird, bis die Variabeln $\alpha, \beta, \dots \omega$ aus dem Resultat verschwunden sind. Dass auf diese Weise alle Invarianten von f erhalten werden können, folgt leicht aus dem Umstande, dass die μ-malige Anwendung von Ω auf D^μ eine nicht verschwindende Constante ergiebt.

In gleicher Weise lassen sich die von Herrn Hilbert*) angegebenen analogen Sätze beweisen, die sich auf die Fälle beziehen, wo man auf die Variabeln x der Form f nur die Transformationen gewisser Untergruppen der Gesammtgruppe der linearen Transformationen anwendet.

§ 5.

Ein algebraischer Hülfssatz.

Zu jeder linearen Transformation S gehört eine bestimmte andere, nämlich ihre conträre Transformation CS. Die hier zu Grunde gelegte Auffassung der Invarianten macht es aber unerlässlich, neben CS noch andere Transformationen zu betrachten, die nach gewissen Gesetzen aus einer gegebenen Transformation S (oder auch aus mehreren gegebenen Transformationen $S, T, \dots$) abgeleitet werden. Ehe ich hierzu übergehe, will ich, um Wiederholungen zu vermeiden, einen einfachen algebraischen Hülfssatz vorausschicken.

Es seien a_{ik} die als willkürliche Veränderliche gedachten Coefficienten einer linearen Transformation, α_{ik} die Coefficienten der inversen Transformation. Ferner sei $\varphi(a_{ik})$ eine homogene ganze Function r^{ten} Grades der a_{ik}, welche die Gleichung

$$(1) \qquad \varphi(a_{ik}) \cdot \varphi(\alpha_{ik}) = 1$$

befriedigt. Dann ist nothwendig

*) l. c. pag. 532 ff.

(2) $$\varphi(a_{ik}) = \pm \Delta^{\frac{r}{n}},$$

wo Δ die Determinante $|a_{ik}|$ der Transformation bezeichnet.

In der That ist $\alpha_{ik} = \frac{1}{\Delta} A_{ki}$, wo A_{ki} die zu a_{ki} gehörige Unterdeterminante von Δ bezeichnet. Die Gleichung (1) lässt sich daher so schreiben:

$$\varphi(a_{ik}) \cdot \varphi(A_{ik}) = \Delta^r,$$

und da Δ eine irreducible Function der n^2 Veränderlichen a_{ik} ist, so folgt hieraus

$$\varphi(a_{ik}) = c \cdot \Delta^{\frac{r}{n}},$$

unter c einen von den a_{ik} unabhängigen Factor verstanden. Da die Determinante $|\alpha_{ik}|$ gleich $\frac{1}{\Delta}$ ist, so ist in gleicher Weise

$$\varphi(\alpha_{ik}) = c \cdot \Delta^{-\frac{r}{n}},$$

und also, wegen Gleichung (1), $c^2 = 1$ oder $c = \pm 1$.*)

In ähnlicher Weise beweist man den allgemeineren Satz:

Seien $a_{ik}, b_{ik}, \ldots$ die Coefficienten der Transformationen $S, T, \ldots$ bez., ferner $\alpha_{ik}, \beta_{ik}, \ldots$ die Coefficienten der inversen Transformationen $S^{-1}, T^{-1}, \ldots$ bez., endlich $\varphi(a_{ik}, b_{ik}, \ldots)$ eine ganze Function der Variabeln $a_{ik}, b_{ik}, \ldots$, die homogen vom Grade r_1 in den a_{ik}, homogen vom Grade r_2 in den b_{ik} u. s. w. ist und überdies der Gleichung

$$\varphi(a_{ik}, b_{ik}, \ldots)\, \varphi(\alpha_{ik}, \beta_{ik}, \ldots) = 1$$

genügt. Dann ist nothwendig

$$\varphi(a_{ik}, b_{ik}, \ldots) = \pm \Delta_1^{\frac{r_1}{n_1}} \cdot \Delta_2^{\frac{r_2}{n_2}} \ldots,$$

wo $\Delta_1, \Delta_2, \ldots$ die Determinanten der Transformationen $S, T, \ldots$ bez., ferner $n_1, n_2, \ldots$ ihre Ordnungen bezeichnen, also die Anzahlen der homogenen Variabeln, auf welche sich die Transformationen $S, T, \ldots$ beziehen.

§ 6.

Producttransformationen.

Es seien $x_1, x_2, \ldots x_n$ und $y_1, y_2, \ldots y_m$ oder kurz x und y zwei Systeme von n bez. m Variabeln, ferner

(1) $$(x) = S(x'), \quad (y) = T(y')$$

zwei auf diese Variabeln bezüglichen Transformationen. Da vermöge (1) die x lineare homogene Functionen der x' und die y lineare

*) Vgl. Gram, Sur quelques théorèmes fondamentaux de l'algèbre moderne. Mathematische Annalen Bd. 7, S. 234.

homogene Functionen der y' sind, so stellen sich auch die nm Producte $x_i y_k$ als lineare homogene Functionen der Producte $x_i' y_k'$ dar. Das heisst, es ist

$$(2) \qquad (xy) = W(x'y'),$$

wo W eine durch S und T vollkommen bestimmte Transformation bezeichnet, deren Coefficienten offenbar bilineare Functionen der Coefficienten von S und T sind. Diese Transformation W will ich die „Producttransformation" von S und T nennen und mit $S \times T$ bezeichnen.

Dieselbe Begriffsbildung ist auch auf den Fall anwendbar, wo man mehrere Systeme von Variabeln $x, y, z, \ldots$ und ebenso viele den Systemen bezüglich entsprechende Transformationen $S, T, U, \ldots$ betrachtet. Die Producttransformation $S \times T \times U \ldots$ ist dann diejenige Transformation, welche die Producte $xyz \ldots$ erfahren.

Es gelten nun die folgenden Sätze über Producttransformationen, die ich der Einfacheit halber nur für den Fall von zwei Variablensystemen ausspreche:

1) Sind S und T die identischen Transformationen ($x_i = x_i'$, $y_k = y_k'$), so ist auch ihre Producttransformation die identische ($x_i y_k = x_i' y_k'$).

2) Ist W die Producttransformation von S und T, ferner W_1 die Producttransformation von S_1 nnd T_1, so ist $W W_1$ die Producttransformation von SS_1 und TT_1.

Denn aus

$$(x) = S(x'), \quad (x') = S_1(x''),$$
$$(y) = T(y'), \quad (y') = T_1(y''),$$

folgt

$$(xy) = W(x'y'), \quad (x'y') = W_1(x''y'').$$

Die Transformation $(xy) = W W_1(x''y'')$ ist daher die Producttransformation von $(x) = SS_1(x'')$ und $(y) = TT_1(y'')$ q. e. d.

Insbesondere ist die Producttransformation der inversen S^{-1} und T^{-1} die inverse der Producttransformation von S und T. Auch folgt nnmittelbar, dass die Producttransformationen W_i $(i = 1, 2, \ldots)$ einer Gruppe von Transformationspaaren (S_i, T_i) eine zu dieser Gruppe isomorphe Gruppe bilden.

3) Ist Δ die Determinante von S und Γ die Determinante von T, so ist

$$\Delta^m \cdot \Gamma^n$$

die Determinante der Producttransformation $S \times T$.

In der That ist die letztere Determinante eine Function $\varphi(a_{ik}, b_{ik})$ der n^2 Coefficienten a_{ik} von S und der m^2 Coefficienten b_{ik} von T, auf welche der im vorigen Paragraphen bewiesene Hülfssatz unmittelbare Anwendung findet. Dass $\Delta^m \Gamma^n$ und nicht $-\Delta^m \Gamma^n$ der Werth

der Determinante von $S \times T$ ist, erkennt man sofort, wenn man für S und T die identischen Transformationen nimmt. Sind S und T unimodulare Transformationen, so ist auch $S \times T$ unimodular.

4) „Die Producttransformationen der conträren Transformationen CS und CT ist die conträre von der Producttransformation $S \times T$," ein Satz, der sich kurz durch die Gleichung

$$CS \times CT = C(S \times T) \tag{3}$$

ausdrücken lässt.

Zum Beweise betrachten wir die Transformationen

$$(u) = CS(u'), \quad (v) = CT(v'), \tag{4}$$

also die conträren der Transformationen (1). Aus (4) folge

$$(uv) = \overline{W}(u'v'), \tag{5}$$

so dass $\overline{W}$ die Producttransformation $CS \times CT$ bezeichnet. Da nun die Gleichungen

$$\sum ux = \sum u'x', \quad \sum vy = \sum v'y',$$

die andere

$$\sum uv \cdot xy = \sum u'v' \cdot x'y'$$

zur Folge haben, so ist die Transformation (5) die conträre der Transformation (2), q. e. d.

§ 7.

Potenztransformationen.

Mit den Producttransformationen eng verwandt sind die Potenztransformationen. Ehe ich diese einführe, schicke ich voraus, dass ich mich in diesem Paragraphen und weiterhin der folgenden Bezeichnungen bedienen werde. Sind $x_1, x_2, \ldots x_n$ Variable, so will ich die Potenzen und Producte von Potenzen

$$x_1^{e_1} x_2^{e_2} \ldots x_n^{e_n}, \tag{1}$$

für welche die Exponentensumme $e_1 + e_2 + \cdots + e_n$ gleich r ist, als die *„Elementarterme r^{ter} Ordnung"* bezeichnen. Die Anzahl ϱ dieser Terme drückt sich bekanntlich durch einen Binomialcoefficienten aus, es ist nämlich

$$\varrho = \frac{(r+n-1)!}{r!\,(n-1)!}. \tag{2}$$

Ferner will ich (in Anlehnung an eine Sylvester'sche Bezeichnungsweise) die mit gewissen Zahlenfactoren multiplicirten Elementarterme (1) *„präparirt"* nennen. Der Zahlenfactor, welchen ich dem

einzelnen Terme zusetze, ist der reciproke Werth des Productes $\sqrt{e_1!} \cdot \sqrt{e_2!} \cdots \sqrt{e_n!}$, so dass die präparirten Elementarterme diese sind:

$$\frac{x_1^{e_1}}{\sqrt{e_1!}} \cdot \frac{x_2^{e_2}}{\sqrt{e_2!}} \cdots \frac{x_n^{e_n}}{\sqrt{e_n!}}. \tag{3}$$

Dabei sind die Quadratwurzeln positiv zu nehmen und unter 0! ist die Zahl 1 zu verstehen.

Die präparirten Elementarterme (3) werde ich in einer beliebigen, aber fest gewählten Reihenfolge mit

$$X_1, X_2, \ldots X_\varrho \tag{4}$$

bezeichnen. Die entsprechende Bedeutung sollen $X_1', X_2', \ldots X_\varrho'$; $U_1, U_2, \ldots U_\varrho$; etc. für die Variabelnsysteme $x_1', x_2', \ldots x_n'$; $u_1, u_2, \ldots u_n$; etc. haben.

Dies festgesetzt, betrachte ich irgend eine lineare Transformation S bei n Variabeln. Vermöge der n linearen homogenen Gleichungen

$$(x) = S(x') \tag{5}$$

stellen sich dann die Elementarterme r^{ter} Ordnung der Variabeln x als lineare homogene Functionen der Elementarterme r^{ter} Ordnung der Variabeln x' dar und das Gleiche gilt bezüglich der präparirten Elementarterme. Es folgt also aus (5)

$$(X) = W(X'), \tag{6}$$

wo W eine durch S mitbestimmte lineare Transformation bezeichnet, deren Coefficienten offenbar homogene Functionen r^{ten} Grades der Coefficienten von S sind. Diese Transformation W will ich die r^{te} *Potenztransformation* von S nennen und mit $P_r S$ bezeichnen.

Durch ähnliche Schlüsse, wie sie im vorigen Paragraphen angewandt wurden, beweist man für die Potenztransformationen nachstehende Sätze:

1) Ist S die identische Transformation, so ist auch $P_r S$ die identische Transformation.

2) Die r^{te} Potenztransformation der zusammengesetzten Transformation SS_1 ist die zusammengesetzte aus den r^{ten} Potenztransformationen $P_r S$ und $P_r S_1$.

3) Die Determinante von $P_r S$ ist die k^{te} Potenz der Determinante von S, wo

$$k = \frac{r \cdot \varrho}{n} = \frac{(r+n-1)!}{(r-1)!\, n!}.$$

4) Die r^{te} Potenztransformation der conträren ist die conträre von der r^{ten} Potenztransformation, oder

$$P_r CS = CP_r S. \tag{7}$$

In der That, wenn

$$(x) = S(x'), \quad (u) = CS(u'),$$

so hat man

$$\sum xu = \sum x'u',$$

und da

$$\left(\sum xu\right)^r = (x_1u_1 + \cdots + x_nu_n)^r = r!\,(X_1U_1 + \cdots + X^\varrho U_\varrho)$$

ist, so folgt

$$X_1U_1 + \cdots + X_\varrho U_\varrho = X_1'U_1' + \cdots + X_\varrho' U_\varrho';$$

d. h. die U transformiren sich conträr zu den X.

§ 8.

Die einer linearen Transformation entsprechenden Determinantentransformationen.

In der Invariantentheorie der algebraischen Formen kommen ausser den im vorigen Paragraphen eingeführten Transformationen noch eine Reihe anderer in Betracht, die in bestimmter Weise aus einer gegebenen Transformation abgeleitet werden. Da sich im Anschluss an die vorstehenden Entwicklungen die Bildungsweise und die wesentlichsten Eigenschaften dieser Transformationen leicht auseinandersetzen lassen, so will ich darauf kurz eingehen, obgleich dies für die weiteren Betrachtungen dieser Abhandlung nicht gerade erforderlich ist.*)

Es seien (x), (y), (z), ... Systeme von je n Variabeln. Das System der $\binom{n}{2}$ Determinanten

$$\begin{vmatrix} x_i, & x_k \\ y_i, & y_k \end{vmatrix} \quad (i < k),$$

diese in eine beliebige, aber feste Reihenfolge gebracht, möge kurz mit $(x)_2$, das System der $\binom{n}{3}$ Determinanten

$$\begin{vmatrix} x_i, & x_k, & x_l \\ y_i, & y_k, & y_l \\ z_i, & z_k, & z_l \end{vmatrix} \quad (i < k < l),$$

diese ebenfalls in einer beliebigen aber festen Reihenfolge genommen, mit $(x)_3$ bezeichnet werden u. s. f. Auf die Betrachtung dieser Determinanten wird man unmittelbar geführt, wenn man die Variabeln (x), (y), (z), ... als homogene Punktcoordinaten deutet. Bekanntlich sind dann die Determinanten $(x)_2$, $(x)_3$, u. s. f. die Coordinaten der (x) und (y) verbindenden Geraden, bez. der (x), (y) und (z) verbindenden Ebene u. s. f. Zwischen diesen Determinanten bestehen die

*) Dementsprechend kann dieser Paragraph, unbeschadet des Zusammenhanges, überschlagen werden.

bekannten algebraischen Identitäten. Es ist aber wichtig, zu bemerken, dass unter diesen keine linearen sind, dass also die Determinanten linear unabhängig sind.*)

Ich betrachte nun die Gleichungen

(1) $$(x) = S(x'), \quad (y) = S(y'), \quad (z) = S(z'), \ldots,$$

wo S irgend eine lineare Transformation bezeichnet. Vermöge dieser Gleichungen drücken sich die $(x)_2$ linear und homogen, durch die in analoger Weise aus den (x') und (y') gebildeten Determinanten $(x')_2$ aus. D. h. die $(x)_2$ gehen vermöge einer durch S mitbestimmten linearen Transformation aus den $(x')_2$ hervor. Diese Transformationen will ich mit C_2S bezeichnen, so dass gleichzeitig mit (1)

(2) $$(x)_2 = C_2 S(x')_2$$

ist. In gleicher Weise ist

(3) $$(x)_3 = C_3 S(x')_3,$$

wo C_3S eine bestimmte von S abhängende Transformation bezeichnet. Im Ganzen entspringen so aus S $n-2$ abgeleitete Transformationen

(4) $$C_2S, \; C_3S, \; \ldots \; C_{n-1}S,$$

(welche, nach dem oben Bemerkten, die Transformationen der Coordinaten der Geraden, Ebenen u. s. w. sind, die der Transformation S der Punktcoordinaten entsprechen). Es gelten nun folgende Sätze, die ähnlich wie die analogen Sätze für die Product- und Potenztransformationen zu beweisen sind:

1) Ist S die identische Transformation, so ist auch jede der abgeleiteten C_2S, C_3S, ... $C_{n-1}S$ die identische Transformation.

2) Durchläuft die Transformation S die Individuen einer Gruppe, so durchläuft jede der abgeleiteten Transformationen C_2S, C_3S, ... je eine zu jener Gruppe isomorphe Gruppe.

3) Bezeichnet Δ die Determinante der Transformation S, so haben die Determinanten von C_2S, C_3S, ... $C_{n-1}S$ bez. die Werthe Δ^{n-1}, $\Delta^{\binom{n-1}{2}}$, $\Delta^{\binom{n-1}{3}}$, ... Δ^{n-1}. Insbesondere sind die Transformationen C_2S, C_3S, ... $C_{n-1}S$ gleichzeitig mit S unimodular.

4) Sind S und T conträre Transformationen, so sind auch C_2S und C_2T, ebenso C_3S und C_3T u. s. w. je conträre Transformationen, ein Satz, der sich auch durch die Gleichungen:

(5) $$C_2CS = CC_2S, \quad C_3CS = CC_3S, \quad \ldots \quad C_{n-1}CS = CC_{n-1}S$$

ausdrücken lässt.

---

*) Die consequente Einführung der Determinanten $(x)_2$, $(x)_3$, ... als selbstständiger Variabeln in die Formentheorie geht auf Clebsch zurück. Vgl. Clebsch: „Ueber eine Fundamentalaufgabe der Invariantentheorie", Göttinger Abhandlungen, Bd. 17 und Mathematische Annalen, Bd. 5, S. 427.

5) Aus der bekannten Darstellung einer n-reihigen Determinante als Aggregat aus den Producten der Determinanten k^{ten} Grades, die sich aus den ersten k Reihen der Determinante bilden lassen, in die complementären Determinanten $(n-k)^{\text{ten}}$ Grades, die sich aus den übrigen $n-k$ Reihen bilden lassen, schliesst man ferner, dass die Transformationen S und $C_{n-1}S$, C_2S und $C_{n-2}S, \ldots$ je ein Paar conträrer Transformationen bilden, sobald S unimodular ist und die Reihenfolge der Determinanten $(x)_2, (x)_3, \ldots$ in geeigneter Weise gewählt wird.

§ 9.

Präparirte Formen.

Bezeichnen $(x), (y), (z), \ldots$ Variabelnsysteme, ferner $X, Y, Z, \ldots$ die präparirten Elementarterme $p^{\text{ter}}, q^{\text{ter}}, r^{\text{ter}} \ldots$ Ordnung, die aus den Variabeln $x, y, z, \ldots$ bezüglich gebildet werden können, so lässt sich jede ganze Function der Variabeln $x, y, z, \ldots$, welche in den Variabeln x homogen p^{ter} Ordnung, in den Variabeln y homogen q^{ter} Ordnung u. s. w. ist, in die Gestalt

$$f(x, y, z, \ldots) = \sum a\, XYZ \ldots \tag{1}$$

bringen. In dieser Gestalt nenne ich die Form *präparirt.* Die Bezeichnung rührt von Sylvester her.*) Indessen weicht meine Definition der präparirten Formen ein wenig von der Sylvester'schen ab. Die Sylvester'sche Definition erhält man, wenn man die Elementarterme $x_1^{e_1} x_2^{e_2} \ldots x_n^{e_n}$ nicht durch den Factor $\frac{1}{\sqrt{e_1!}\sqrt{e_2!}\cdots\sqrt{e_n!}}$, sondern durch den Factor $\frac{\sqrt{(e_1+e_2+\cdots+e_n)!}}{\sqrt{e_1!}\sqrt{e_2!}\ldots\sqrt{e_n!}}$ „präparirt".

Werden nun die Variabeln der Form f simultan den Transformationen

$$(x) = S(x'), \quad (y) = T(y'), \quad (z) = U(z'), \ldots \tag{2}$$

unterworfen, so geht f über in

$$f' = \sum a' X' Y' Z' \ldots . \tag{3}$$

Unter Verwendung der in den Paragraphen 6 und 7 eingeführten Bezeichnungen ist

$$(X) = P_p S(X'), \quad (Y) = P_q T(Y'), \quad (Z) = P_r U(Z'), \ldots \tag{4}$$

und

$$(XYZ\cdots) = P_p S \times P_q T \times P_r U \times \cdots (X'Y'Z'\cdots). \tag{5}$$

*) l. c. Seite 90.

Die Transformation, welche die Coefficienten a' in die Coefficienten a überführt, ist aber die conträre der Transformation (5). Die durch die Transformationen (2) der Variabeln inducirte Transformation der Coefficienten von f ist also die folgende:

$$(a) = C(P_p S \times P_q T \times P_r U \times \cdots)\,(a'). \tag{6}$$

Betrachtet man nun neben dem Systeme von Transformationen (2) das System der conträren Transformationen

$$(x) = CS(x'),\quad (y) = CT(y'),\quad (z) = CU(z'), \ldots, \tag{7}$$

so entspricht diesen die Transformation

$$(a) = C(P_p CS \times P_q CT \times P_r CU \times \cdots)\,(a') \tag{8}$$

der Coefficienten. Nach den oben bewiesenen Sätzen (§ 2, (6), § 6, (3), § 7, (7)) ist diese Transformation identisch mit

$$(a) = (P_p S \times P_q T \times P_r U \times \cdots)\,(a'). \tag{9}$$

Der Vergleich mit (6) lehrt:

„Bei einer präparirten Form entsprechen conträren Transformationen der Variabeln conträre Transformationen der Coefficienten."

Für den Fall, dass die Form nur eine Reihe von Variabeln (x) enthält, ist dieser Satz von Sylvester aufgestellt und bewiesen worden. Andere Beweise für diesen einfachsten Fall des Satzes haben Lipschitz und Le Paige gegeben. Den Fall zweier Systeme contragredienter Variabeln betrachtet Study.*) Für das Folgende ist es zweckmässig unserem Satze eine etwas andere Fassung zu geben.

Ersetzt man in der Form $f = f(x, y, z, \ldots)$ die Variabelnsysteme $(x), (y), (z), \ldots$ je durch die contragredienten Variabelnsysteme $(u), (v), (w), \ldots$ so möge die hierdurch entstehende neue Form $\bar{f} = f(u, v, w, \ldots)$ als die *„conträre" Form* von f bezeichnet werden.

Ordnet man nun den Variabelnsystemen $(x), (y), (z), \ldots$ bezüglich die Transformationen $S, T, U, \ldots$ zu, so sind hiermit von selber den Variabelnsystemen $(u), (v), (w), \ldots$ bezüglich die conträren Transformationen $CS, CT, CU, \ldots$ zugeordnet. Der verallgemeinerte Sylvester'sche Satz lässt sich darnach auch so aussprechen:

„Die Coefficienten zweier conträrer, präparirter Formen erfahren conträre Transformationen, wenn man die Variabeln der Formen irgend welchen simultanen Transformationen unterwirft."

---

*) Sylvester, l. c. p. 91. — Lipschitz, American Journal of Mathematics, Bd. 1, S. 336. — Le Paige, Mathematische Annalen, Bd. 15, S. 206. — Study, Methoden zur Theorie der ternären Formen (Leipzig 1889) S. 36 ff.

§ 10.

Invariante Differentiationsprocesse für Formensysteme.

Ich gehe jetzt dazu über, den Satz des vorigen Paragraphen mit dem Satze des § 3 zu combiniren, schicke indessen einige Bemerkungen voraus, die sich auf den Begriff der Invariante beziehen. Es seien $(x), (y), (z), \ldots$ Systeme von Variabeln und

$$f_1, f_2, \ldots f_k, f_{k+1}, \ldots f_r \tag{1}$$

präparirte Formen derselben. Dabei ist natürlich der Fall nicht ausgeschlossen, dass unter den Formen solche vorhanden sind, in denen eines oder mehrere der Variabelnsysteme nicht vorkommen. Die betreffenden Formen sind dann in den fehlenden Variabelnsystemen als vom Grade Null anzusehen.

Ich nehme jetzt an, dass den Variabelnsystemen $(x), (y), (z), \ldots$ bezüglich die unimodularen Transformationen $S, T, U, \ldots$ zugeordnet seien. Dann entsprechen diesen gewisse, ebenfalls unimodulare Transformationen $\mathsf{A}_1, \mathsf{A}_2, \ldots \mathsf{A}_r$ der Coefficienten $a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots a^{(r)}$ der Formen $f_1, f_2, \ldots f_r$. Eine Function

$$J(a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots a^{(r)}), \tag{2}$$

die ganz und homogen in jedem einzelnen Coefficientensystem $a^{(i)}$ ist, wird nun als eine Invariante des Formensystems (1) bezüglich der Transformationen

$$\begin{pmatrix} x, & y, & z, & \ldots \\ S, & T, & U, & \ldots \end{pmatrix} \tag{3}$$

zu bezeichnen sein, wenn sie im Sinne von § 1 invariant bei

$$\begin{pmatrix} a^{(1)}, & a^{(2)}, & \ldots & a^{(r)} \\ \mathsf{A}_1, & \mathsf{A}_2, & \ldots & \mathsf{A}_r \end{pmatrix}$$

ist.

Ist so der Begriff der Invariante eines Formensystems (1) auf ein bestimmtes System von Transformationen (3) bezogen, so fragt es sich, was man unter einer Invariante des Formensystemes (1) schlechthin zu verstehen hat. Dabei ist Folgendes zu beachten. Während ich die sämmtlichen auftretenden Variabeln $(x), (y), (z), \ldots$ als frei veränderlich voraussetze, soll doch nicht ausgeschlossen sein, dass zwischen einzelnen Variabelnsystemen eine Abhängigkeit in der Art besteht, dass die gewissen Variabelnsystemen zugeordneten Transformationen immer die gewissen anderen Variabelnsystemen zuzuordnenden Transformationen mitbestimmen. So kann z. B. von vornherein festgesetzt sein, dass dem Variabelnsystem (y) immer dieselbe Transformation, wie dem Variabelnsystem (x) zugeordnet werden soll (dass, wie man zu sagen

pflegt, (x) und (y) cograndiente Variable sein sollen). Derartige Festsetzungen, die einen Theil der Transformationen $S, T, U, \ldots$ von den übrigen abhängig machen, lassen sich in mannigfaltiger Weise treffen.

Unter einer *Invariante schlechthin* des Formensystemes (1) ist nun jede Function $J(a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots a^{(r)})$ zu verstehen, die eine Invariante bezüglich der Transformationen (3) ist für jede beliebige Wahl der von einander unabhängigen unter diesen Transformationen.

Dies vorausgeschickt, betrachte ich neben dem Formensystem (1) noch das folgende:

(4) $$\bar{f}_1, \bar{f}_2, \ldots \bar{f}_k, f_{k+1}, \ldots f_r,$$

welches dadurch aus dem ersteren entsteht, dass die ersten k Formen durch ihre conträren Formen ersetzt werden. Ich nehme an, dass die Variabelnsysteme $(x), (y), (z), \ldots$ so beschaffen sind, dass mit jedem System auch das System der contragredienten Variabeln auftritt. Diese Annahme hat zur Folge, dass die Formen des zweiten Formensystemes (4) von den nämlichen Variabelnsystemen abhängen, wie die Formen des ersten Formensystemes (1). Zugleich beschränkt diese Annahme nicht die Allgemeinheit, da man die Formen (1) in einem etwa thatsächlich nicht auftretenden Variabelnsysteme als vom Grade Null ansehen kann. (Vgl. oben.)

Die Verbindung der Resultate der Paragraphen 2 und 9 ergiebt nun den folgenden, in specieller Form von Sylvester herrührenden Satz:

„*Sind in Bezug auf ein System von Transformationen* (3)

$$J(a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots a^{(r)}) \quad \textit{und} \quad K(a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots a^{(r)})$$

Invarianten des ersten bezüglich zweiten Formensystemes, so ist das Resultat, welches durch Anwendung der Operation

$$K\left(\frac{\partial}{\partial a^{(1)}}, \frac{\partial}{\partial a^{(2)}}, \ldots \frac{\partial}{\partial a^{(k)}}, a^{(k+1)}, \ldots a^{(r)}\right)$$

auf $J(a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots a^{(r)})$ *entsteht, wieder eine Invariante des ersten Formensystemes bezüglich der Transformationen* (3)“.

Und hieraus folgt der entsprechende Satz für die „Invarianten schlechthin“:

„*Sind* $J(a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots a^{(r)})$ *und* $K(a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots a^{(r)})$ *Invarianten des ersten bezüglich zweiten Formensystemes, so ist das Resultat, welches durch Anwendung der Operation* $K\left(\frac{\partial}{\partial a^{(1)}}, \ldots \frac{\partial}{\partial a^{(k)}}, a^{(k+1)}, \ldots a^{(r)}\right)$ *auf* $J(a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots a^{(r)})$ *entsteht, wieder eine Invariante des ersten Formensystemes.*“

§ 11.

Erzeugung von Invarianten eines Formensystemes aus denen eines zweiten Formensystemes.

Hermite hat unter dem Namen des Reciprocitätsgesetzes (loi de réciprocité) einen Satz aufgestellt, dem zu Folge man durch ein bestimmtes Verfahren aus den Covarianten m^{ten} Grades einer binären Form n^{ter} Ordnung die Covarianten n^{ten} Grades einer binären Form m^{ter} Ordnung ableiten kann.*) Die von Hermite selber, wie von späteren Autoren gegebene Darstellung dieses Verfahrens beruht wesentlich auf der Zerlegung der binären Formen in Linearfactoren und ist somit einer Verallgemeinerung auf Formen von mehreren Variabeln nicht fähig.**) Indessen ist gleichwohl dieses Verfahren nur ein specieller Fall eines weit allgemeinern, welches gestattet, aus den Invarianten eines beliebigen Formensystemes Invarianten eines zweiten Formensystemes abzuleiten. Auf diese Weise erscheint der Hermite'sche Satz in einem neuen Lichte, welches den inneren Grund seines Bestehens klar hervortreten lässt.

Es seien

$$f,\ g,\ f_1,\ f_2, \ldots f_k \tag{1}$$

präparirte Formen von beliebigen Variabelnsystemen. Die Coefficienten der Form f bezeichne ich mit (a), die Coefficienten der Form g mit (b), ferner die conträre Form von f mit $\bar{f}$.

Ist nun weiter $\mathsf{K}(a, b)$ eine Invariante der Formen $\bar{f}$ und g, die in den Coefficienten (a) den Grad r, in den Coefficienten (b) den Grad s besitzt, so kann man

$$\mathsf{K}(a, b) = L_1 A_1 + L_2 A_2 + \cdots + L_\varrho A_\varrho \tag{2}$$

setzen, wo $A_1, A_2, \ldots A_\varrho$ die präparirten Elementarterme r^{ter} Ordnung, gebildet aus den Coefficienten (a) und $L_1, L_2, \ldots L_\varrho$ ganze homogene Functionen s^{ten} Grades der Coefficienten (b) bedeuten.

---

*) Hermite: Sur la théorie des fonctions homogènes à deux indéterminées. Cambridge und Dublin Mathematical Journal, Bd. 8, S. 172 ff. Vgl. auch Faa di Bruno, Einleitung in die Theorie der binären Formen (Leipzig 1881) S. 262 und S. 297, ferner Gordan-Kerschensteiner, Vorlesungen Bd. 2, S. 97. Salmon-Fiedler, Algebra der linearen Transformationen (Leipzig 1877) S. 181 und Sylvester, Note on M. Hermite's law of reciprocity, American Journal, Bd. 1, S. 90.

**) Der vortrefflichen Monographie von Franz Meyer „Bericht über den gegenwärtigen Stand der Invariantentheorie" im Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung (Berlin 1892) entnehme ich, dass Deruyts eine Ausdehnung des Reciprocitätsgesetzes gegeben hat, die sich aber nur auf specielle Formen bezieht, nämlich auf solche, die in lineare Factoren zerlegbar sind.

Ich betrachte jetzt irgend eine Invariante

(3) $$J = P_1 A_1 + P_2 A_2 + \cdots + P_\varrho A_\varrho$$

der Formen

(4) $$f, f_1, f_2, \ldots f_k.$$

Die Invariante J sei in den Coefficienten (a) der Form f vom r^{ten} Grade, so dass $P_1, P_2, \ldots P_\varrho$ Functionen der Coefficienten von $f_1, f_2, \ldots f_k$ bezeichnen. Durch die Anwendung der Operation $\mathsf{K}\left(\frac{\partial}{\partial a}, b\right)$ auf J entsteht, wie man sich sofort überzeugt, das Resultat

(5) $$K = P_1 L_1 + P_2 L_2 + \cdots + P_\varrho L_\varrho.$$

Und nun ist nach dem Schlusssatze des letzten Paragraphen*) K eine Invariante des Formensystemes (1), oder, da K die Coefficienten (a) der Form f nicht enthält, eine Invariante des Formensystemes

(6) $$g, f_1, f_2, \ldots f_k.$$

Es gilt also folgender Satz:

„*Wenn $A_1, A_2, \ldots A_\varrho$ die präparirten Elementarterme r^{ter} Ordnung der Coefficienten (a) einer präparirten Form f bezeichnen, wenn ferner*

$$\mathsf{K} = L_1 A_1 + L_2 A_2 + \cdots + L_\varrho A_\varrho$$

eine Simultaninvariante der zu f conträren Form $\bar{f}$ und irgend einer andern präparirten Form g, wenn endlich

$$J = P_1 A_1 + P_2 A_2 + \cdots + P_\varrho A_\varrho$$

eine Invariante des Formensystemes

$$f, f_1, f_2, \ldots f_k$$

ist, unter $f_1, f_2, \ldots f_k$ irgend welche präparirte Formen verstanden, so wird stets

$$K = P_1 L_1 + P_2 L_2 + \cdots + P_\varrho L_\varrho$$

eine Invariante des Formensystemes

$$g, f_1, f_2, \ldots f_k$$

sein.“

Nach diesem Satze entspricht also, unter Zugrundelegung einer Invariante K der Formen $\bar{f}$ und g, die in den Coefficienten dieser Formen vom r^{ten} bez. s^{ten} Grade ist, jeder Invariante J des Formensystemes $f, f_1, f_2, \ldots f_k$ vom r^{ten} Grad in den Coefficienten von f in

---

*) Der Satz ist anzuwenden auf die Formensysteme

$$f, g, f_1, f_2, \ldots f_k,$$
$$\bar{f}, g, f_1, f_2, \ldots f_k.$$

Dabei ist J als Invariante der ersten und $\mathsf{K}(a, b)$ als Invariante des zweiten Formensystemes aufzufassen.

eindeutiger Weise eine Invariante K des Formensystemes $g, f_1, f_2, \ldots f_k$ vom s^{ten} Grade in den Coefficienten von g.

Da eine Invariante der Form $\bar{f}$ und g auch eine Invariante der Formen f und $\bar{g}$ ist, wo $\bar{g}$ die conträre Form von g bezeichnet, so kann dieselbe Invariante K auch zur Erzeugung von Invarianten des Formensystemes $f, f_1, f_2, \ldots f_k$ aus Invarianten des Formensystemes $g, f_1, f_2, \ldots f_k$ verwendet werden. Man hat dann nur K nach den Coefficienten von g anzuordnen, also K in die Gestalt

$$\mathsf{K} = M_1 B_1 + M_2 B_2 + \cdots + M_\sigma B_\sigma$$

zu setzen, wo $B_1, B_2, \ldots B_\sigma$ die präparirten Elementarterme s^{ter} Ordnung der Coefficienten von g bedeuten.

Wenn jetzt

$$K = Q_1 B_1 + Q_2 B_2 + \cdots + Q_\sigma B_\sigma$$

irgend eine Invariante des Formensystemes $g, f_1, f_2, \ldots f_k$ ist (vom s^{ten} Grade in den Coefficienten von g), so wird stets

$$J = Q_1 M_1 + Q_2 M_2 + \cdots + Q_\sigma M_\sigma$$

eine Invariante des Formensystemes $f, f_1, f_2, \ldots f_k$ sein.

Man kann hiernach vermöge der Invariante K zunächst aus einer Invariante des Formensystemes $f, f_1, f_2, \ldots f_k$ eine solche des Formensystemes $g, f_1, f_2, \ldots f_k$ und sodann aus dieser wieder eine Invariante des ersten Formensystemes erzeugen. Die letztere wird in den Coefficienten der Formen dieselben Gradzahlen besitzen, wie die Invariante, von der man ausging, braucht aber darum natürlich nicht mit dieser identisch zu sein.

§ 12.

Das Hermite'sche Reciprocitätsgesetz.

Der Hermite'sche Satz, nach welchem man aus den Covarianten m^{ten} Grades einer binären Form $f(x_1, x_2)$ n^{ter} Ordnung die Covarianten n^{ten} Grades einer binären Form $g(x_1, x_2)$ m^{ter} Ordnung erzeugen kann, stellt sich nun als ein specieller Fall des soeben bewiesenen Satzes dar.

Die Formen f und g setze ich in präparirter Gestalt voraus. Es seien nun u_1, u_2 die zu x_1, x_2 contragredienten Variabeln und

$$f_1(u_1, u_2) = \xi_1 u_1 + \xi_2 u_2.$$

Dann sind die Invarianten der Formensysteme

(1) $\qquad f(x_1, x_2), \quad f_1(u_1, u_2),$

(2) $\qquad g(x_1, x_2), \quad f_1(u_1, u_2)$

identisch mit den Covarianten der Form f bezüglich g, die Covarianten geschrieben in den Variabeln ξ_1, ξ_2.

Nach dem Satze des vorigen Paragraphen gestattet demnach jede Simultaninvariante von $\bar{f} = f(u_1, u_2)$ und $g(x_1, x_2)$, oder, was dasselbe ist, von

$$f(-x_2, x_1) \quad \text{und} \quad g(x_1 x_2) \tag{3}$$

aus Covarianten der Form f solche der Form g herzuleiten. Man wähle nun insbesondere für diese Simultaninvariante die Resultante R der Formen (3). Diese ist in den $n+1$ Coefficienten a der Form f vom m^{ten} Grade, in den $m+1$ Coefficienten b der Form g vom n^{ten} Grade. Die Anzahl der Elementarterme m^{ten} Grades aus $n+1$ Grössen beträgt

$$\mu = \frac{(n+m)!}{n!\,m!},$$

und ist also, wegen der Symmetrie in n und m, zugleich die Anzahl der Elementarterme n^{ten} Grades aus $m+1$ Grössen. Demnach hat die Resultante R die Gestalt

$$R = L_1 A_1 + L_2 A_2 + \cdots + L_\mu A_\mu, \tag{4}$$

wobei allgemein

$$L_i = c_{i1} B_1 + c_{i2} B_2 + \cdots + c_{i\mu} B_\mu, \quad (i = 1, 2, \ldots \mu) \tag{5}$$

ist. Hier bedeuten die A_i und B_i die präparirten Elementarterme der Coefficienten a und b, während die c_{ik} numerische Coefficienten sind.

Wenn nunmehr

$$J = C_1 A_1 + C_2 A_2 + \cdots + C_\mu A_\mu \tag{6}$$

eine Covariante von f bezeichnet, die in den Coefficienten a von f vom m^{ten} Grade ist, so dass $C_1, C_2, \ldots C_\mu$ Formen von ξ_1, ξ_2 bedeuten, so ist nach dem Satze des vorigen Paragraphen

$$K = C_1 L_1 + C_2 L_2 + \cdots + C_\mu L_\mu \tag{7}$$

eine Covariante von g, die in den Coefficienten dieser Form vom n^{ten} Grade ist. Auf diese Weise ist jeder Covariante m^{ten} Grades der Form n^{ter} Ordnung f eindeutig eine Covariante n^{ten} Grades der Form m^{ter} Ordnung g zugeordnet. Es kommt hier aber noch ein wesentlicher Punkt hinzu.

Die Determinante $|c_{ik}|$ der in der Resultante auftretenden numerischen Coefficienten ist nämlich von Null verschieden.*) In Folge dessen kann die Covariante K nur dann identisch verschwinden, wenn J identisch Null ist. Hieraus schliesst man weiter, dass linear unabhängigen Covarianten J auch linear unabhängige Covarianten K ent-

*) Dieser Satz lässt sich leicht mit Hülfe der Factorenzerlegung der Resultante beweisen. Es wäre indessen wünschenswerth, einen anderen von dieser Zerlegung unabhängigen Beweis zu besitzen. (Einen solchen Beweis theilte mir inzwischen Herr Gordan mit. Herr Gordan wird denselben demnächst in diesen Annalen veröffentlichen. August 1894.)

sprechen. Und da jede Covariante n^{ten} Grades von g in die Form (7) gebracht und also als entsprechende einer Covariante m^{ten} Grades von f aufgefasst werden kann, so folgt endlich, dass einem vollständigen Systeme linear unabhängiger Covarianten m^{ten} Grades von f ein vollständiges System linear unabhängiger Covarianten n^{ten} Grades von g entspricht. —

Eine ähnliche Bemerkung lässt sich offenbar an den allgemeinen Satz des vorigen Paragraphen anknüpfen für den Fall, dass die Anzahlen der Elementarterme der a und b, die in der Invariante $\mathsf{K}(a, b)$ auftreten, gleich gross sind und dass diese Invariante, aufgefasst als bilineare Function jener Elementarterme, eine nicht verschwindende Determinante besitzt.

Nach den Erörterungen des vorigen Paragraphen kann man die Resultante R auch dazu verwenden, aus einer Covariante m^{ten} Grades von f eine zweite solche Covariante abzuleiten. Um die hierbei in Betracht kommenden Formeln bequemer schreiben zu können, will ich festsetzen, dass die Indices i, k, h der Werthe $1, 2, \ldots \mu$ fähig sein und, wo sie als Summationsbuchstaben auftreten, alle diese Werthe durchlaufen sollen. Die Resultante R stellt sich dann (nach (4) und (5)) dar in der Gestalt:

$$R = \sum_{i,k} c_{i,k} A_i B_k.$$

Aus der Covariante m^{ten} Grades

$$J = \sum_i C_i A_i$$

der Form f geht nun dadurch, dass allgemein A_i durch seinen Factor in R ersetzt wird, die Covariante n^{ten} Grades

$$K = \sum_{i,k} C_i c_{ik} B_k$$

der Form g hervor. Führt man hier wiederum an Stelle von B_k seinen Factor in R ein, so entsteht aus K die Covariante m^{ten} Grades

$$J' = \sum_{i,k,h} C_i c_{ik} c_{h,k} A_h$$

der Form f. Wenn also unter $d_{i,h}$ die aus den Coefficienten c_{ik} der Resultante abgeleiteten Zahlen

$$d_{i,h} = \sum_k c_{i,k} \cdot c_{h,k}$$

verstanden werden, so ist gleichzeitig mit

$$J = C_1 A_1 + C_2 A_2 + \cdots + C_\mu A_\mu$$

auch

$$J' = C_1' A_1 + C_2' A_2 + \cdots + C_\mu' A_\mu$$

eine Covariante m^{ten} Grades von f, wo zur Abkürzung

$$C_i' = d_{1,i} C_1 + d_{2,i} C_2 + \cdots + d_{\mu,i} C_\mu$$

gesetzt ist.

§ 13.

Verallgemeinerung des Hermite'schen Reciprocitätsgesetzes.

Indem man den Satz des Paragraphen 11, wiederholt zur Anwendung bringt, kann man aus den Invarianten irgend eines Formensystems Invarianten eines zweiten Formensystems ableiten, welches dadurch aus dem ersten entsteht, dass irgend welche Formen desselben durch irgend welche andere Formen ersetzt werden. Für den Fall der binären Formen erhält man auf diese Weise leicht die folgende Verallgemeinerung des Hermite'schen Satzes.

Es seien

(1) $$f_1, f_2, \ldots f_r, h_1, h_2, \ldots h_s,$$

(2) $$g_1, g_2, \ldots g_r, h_1, h_2, \ldots h_s$$

zwei Systeme von präparirten Formen der binären Variabeln x_1, x_2, die sich in den ersten r Formen unterscheiden. Die Coefficienten der Form f_i mögen mit $a^{(i)}$, die der Form g_i mit $b^{(i)}$, ferner die Ordnung von f_i (Grad in x_1, x_2) mit n_i, die Ordnung von g_i mit m_i bezeichnet werden. Die präparirten Elementarterme m_i^{ter} Ordnung der Coefficienten $a^{(i)}$ seien mit $A_1^{(i)}, A_2^{(i)}, \ldots$ bezeichnet und

(3) $$R_i = \sum_k L_k^{(i)} A_k^{(i)},$$

wo die Summe sich auf alle Elementarterme $A_k^{(i)}$ erstreckt, sei die Resultante von $f_i(-x_2, x_1)$ und $g_i(x_1, x_2)$.

Die Coefficienten $L_k^{(i)}$ sind dann homogene Functionen n_i^{ten} Grades der Coefficienten $b^{(i)}$.

Wenn nun nach den Coefficienten der Formen $f_1, f_2, \ldots f_r$ angeordnet,

(4) $$J = \sum_{k_1, k_2, \cdots k_r} C \,.\, A_{k_1}^{(1)} A_{k_2}^{(2)} \ldots A_{k_r}^{(r)}$$

eine Invariante des Formensystemes (1) ist, welche in den Coefficienten der Form f_i den Grad m_i besitzt, so wird

(5) $$K = \sum_{k_1, k_2, \cdots k_r} C \,.\, L_{k_1}^{(1)} L_{k_2}^{(2)} \ldots L_{k_r}^{(r)}$$

eine Invariante des Formensystemes (2) sein, welche in den Coefficienten der Form g_i den Grad n_i besitzt. Durch diesen Satz wird jeder Invariante J des Formensystemes (1), von den Geraden $m_1, m_2, \ldots m_r$ in den Coefficienten der Formen $f_1, f_2, \ldots f_r$ bez., eine bestimmte Invariante K des Formensystemes (2) zugeordnet, von den Geraden $n_1, n_2, \ldots n_r$ in den Coefficienten der Formen $g_1, g_2, \ldots g_r$ bez.

Und zwar zeigt man wieder leicht, dass einem vollständigen System linear unabhängiger Invarianten J ein vollständiges System linear unabhängiger Invarianten K entspricht.

Zürich, den 7. Juni 1894.

Ueber die Resultante.

Von

Paul Gordan in Erlangen.

(Auszug aus einem an Herrn A. Hurwitz gerichteten Briefe.)

§ 1.

Die Matrices M und N.

Die Resultante R setzt sich zusammen aus den Matrices

$$M = \begin{vmatrix} a_0, & a_1, & a_2, \ldots, a_n, & 0, & 0, \ldots \\ 0, & a_0, & a_1, \ldots\ldots, & a_n, & 0, \ldots \\ . & . & . & . & . \\ 0, & 0, \ldots, a_0, & \ldots\ldots\ldots, & & a_n \end{vmatrix},$$

$$N = \begin{vmatrix} b_0, & b_1, & b_2, \ldots, b_m, & 0, & 0, \ldots \\ 0, & b_0, & b_1, \ldots\ldots, & b_m, & 0, \ldots \\ . & . & . & . & . \\ 0, & 0, \ldots, b_0, & \ldots\ldots\ldots, & & b_m \end{vmatrix}$$

M hat m Zeilen und N n Zeilen. Die q^{te} Colonne in jeder Matrix heisse kurz „Colonne q". Die m-reihigen Determinanten C_i von M und die n-reihigen Determinanten D_i von N lassen sich aus je m und n Colonnen

$$q_{i1}\, q_{i2} \ldots q_{im}, \qquad r_{i1}\, r_{i2} \ldots r_{in}$$

zusammensetzen. Die Colonnen-Nummern

$$q_{i1}, q_{i2}, \ldots q_{im} \text{ bez. } r_{i1}\, r_{i2} \ldots r_{in}$$

bilden eine gut geordnete Combination von m bez. n Ziffern der Reihe

$$1, 2, 3, \ldots m + n.$$

M besitzt $p = \binom{m+n}{m}$ Determinanten C und N p Determinanten D.

§ 2.

Correspondirende Determinanten.

Sind die aus den Colonnen

$$q_{i1}\, q_{i2} \ldots q_{im} \quad \text{und} \quad r_{j1}\, r_{j2} \ldots r_{jn}$$

zusammengesetzten Determinanten C_i und D_J correspondirende Determinanten, so bilden die Ziffern

$$q_{i1}\, q_{i2} \ldots q_{im}\;\; r_{J1}\, r_{J2} \ldots r_{Jn}$$

eine Permutation der Ziffern

$$1, 2, \ldots m + n,$$

und, wenn λ eine beliebige Zahl $\leqq m$ bedeutet und $q_{i\lambda} - \lambda$ durch μ bezeichnet wird, die Ziffern

$$q_{i1}\, q_{i2} \ldots q_{i\lambda}\;\; r_{J1}\, r_{J2} \ldots r_{J\mu}$$

eine Permutation der Ziffern

$$1\, 2 \ldots q_{i\lambda}.$$

Nach dem Satze von Laplace lässt sich die Resultante R in die Reihe entwickeln

$$R = \sum_{i=1}^{i=p} (-1)^{(q_{i1}-1)+(q_{i2}-2)+\cdots+(q_{im}-m)}\, C_i D_J. \tag{1}$$

§ 3.

Anordnung der C und D.

Die Determinanten C und D sollen in gewohnter Weise so geordnet werden, dass für $\varkappa > i$ eine Zahl λ der Art existirt, dass

$$q_{i1} = q_{\varkappa 1},\; q_{i2} = q_{\varkappa 2}, \ldots q_{i,\lambda-1} = q_{\varkappa,\lambda-1},\; q_{i\lambda} < q_{\varkappa\lambda}$$

ist.

Sind C_i, D_J und $C_\varkappa$, D_K Paare correspondirender Determinanten, so bestehen die Relationen

$$r_{J1} = r_{K1},\; r_{J2} = r_{K2}, \ldots r_{J,\mu} = r_{K,\mu},\; r_{K,\mu+1} = q_{i\lambda},\; r_{J,\mu+1} > q_{i\lambda},$$

welche zeigen, dass $J > K$ ist, dass also die Ziffern J sich in umgekehrter Reihe wie die i bewegen. Hieraus folgt die Formel

$$i + J = p + 1. \tag{2}$$

§ 4.

Die Producte A und B.

Die Determinanten C_i und D_i haben die Anfangsglieder

$$A_i = a_{q_{i1}-1}\, a_{q_{i2}-2} \ldots a_{q_{im}-m} = a_{i_1}\, a_{i_2} \ldots a_{i_m},$$

$$B_i = b_{r_{i1}-1}\, b_{r_{i2}-2} \ldots b_{r_{in}-n} = b_{i_1'}\, b_{i_2'} \ldots b_{i_n'}.$$

Jedes Product, welches in einer solchen Determinante auftritt, ist gleichzeitig das Anfangsglied einer Determinante C oder D. Die Producte A_i, B_i sind den Determinanten C_i, D_i eindeutig zugeordnet. Die Indices i_ϱ, k_ϱ zweier Producte A_i, $A_\varkappa$ genügen, wenn $i > \varkappa$ ist, Formeln der Form

$$i_1 = \varkappa_1,\; i_2 = \varkappa_2, \ldots i_{\lambda-1} = \varkappa_{\lambda-1},\; i_\lambda > \varkappa_\lambda.$$

§ 5.

Die Glieder von C_i.

Die Glieder der Determinante C_i sind die Producte

$$A_{ih} = a_{q_{i1}-\varrho_1} a_{q_{i2}-\varrho_2} \dots a_{q_{im}-\varrho_m} = a_{i_1+h_1} a_{i_2+h_2} \dots a_{i_m+h_m},$$

wo die Ziffern

$$(\varrho_1, \varrho_2, \dots \varrho_m) = (1-h_1, 2-h_2, \dots m-h_m)$$

eine Permutation der Ziffern

$$1, 2, \dots m \quad .$$

bilden. Dem Anfangsgliede A_i ist die Zifferreihe

$$(h_1, h_2, \dots h_m) = (0, 0, \dots 0)$$

zugeordnet und den übrigen Gliedern A_{ih} Zifferreihen

$$h_1, h_2, \dots h_m,$$

in welchen das erste nicht verschwindende Element

$$h_\lambda < 0$$

ist. A_{ih} ist Anfangsglied einer Determinante C_k, also

$$A_{ih} = A_k = a_{k_1} a_{k_2} \dots a_{k_m}.$$

Die Ziffern der Reihe

$$i_1 + h_1, \; i_2 + h_2, \dots i_m + h_m$$

erzeugen, wenn man sie gut ordnet, die Reihe

$$k_1, k_2, \dots k_m,$$

und da

$$i_1 + h_1 = i_1, \; i_2 + h_2 = i_2, \dots i_{\lambda-1} + h_{\lambda-1} = i_{\lambda-1}$$

unter sich gut geordnet sind, so hat man

$$i_1 \geqq k_1, \; i_2 \geqq k_2, \dots i_{\lambda-1} \geqq k_{\lambda-1}.$$

Gelten hier die Gleichheitszeichen, so kommt die Zahl $i_\lambda + h_\lambda$ in der Reihe vor:

$$k_\lambda, k_{\lambda+1}, \dots k_m.$$

In diesem Falle ist daher

$$i_\lambda + h_\lambda \geqq k_\lambda$$

und folglich

$$i_\lambda > k_\lambda.$$

Unter allen Umständen ist also die erste nicht verschwindende Zahl der Reihe $i_1 - k_1, \; i_2 - k_2, \dots$ positiv, also

$$i > k,$$

und wir haben den Satz:

„Die Anfangsglieder der Determinanten C und D haben einen grösseren Index als die übrigen Glieder."

Demselben gemäss haben die Entwicklungen von C_i und D_i nach ihren Gliedern die Form:

$$(3)\qquad \begin{aligned} C_i &= A_i + \alpha_{i,i-1}A_{i-1} + \alpha_{i,i-2}A_{i-2} + \cdots, \\ D_i &= B_i + \beta_{i,i-1}B_{i-1} + \beta_{i,i-2}B_{i-2} + \cdots. \end{aligned}$$

In ihnen bedeuten die Coefficienten α und β ganze Zahlen, welche insbesondere verschwinden, wenn die zu ihnen gehörenden Producte ein Gewicht haben, das von dem des Anfangsgliedes abweicht. Die aus diesen Coefficienten gebildeten Determinanten:

$$\begin{aligned} (C, A) &= \sum \pm \alpha_{11}\alpha_{22}\ldots\alpha_{pp}, \\ (D, B) &= \sum \pm \beta_{11}\beta_{22}\ldots\beta_{pp} \end{aligned} \qquad (\alpha_{ii}=\beta_{ii}=1,\ \alpha_{ik}=\beta_{ik}=0 \text{ für } k>i)$$

reduciren sich auf ihre Anfangsglieder und haben den Werth 1.

§ 6.

Entwicklung der Resultante R nach den A und B.

Nach Formel (1) und (2) hat man

$$(1\,\mathrm{a})\qquad R = \sum_{i=1}^{i=p} (-1)^{r_i} C_i D_{p+i-1}, \quad (r_i = i_1 + i_2 + \cdots + i_m).$$

Die Resultante ist also eine bilineare Function der C_i und D_i, deren Determinante den Werth

$$(C, D) = (-1)^{\nu+p}$$

besitzt, wo

$$\nu = \sum_i (i_1 + i_2 + \cdots + i_m)$$

ist. In dieser Summe kommen die Ziffern

$$0,\ 1,\ 2, \ldots n$$

gleich oft vor; man hat daher:

$$\nu = \tfrac{1}{2}\, mnp\ ^{*}).$$

---

*) Zur Bestimmung des Restes von $\nu + p$ nach dem Modul 2 kann, nach einer brieflichen Mittheilung des Herrn Hurwitz, der folgende auf den Fall $\pi = 2$ anzuwendende Satz dienen: Der Binomialcoefficient $\frac{(m+n)!}{m!\,n!}$ ist stets und nur dann durch die Primzahl π nicht theilbar, wenn in dem Zahlensystem mit der Basis π jede Ziffer der Zahl $m + n$ gleich der Summe der entsprechenden Ziffern der Zahlen m und n ist. Für $\pi = 2$ lässt sich der Satz so aussprechen: Der Binomialcoefficient $\frac{(m+n)!}{m!\,n!}$ ist stets und nur dann ungerade, wenn die Darstellungen von m und n als Summen von Potenzen von 2 keine Potenz von 2 gemeinsam enthalten.

Durch Eintragung der Werthe von C_i und D_i ergiebt sich die Entwicklung

$$(1\text{b})\quad R = \begin{cases} \sum_i (-1)^{r_i}(A_i + \alpha_{i,i-1}A_{i-1} + \alpha_{i,i-2}A_{i-2} + \cdots) \\ \qquad (B_{p+1-i} + \beta_{p+1-i,p-i}B_{p-i} + \beta_{p+1-i,p-i-1}B_{p-i-1} + \cdots) \\ = \sum_{i,k} c_{ik}A_iB_k, \end{cases}$$

in welcher die numerischen Coefficienten aus der Formel

$$(4)\qquad \begin{aligned} c_{ik} &= (-1)^{r_i}\beta_{p+1-i,k} + (-1)^{r_{i+1}}\alpha_{i+1,i}\beta_{p-i,k} \\ &\quad + \cdots + (-1)^{r_{p+1-k}}\alpha_{p+1-k,i} \end{aligned}$$

berechnet werden und für $p+1 < i+k$ verschwinden.

Die Determinante

$$(A, B) = \sum \pm c_{11}c_{22}\ldots c_{pp}$$

ist das Product von (C, D), (C, A) und (D, B) und hat also, da $(C, A) = (D, B) = 1$, den Werth

$$(A, B) = (C, D) = (-1)^{\frac{1}{2}p(mn+p-1)}.$$

Das Zerfallen der Curven in gerade Linien.

Von

P. Gordan in Erlangen.

Herr Brill hat in den Göttinger Nachrichten (Decbr. 1893) binäre Ueberschiebungen aufgestellt, aus denen man mittelst des Clebsch'schen Ränderungsverfahrens für ternäre, quaternäre u. s. w. Formen f die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür herstellen kann, dass sie in lineare Factoren zerfallen.

Für ternäre Formen besteht diese Bedingung in dem Verschwinden einer Ueberschiebung $(apu)^n$ *), die ich deshalb die Brill'sche Formel nennen will. Zweck dieser meiner Untersuchung ist, zu zeigen, dass $(apu)^n$ den Factor u_x^2 besitzt und durch ihn zu dividiren.

Das Verschwinden des Quotienten

$$\frac{(apu)^n}{u_x^2}$$

liefert dann in der That die einfachsten Bedingungen für das Zerfallen einer Curve in gerade Linien.

§ 1.

Die Schnittpunkte einer Geraden mit einer Curve.

Die Lösung der Aufgabe, die Coordinaten der Schnittpunkte einer geraden Linie

$$v_x = 0$$

mit einer Curve

$$f = a_x^n = b_x^n$$

zu berechnen, ist allgemein bekannt. Wenn ich sie hier noch einmal reproducire, so liegt der Grund darin, dass die dabei auftretenden Beziehungen im Folgenden gebraucht werden.

*) Für quaternäre heisst sie $(apuv)^n$.

Man fixire auf v_x zwei beliebige Punkte x und y und bilde die Punktreihe

$$\lambda x - y;$$

auf ihr liegen die gesuchten Schnittpunkte, ihre Parameter bezeichne ich durch

$$\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n,$$

sie sind die Wurzeln der Gleichung

$$(1) \qquad (\lambda a_x - a_y)^n = f \cdot \{\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} \ldots a_n\} = 0.$$

Nachdem diese Parameter $\lambda_\varkappa$ durch Auflösung derselben bestimmt sind, findet man die Gleichungen der Schnittpunkte aus der Formel:

$$(2) \qquad \lambda_\varkappa u_x - u_y = 0.$$

Da $\lambda_\varkappa$ eine Wurzel der Gleichung (1) ist, so findet die Identität statt:

$$(\lambda_\varkappa a_x - a_y)^n = 0.$$

Eliminirt man $\lambda_\varkappa$ aus derselben und F. (2), so erhält man die Formel:

$$(a_x u_y - u_x a_y)^n = (a u v)^n = 0,$$

sie stellt das Product der Schnittpunkte dar.

Verschwindet $(auv)^n$ für alle Werthe von u, so ist jeder Punkt von v Schnittpunkt; in diesem Falle bildet die Gerade v einen Theil der Curve f.

Vergleicht man auf beiden Seiten der F. (1) die Coefficienten der Potenzen von $\lambda^{n-\varkappa}$, so erhält man die Formel:

$$(3) \qquad (-1)^\varkappa \binom{n}{\varkappa} f_{y^\varkappa} = f a_\varkappa.$$

Diese Coefficienten $a_\varkappa$ sind die symmetrischen Elementarfunctionen der Wurzeln $\lambda_\varkappa$, man kann sie so schreiben:

$$(4) \qquad (-1)^\varkappa a_\varkappa = \sum \lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_\varkappa.$$

§ 2.

Die Schnittpunkte einer geraden Linie mit einer Curve, die in gerade Linien zerfällt.

Die Resultate des vorigen Paragraphen nehmen eine etwas andere Form an, wenn wir die Annahme machen, dass die Curve f in n gerade Linien

$$\alpha_{1,x}\, \alpha_{2,x} \ldots \alpha_{n,x}$$

zerfällt. In diesem Falle hat man die Identitäten:

$$f = \alpha_{1,x}\, \alpha_{2,x} \ldots \alpha_{n,x},$$
$$(a \alpha_\varkappa u)^n = 0.$$

Die Schnittpunkte der Linie v mit f vertheilen sich auf diese Geraden und wir können die Wurzeln $\lambda_\varkappa$ so ordnen, das der Punkt

(2) $$\lambda_\varkappa u_x - u_y = 0$$

auf die Linie $\alpha_\varkappa$ zu liegen kommt.

Es findet dann die Identität statt:

$$\lambda_\varkappa \alpha_{\varkappa,x} - \alpha_{\varkappa,y} = 0,$$

aus welcher für $\lambda_\varkappa$ der Werth fliesst:

$$\lambda_\varkappa = \frac{\alpha_{\varkappa,y}}{\alpha_{\varkappa,x}}.$$

Trägt man denselben in F. (4) ein, so wird dieselbe:

(4a) $$(-1)^\varkappa a_\varkappa = \sum \frac{\alpha_{1,y}}{\alpha_{1,x}} \frac{\alpha_{2,y}}{\alpha_{2,x}} \cdots \frac{\alpha_{\varkappa,y}}{\alpha_{\varkappa,x}}.$$

§ 3.

Die Brill'sche Formel.

Die Summe der Potenzen der Wurzeln $\lambda_\varkappa$:

$$s_\nu = \lambda_1^\nu + \lambda_2^\nu \ldots \lambda_n^\nu$$

lassen sich mit Hilfe der Newton'schen Formeln als ganze Functionen der Coefficienten $a_\varkappa$ darstellen. Die Entwicklung nach Potenzen und Producten derselben beginnt mit den Gliedern:

(5) $$s_n = (-1)^n a_1^n + (-1)^{n-1} n a_1^{n-2} a_2 \ldots.$$

Trägt man in diese Formel für die $a_\varkappa$ ihre Werthe aus F. (3):

$$f a_\varkappa = (-1)^\varkappa \binom{n}{\varkappa} f_{y^\varkappa}$$

ein, so erhält man für s_n einen Bruch, dessen Zähler eine ganze Function von f und seinen Polaren f_{y^ν} und dessen Nenner f^n ist.

Hieraus folgt, dass das Product:

(6) $$\begin{aligned} f^n s_n &= np \\ &= f^n \cdot \left(\frac{\alpha_{1,y}^n}{\alpha_{1,x}^n} + \frac{\alpha_{2,y}^n}{\alpha_{2,x}^n} \cdots \frac{\alpha_{n,y}^n}{\alpha_{n,x}^n} \right) \end{aligned}$$

eine ganze Function von f und seinen Polaren ist. Die Entwicklung dieser ganzen Function nach Producten und Potenzen der Polaren beginnt mit den Gliedern:

(7) $$p = n^{n-1} f_y^n - n^{n-1} \frac{n-1}{2} f f_y^{n-2} f_{y^2} \cdots$$

und die übrigen Glieder haben den Factor f^2. Die Form p ist in den Variabeln y vom Grade n; ich schreibe sie symbolisch:

$$p = p_y^n.$$

Differentiirt man nach dem y und ersetzt man die Incremente durch x so wird:

$$f^n s_x = n p_y^x p_x^{n-x}.$$

Aus der Formel (6) folgt unmittelbar:

(8) $$(a p u)^n = 0.$$

Diese Formel rührt von Brill her und ist die nothwendige Bedingung dafür, dass die Curve f in gerade Linien zerfällt. Man kann aber auch zeigen, dass sie hinreicht. Nimmt man nämlich auf f einen beliebigen Punkt x und legt in ihm eine Tangente f_y an die Curve, so giebt die Formel:

$$(a f u)^n$$

das Product der Schnittpunkte der Tangente f_y mit der Curve f. Besteht nun die Formel (8), so verschwindet $(a f u)^n$ für alle Werthe der u. Hieraus folgt dann, dass f_y einen Theil der Curve bildet. Da in diesem Falle alle Tangenten Theile der Curve f sind, so zerfällt dieselbe in gerade Linien.

§ 4.

Der Factor u_x^2.

Die Ueberschiebung $(a p u)^n$ liefert nicht die einfachste Form, deren Verschwinden das Zerfallen von f in gerade Linien angiebt. Zweck dieser Untersuchung ist zu zeigen, dass $(a p u)^n$ durch u_x^2 theilbar ist und die Division auszuführen. Hiezu theile ich meine Arbeit in 4 Theile:

1) Ich gebe die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür an, dass eine Form

$$\varrho = u_\varrho^n$$

die Potenz u_x^m zum Factor hat.

2) Wie oben gesagt kann man mittelst der Newton'schen Formeln s_n als ganze Function der Coefficienten a_x darstellen. Es werden nun Eigenschaften dieser ganzen Function abgeleitet, aus denen folgt, dass $(a p u)^n$ den Factor u_x^2 besitzt.

3) Die Form

$$(a f u)^n,$$

welche das 1te Glied in der Entwicklung von $(a p u)^n$ nach F. (7) ist, wird in die Normalform gebracht, d. h. in eine Form:

$$(a f u)^n = A u_x^2 + B f$$

der Art, dass B ein Aggregat symbolischer Producte wird, welche nur aus den symbolischen Factoren:

$$f, \ (a b u), \ (a f u), \ b_x$$

zusammengesetzt sind.

4) $(a p u)^n$ wird durch u_x^2 dividirt.

§ 5.

Bedingung dafür, dass ϱ den Factor u_x^m hat.

Wir wollen uns in diesem Paragraphen mit den nothwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür beschäftigen, dass eine Form:

$$\varrho = u_\varrho^n \tag{9}$$

eine Potenz von u_x etwa u_x^m zum Factor hat, und beginnen mit dem Falle:

$$m = 1.$$

In demselben behaupten wir, dass:

$$(\varrho x y)^n = 0 \tag{10}$$

die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür ist, dass ϱ den Factor u_x besitzt.

Beweis: Hat ϱ den Factor u_x, so findet man durch Division eine Form:

$$\vartheta = u_\vartheta^{n-1}$$

der Art, dass die Identität besteht:

$$u_\varrho^n = u_x\, u_\vartheta^{n-1}.$$

Ersetzt man darin u durch $\widehat{xy}$, so entsteht die Formel (10).

Gilt umgekehrt diese Formel, so ersetze man y durch $\widehat{uv}$ und erhält:

$$0 = \left(\varrho\, x\, \widehat{uv}\right)^n = (u_\varrho v_x - v_\varrho u_x)^n$$

$$= \sum_{\varkappa=0}^{\varkappa=n} (-1)^\varkappa \binom{n}{\varkappa} (u_\varrho v_x)^{n-\varkappa} (v_\varrho u_x)^\varkappa,$$

also:

$$\varrho v_x^n = -\, u_x v_\varrho \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=n} (-1)^\varkappa \binom{n}{\varkappa} (u_\varrho v_x)^{n-\varkappa} (v_\varrho u_x)^{\varkappa-1}$$

wodurch unsere Behauptung erwiesen ist.

Ich gehe nunmehr zu dem Falle

$$m = 2$$

über und behaupte, dass die Formel:

$$v_\varrho (\varrho x y)^{n-1} = 0 \tag{10a}$$

die nothwendige und hinreichende Bedingung liefert, dass ϱ den Factor u_x^2 besitzt.

Beweis: Hat ϱ den Factor u_x^2, so findet man durch Division eine Form:

$$\vartheta = u_\vartheta^{n-2}$$

der Art, dass die Identität stattfindet:

$$u_\varrho^n = u_x^2\, u_\vartheta^{n-2}.$$

Ich differentiire nach den u und ersetze die Incremente durch v; es wird dann

$$n u_\varrho^{n-1} v_\varrho = 2 u_x v_x u_\vartheta^{n-2} + (n-2)\, u_x^2 u_\vartheta^{n-3} v_\vartheta.$$

Ersetzt man hier u durch $\widehat{xy}$, so erhält man die Formel (10a).

Besteht umgekehrt die Formel (10a), so ersetze man darin zunächst v durch $\widehat{xy}$, wodurch man F. (10) erhält, also vorerst sieht, dass die Form ϱ den Factor u_x besitzt, dass also eine Form:

$$\vartheta = u_\vartheta^{n-1}$$

der Art existirt, dass die Identität stattfindet:

$$u_\varrho^n = u_x u_\vartheta^{n-1}.$$

Differentiirt man nach den u und ersetzt die Incremente durch v, so wird:

$$n u_\varrho^{n-1} v_\varrho = v_x u_\vartheta^{n-1} + (n-1)\, u_x v_\vartheta u_\vartheta^{n-2}$$

und, wenn man hier u durch $\widehat{xy}$ ersetzt, nach F. (10a):

$$0 = v_x (\vartheta x y)^{n-1}.$$

Diese Formel zeigt, dass die Form ϑ den Factor u_x und somit ϱ den Factor u_x^2 besitzt.

In dieser Weise kann man fortfahren und zu den Fällen

$$m = 3, 4, 5, \ldots$$

übergehen, indem man bei jedem neuen Falle annimmt, die früheren seien bereits erledigt.

Allgemein findet man als nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass ϱ den Factor u_x^m hat, die Formel:

$$u_\varrho^{m-1} (\varrho x y)^{n-m+1} = 0. \tag{11}$$

Beweis: Hat die Form ϱ den Factor u_x^m, so giebt es eine Form

$$\vartheta = u_\vartheta^{n-m}$$

der Art, dass die Identität stattfindet:

$$u_\varrho^n = u_x^m u_\vartheta^{n-m}.$$

Differentiirt man dieselbe nach u und ersetzt man die Incremente durch $\widehat{xy}$, so findet man der Reihe nach diese Formeln:

$$\binom{n}{1} u^{n-1}(\varrho x y) = \binom{n-m}{1} u_x^m u_\vartheta^{n-m-1}(\vartheta x y),$$
$$\binom{n}{2} u_\varrho^{n-2}(\varrho x y)^2 = \binom{n-m}{2} u_x^m u_\vartheta^{n-m-2}(\vartheta x y)^2,$$
$$\binom{n}{3} u_\varrho^{n-3}(\varrho x y)^3 = \binom{n-m}{3} u_x^m u_\vartheta^{n-m-3}(\vartheta x y)^3,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\binom{n}{n-m} u_\varrho^m (\varrho x y)^{n-m} = \binom{n-m}{n-m} u_x^m (\vartheta x y)^{n-m},$$
$$\binom{n}{n-m+1} u_\varrho^{m-1}(\varrho x y)^{n-m+1} = 0,$$

also die Formel (11).

Gilt umgekehrt diese Formel, so kann man zunächst schliessen, dass ϱ zum Mindesten den Factor u_x^{m-1} besitzt. Es giebt dann eine Form:

$$\vartheta = u_\vartheta^{n-m+1}$$

der Art, dass die Identität stattfindet:

$$u_\varrho^n = u_x^{m-1}\, u_\vartheta^{n-m+1}.$$

Differentiirt man dieselbe nach den u und ersetzt die Incremente durch $\widehat{xy}$, so erhält man der Reihe nach die Formeln:

$$\binom{n}{1} u_\varrho^{n-1}(\varrho x y) = \binom{n-m+1}{1} u_x^{m-1} u_\vartheta^{n-m}(\vartheta x y),$$
$$\binom{n}{2} u_\varrho^{n-2}(\varrho x y)^2 = \binom{n-m+1}{2} u_x^{m-1} u_\vartheta^{n-m-1}(\vartheta x y)^2,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\binom{n}{n-m} u_\varrho^m (\varrho x y)^{n-m} = \binom{n-m+1}{n-m} u_x^{m-1} u_\vartheta (\vartheta x y)^{n-m},$$
$$\binom{n}{n-m+1} u_\varrho^{m-1}(\varrho x y)^{n-m+1} = \binom{n-m+1}{n-m+1} u_x^{m-1}(\vartheta x y)^{n-m+1},$$

also nach F. (11):

$$(\vartheta x y)^{n-m+1} = 0.$$

Hieraus folgt, dass ϑ den Factor u_x und somit ϱ den Factor u_x^m besitzt.

Die Formel (11) lässt sich, was in manchen Fällen seine Vortheile gewährt, auch durch diese 3 einfacheren Bedingungen ersetzen:

(12a) $$u_\varrho^{m-2}(\varrho x y)^{n-m+2} = 0,$$

(12b) $$u_\varrho^{m-2}(\varrho x y)^{n-m+1}(\varrho y z) = 0,$$

(12c) $$u_\varrho^{m-2}(\varrho x y)^{n-m+1}(\varrho z x) = 0,$$

da sie mittelst der Identität:

$$u_z(\varrho x y) + u_x(\varrho y z) + u_y(\varrho z x) = u_\varrho(x y z)$$

aus denselben folgt.

Insbesondere kann man als nothwendige und hinreichende Bedingungen dafür dass die Form ϱ den Factor u_x^2 besitzt, diese 3 aufstellen:

(13a) $$(\varrho x y)^n = 0,$$

(13b) $$(\varrho x y)^{n-1}(\varrho y z) = 0,$$

(13c) $$(\varrho x y)^{n-1}(\varrho z x) = 0.$$

§ 6.

Eigenschaften von s_n als ganzer Function der a.

Es handelt sich also darum, die Formeln (13) für die Ueberschiebung

$$(a p u)^n$$

zu bestätigen.

Das Mittel hierzu bieten die Newton'schen Formeln:

(14) $$\sum_{\varkappa=0}^{\varkappa=n} a_{n-\varkappa}\, s_\varkappa = 0,$$

sie lehren uns, die Potenzsummen $s_\varkappa$ der Wurzeln einer Gleichung:

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} \cdots a_n = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2) \cdots (x - \lambda_n)$$

als ganze Functionen der Coefficienten $a_\varkappa$ darzustellen. Ich will sie dazu benutzen, um einige Eigenschaften dieser ganzen Functionen abzuleiten.

Die erste derselben finden wir aus der Betrachtung, dass die Potenzen und Producte der Coefficienten, welche die Glieder in der Entwicklung von s_n bilden, sämmtlich das Gewicht n besitzen. Hieraus ergiebt sich sogleich die Relation:

(15) $$n s_n = \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=n} \varkappa a_\varkappa \frac{\partial s_n}{\partial a_\varkappa}.$$

Nicht so einfach ist eine weitere Eigenschaft, welche sich auf die partiellen Differentialquotienten

$$\frac{\partial s_n}{\partial a_\varkappa}$$

bezieht, herzuleiten. Zu diesem Zwecke führe ich eine Reihe von Grössen

$$g_0\; g_1\; g_2 \cdots$$

ein, von denen

$$g_0 = -1$$

sein möge und die übrigen durch die Recursionsformeln bestimmt werden:

(16) $$\sum_{\varkappa=0}^{\varkappa=n} a_{n-\varkappa}\, g_\varkappa = 0.$$

Ich behaupte nun die Formel:

(17) $$\frac{\partial s_n}{\partial a_{n-\mu}} = n g_\mu.$$

Beweis. Nach der Formel:

$$\frac{\partial s_n}{\partial a_n} = -n$$

gilt unser Satz für $\mu = 0$. Bei dem Beweise für die übrigen Zahlen

$$\mu = 1\ 2\ 3\ \ldots$$

mache ich die Annahme, er gelte bereits für alle Zahlen, die kleiner als μ sind, dass also für $\varkappa > 0$:

(17a) $$\frac{\partial s_{n-\varkappa}}{\partial a_{n-\mu}} = (n-\varkappa)\, g_{\mu-\varkappa}$$

ist.

Nach dieser Annahme folgt aus F. (15) die Formel:

(15a) $$s_\mu = \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=\mu} \varkappa\, a_\varkappa\, g_{\mu-\varkappa}.$$

Ich differentiire nun die Newton'sche Formel:

(14) $$\sum_{\varkappa=0}^{\varkappa=n} a_\varkappa\, s_{n-\varkappa} = 0$$

nach $a_{n-\mu}$; diese Grösse tritt erstens in einem Gliede als Coefficient auf und sodann in denjenigen $s_{n-\varkappa}$, bei denen $\varkappa \leqq \mu$ ist. So entsteht die Formel:

$$\sum_{\varkappa=0}^{\varkappa=\mu} a_\varkappa \frac{\partial s_{n-\varkappa}}{\partial a_{n-\mu}} + s_\mu = 0,$$

oder, wenn man die Werthe für die:

$$\frac{\partial s_{n-\varkappa}}{\partial a_{n-\mu}} \quad \text{und} \quad s_\mu$$

aus den Formeln (17a) und (15a) einträgt:

$$\frac{\partial s_n}{\partial s_{n-\mu}} + \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=\mu} (n-\varkappa)\, g_{\mu-\varkappa}\, a_\varkappa + \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=\mu} \varkappa a_\varkappa\, g_{\mu-\varkappa} = 0$$

oder:

$$\frac{\partial s_n}{\partial a_{n-\mu}} + n \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=\mu} g_{\mu-\varkappa}\, a_\varkappa = 0.$$

Zieht man hiervon die Recursionsformel:

$$(16) \qquad n\sum_{\varkappa=0}^{\varkappa=\mu} g_{\mu-\varkappa}a_\varkappa = 0$$

ab, so gelangt man zu der behaupteten Formel:

$$\frac{\partial s_n}{\partial a_{n-\mu}} = n g_\mu.$$

Diese Formel soll nun benützt werden, um die Differentiale

$$ds_\varkappa \quad \text{und} \quad da_\varkappa$$

mit einander in Beziehung zu setzen.

Hierzu gehe ich von der Doppelsumme:

$$W = \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=n}\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} \varkappa a_\varkappa g_{n-\varkappa-\lambda+1}\, da_\lambda$$

aus und ordne dieselbe in doppelter Art.

Das eine Mal ziehe ich alle Glieder, welche dasselbe λ haben zuerst zusammen und das andere Mal geschieht das Nämliche mit den Gliedern, welche dasselbe $\varkappa$ haben. In Folge der Formeln

$$(15\text{a}) \qquad s_{n-\lambda+1} = \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=n} \varkappa a_\varkappa g_{n-\varkappa-\lambda+1}.$$

$$(17) \qquad ds_{n-\varkappa+1} = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n}\frac{\partial s_{n-\varkappa+1}}{\partial a_\varkappa}\, da_\varkappa = (n-\varkappa+1)\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} g_{n-\varkappa-\lambda+1}\, da_\lambda$$

erhalte ich für W die beiden Werthe

$$\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=n} s_{n-\varkappa+1}\, da_\varkappa$$

und

$$\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=n} \frac{\varkappa}{n-\varkappa+1}\, a_\varkappa ds_{n-\varkappa+1},$$

deren Gleichsetzung die Formel liefert:

$$\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=n}\left(\frac{\varkappa}{n-\varkappa+1}\, a_\varkappa\, ds_{n-\varkappa+1} - s_{n-\varkappa+1}\, da_\varkappa\right) = 0,$$

die man auch schreiben kann:

$$(18) \qquad \sum_{\varkappa=0}^{\varkappa=n-1}\left(\frac{\varkappa+1}{n-\varkappa}\, a_{\varkappa+1}\, ds_{n-\varkappa} - s_{n-\varkappa}\, da_{\varkappa+1}\right) = 0.$$

Die Coefficienten $a_\varkappa$ und die Potenzsummen $s_\varkappa$ hängen mit den Polaren von f durch die Formeln zusammen:

$$f a_\varkappa = (-1)^\varkappa \binom{n}{\varkappa} a_y^\varkappa a_x^{n-\varkappa},$$

$$f^n s_{n-\varkappa} = n p_y^{n-\varkappa} p_x^\varkappa.$$

Bezeichnet man denjenigen Punkt, welcher durch Differentiation des Punktes y entsteht, durch z, setzt man also:

$$dy = z$$

so erhält man durch Differentiation dieser Formeln:

$$f d a_\varkappa = (-1)^\varkappa \binom{n}{\varkappa} \varkappa a_y^{\varkappa-1} a_z a_x^{n-\varkappa},$$

$$f^n d s_{n-\varkappa} = n(n-\varkappa) p_y^{n-\varkappa-1} p_z p_x^\varkappa.$$

Diese Werthe von:

$$a_\varkappa,\ s_{n-\varkappa},\ d a_\varkappa,\ d s_{n-\varkappa}$$

trage ich in die Formeln:

$$(14) \qquad \sum_{\varkappa=0}^{\varkappa=n} a_\varkappa s_{n-\varkappa} = 0,$$

$$(18) \qquad \sum_{\varkappa=0}^{\varkappa=n-1} \left(\frac{\varkappa+1}{n-\varkappa} a_{\varkappa+1} d s_{n-\varkappa} - s_{n-\varkappa} d a_{\varkappa+1} \right) = 0$$

ein und gelange so zu den Formeln:

$$\sum_{\varkappa=0}^{\varkappa=n} (-1)^\varkappa \binom{n}{\varkappa} a_y^\varkappa a_x^{n-\varkappa} p_y^{n-\varkappa} p_x^\varkappa = 0,$$

$$\begin{aligned} 0 = \sum_{\varkappa=0}^{\varkappa=n-1} \Bigg\{ & \frac{\varkappa+1}{n-\varkappa} (-1)^{\varkappa+1} \binom{n}{\varkappa+1} a_y^{\varkappa+1} a_x^{n-\varkappa-1} (n-\varkappa) p_y^{n-\varkappa-1} p_z p_x^\varkappa \\ & - p_y^{n-\varkappa} p_x^\varkappa (-1)^{\varkappa+1} \binom{n}{\varkappa+1} (\varkappa+1) a_y^\varkappa a_z a_x^{n-\varkappa-1} \Bigg\} \end{aligned}$$

$$= (a_y p_z - p_y a_z) \sum_{\varkappa=0}^{\varkappa=n-1} (-1)^{\varkappa+1} (\varkappa+1) \binom{n}{\varkappa+1} a_y^\varkappa a_x^{n-1-\varkappa} p_y^{n-1-\varkappa} p_x^\varkappa$$

$$= -n (a_y p_z - p_y a_z) \sum_{\varkappa=0}^{\varkappa=n-1} (-1)^\varkappa \binom{n-1}{\varkappa} (a_y p_x)^\varkappa (a_x p_y)^{n-1-\varkappa}$$

oder:

$$(19a) \qquad (a_y p_x - p_y a_x)^n = 0,$$

$$(19b) \qquad (a_y p_z - p_y a_z)(a_y p_x - p_y a_x)^{n-1} = 0.$$

Differentiirt man Formel (19a) noch den y und ersetzt man die Incremente durch z, so wird:

(19c) $$(a_z p_x - p_z a_x)(a_y p_x - p_y a_x)^{n-1} = 0.$$

Die Formeln (19) sind nach Formeln (13) die Bedingungen dafür, dass die Ueberschiebung:

$$(apu)^n$$

u_x^2 als Factor enthält.

§ 7.

Die Normalform von $(afu)^n$.

Das 1[te] Glied in der Entwicklung von p_y^n nach Polaren von f ist f_y^n und demnach das 1[te] Glied in der Entwicklung von $(apu)^n$ die Ueberschiebung $(afu)^n$.

Die geometrische Bedeutung dieser Formel ist das Product derjenigen Punkte, welche die Polare f_y des Punktes x aus der Curve f ausschneidet.

In dem speciellen Fall, dass der Punkt x auf der Curve f selbst liegt, wird f_y Tangente und zwei der Schnittpunkte fallen in den Punkt x. Ist also $f=0$, so hat $(afu)^n$ den Factor u_x^2. Hieraus folgt, dass man die Ueberschiebung $(afu)^n$ in die Form:

(20a) $$(afu)^n = Au_x^2 + Bf$$

bringen kann. Dieselbe ist aber keineswegs eindeutig, da der Ausdruck:

(20b) $$(afu)^n (A + Cf)u_x^2 + (B - Cu_x^2)f$$

gleichfalls diese Form hat. Um eine bestimmte Form für $(afu)^n$ zu erhalten, muss man noch eine weitere Bedingung hinzufügen. Als solche wähle ich die, dass die symbolischen Producte, aus denen der Factor von f besteht, nur aus den symbolischen Factoren:

$$f,\ (abu),\ (afu),\ b_x$$

zusammengesetzt sind. Diese Darstellung von $(afu)^n$ nenne ich die Normalform von $(afu)^n$ und stelle mir nunmehr die Aufgabe, diese Ueberschiebung in der Normalform darzustellen. Dieselbe zerfällt in 2 Theile:

1[ter] Theil. $(afu)^n$ soll in die Form:

$$(afu)^n = Au_x^2 + Bf$$

gebracht werden.

2[ter] Theil. Der Factor B soll in die Form:

(21) $$B = Cu_x^2 + D$$

der Art gebracht werden, dass der Ausdruck:

$$(afu)^n = (A + Cf)u_x^2 + Du_x^2,$$

die Normalform von $(afu)^n$ ist, dass also die Glieder von D symbolische Producte sind, welche nur die Factoren:

$$f,\ (abu),\ (afu),\ b_x$$

enthalten.

Die Aufgabe, die Ueberschiebung $(afu)^n$ in die Form

$$(20\text{a})\qquad (afu)^n = Au_x^2 + Bf$$

zu bringen, ist bereits (Math. Ann. Bd. 7, Dersch über Doppeltangenten) im Wesentlichen gelöst worden; ich werde mich also in der Darstellung des dort gegebenen Verfahrens kurz fassen dürfen.

Die Rechnung ist diese:

$$(afu)^n = (abu)(afu)^{n-1}b_x^{n-1} = \tfrac{1}{2}(abu)\Big\{\big((afu)b_x\big)^{n-1} - \big((bfu)a_x\big)^{n-1}\Big\}$$

$$= \tfrac{1}{2}(abu)\big((afu)b_x - (bfu)a_x\big)\sum_{\varkappa=0}^{\varkappa=n-2}\{(afu)b_x\}^{n-2-\varkappa}\{(bfu)a_x\}^{\varkappa}$$

$$= \tfrac{1}{2}(abu)\{f(abu) - u_x(abf)\}\sum_{\varkappa=0}^{\varkappa=n-2}\big((afu)b_x\big)^{n-2-\varkappa}\big((bfu)a_x\big)^{\varkappa}.$$

Hieraus ergiebt sich die verlangte Form (20a), wenn man erstens

$$(22)\qquad B = \tfrac{1}{2}(abu)^2\sum_{\varkappa=0}^{\varkappa=n-2}\big((afu)b_x\big)^{n-2-\varkappa}\big((bfu)a_x\big)^{\varkappa}$$

setzt und dann zweitens zeigt, dass der Ausdruck:

$$(23)\qquad L = (abu)\,(abf)\sum_{\varkappa=0}^{\varkappa=n-2}\big((afu)b_x\big)^{n-2-\varkappa}\big((bfu)a_x\big)^{\varkappa}$$

den Factor u_x hat und ihn:

$$(24)\qquad L = -\,2Au_x$$

setzt. Zu diesem Zwecke bilde ich die Summe:

$$K = \sum (abc)^2\,(afu)^{\varkappa}(bfu)^{\lambda}(cfu)^{\mu}\,a_x^{n-2-\varkappa}\,b_x^{n-2-\lambda}\,c_x^{n-2-\mu}$$

und dehne sie über alle Zahlen $\varkappa, \lambda, \mu$ aus, welche die Relation befriedigen

$$\varkappa + \lambda + \mu = n - 2.$$

Mit Hilfe der Identität:

$$u_x(abc) = a_x(bcu) + b_x(cau) + c_x(abu)$$

wird das Product

$$u_x K$$

die Summe von 3 Summen, welche durch Vertauschung der Symbole a, b, c in einander übergehen. Da diese Symbole dieselbe Form f darstellen, so haben diese 3 Summen denselben Werth und man hat:

$$Ku_x = 3(abc)\,(abu)\sum (afu)^{\varkappa}(bfu)^{\lambda}(cfu)^{\mu}\,a_x^{n-2-\varkappa}\,b_x^{n-2-\lambda}\,c_x^{n-1-\mu}.$$

In dieser Summe haben diejenigen Glieder, bei denen $\mu = 0$ ist, zusammen den Werth $3L$, so dass man, wenn man in den übrigen Gliedern

$$\mu = \nu + 1$$

setzt, die Formel erhält:

$$\begin{aligned} &Ku_x - 3L \\ &= 3(abc)(abu)(cfu)\sum(afu)^{\varkappa}(bfu)^{\lambda}(cfu)^{\nu} a_x^{n-2-\varkappa} b_x^{n-2-\lambda} c_x^{n-2-\nu}, \end{aligned}$$

in der sich die Summe über alle Zahlen $\varkappa$, λ, ν erstreckt, für welche:

$$\varkappa + \lambda + \nu = n - 3$$

ist. Vertauscht man hier die Symbole a, b, c mit einander, so erhält man 3 Summen, welche denselben Werth besitzen.

Dieselben wollen wir addiren, so dass:

$$\begin{aligned} &Ku_x - 3L \\ &= (abc)\left\{\begin{aligned} &\big((abu)(cfu) + (bcu)(afu) + (cau)(bfu)\big) \\ &\cdot \sum(afu)^{\varkappa}(bfu)^{\lambda}(cfu)^{\nu} a_x^{n-2-\varkappa} b_x^{n-2-\lambda} c_x^{n-2-\nu} \end{aligned}\right. \\ &= 0 \end{aligned}$$

wird. Es ist

$$L = \frac{1}{3} Ku_x$$

und daher nach Formel (24):

$$(25) \qquad \begin{aligned} A &= -\frac{1}{6} K \\ &= -\frac{1}{6}\sum(abc)^2(afu)^{\varkappa}(bfu)^{\lambda}(cfu)^{\mu} a_x^{n-2-\varkappa}\, b_x^{n-2-\lambda}\, c_x^{n-2-\mu}. \end{aligned}$$

Ich wende mich jetzt zur 2ten Aufgabe, die Form:

$$B = \frac{1}{2}(abu)^2 \sum_{\varkappa=0}^{\varkappa=n-2} \big((afu)\, b_x\big)^{n-2-\varkappa} \big((bfu)\, a_x\big)^{\varkappa}$$

in eine solche Form:

$$(21) \qquad B = Cu_x^2 + D$$

zu bringen, dass die symbolischen Producte, aus denen D besteht, nur die Factoren:

$$f,\ (abu),\ (afu),\ b_x$$

enthalten.

Um diese Aufgabe zu lösen, gehe ich von den Identitäten aus:

$$\begin{aligned} x^n + y^n &= \big(y + (x-y)\big)^n + \big(x - (x-y)\big)^n, \\ n(x^{n-1} - y^{n-1}) &= n\big(y + (x-y)\big)^{n-1} - n\big(x - (x-y)\big)^{n-1} \end{aligned}$$

und entwickle die Potenzen rechter Hand nach dem binomischen Lehrsatze. Hierdurch entstehen die Formeln:

$$n(x^{n-1}-y^{n-1})=\sum_{\varkappa=2}^{\varkappa=n}\binom{n}{\varkappa}\left(y^{n-\varkappa}+(-1)^\varkappa x^{n-\varkappa}\right)(x-y)^{\varkappa-1},$$

(26 a) $$n\sum_{\varkappa=0}^{\varkappa=n-2}x^{n-2-\varkappa}y^\varkappa=\sum_{\varkappa=2}^{\varkappa=n}\binom{n}{\varkappa}\left(y^{n-\varkappa}+(-1)^\varkappa x^{n-\varkappa}\right)(x-y)^{\varkappa-2},$$

$$2n(x^{n-1}-y^{n-1})=n\sum_{\varkappa=2}^{\varkappa=n}\binom{n-1}{\varkappa-1}\left(y^{n-\varkappa}+(-1)^\varkappa x^{n-\varkappa}\right)(x-y)^{\varkappa-1}$$

$$=\sum_{\varkappa=2}^{\varkappa=n}\binom{n}{\varkappa}\varkappa\left(y^{n-\varkappa}+(-1)^\varkappa x^{n-\varkappa}\right)(x-y)^{\varkappa-1},$$

(26 b) $$0=\sum_{\varkappa=3}^{\varkappa=n}\binom{n}{\varkappa}(\varkappa-2)\left(y^{n-\varkappa}+(-1)^\varkappa x^{n-\varkappa}\right)(x-y)^{\varkappa-3}.$$

In diesen Identitäten ersetze ich:

$$x \text{ durch } b_x(afu), \quad y \text{ durch } a_x(bfu)$$

also

$$x-y \text{ durch } f(abu)-u_x(abf)$$

und multiplicire Formel (26 a) mit $(abu)^2$ und Formel (26 b) mit $(abu)^2(abf)$. So gelange ich zu den Formeln:

$$2nB=(abu)^2\sum_{\varkappa=2}^{\varkappa=n}\binom{n}{\varkappa}\left(\left(a_x(bfu)\right)^{n-\varkappa}+(-1)^\varkappa\left(b_x(afu)\right)^{n-\varkappa}\right)$$
$$\left(f(abu)-u_x(abf)\right)^{\varkappa-2},$$

$$0=(abu)^2u_x(abf)\sum_{\varkappa=3}^{\varkappa=n}\binom{n}{\varkappa}(\varkappa-2)\left(\left(a_x(bfu)\right)^{n-\varkappa}+(-1)^\varkappa\left(b_x(afu)\right)^{n-\varkappa}\right)$$
$$\left(f(abu)-u_x(abf)\right)^{\varkappa-3}.$$

In denselben stellen die Symbole a und b dieselbe Form f dar, können also mit einander vertauscht werden; man hat daher:

$$nB=(abu)^2\sum_{\varkappa=2}^{\varkappa=n}(-1)^\varkappa\binom{n}{\varkappa}\left(b_x(afu)\right)^{n-\varkappa}\left(f(abu)-u_x(abf)\right)^{\varkappa-2},$$

$$0=(abu)^2u_x(abf)\sum_{\varkappa=3}^{\varkappa=n}(-1)^\varkappa\binom{n}{\varkappa}(\varkappa-2)\left(b_x(afu)\right)^{n-\varkappa}$$
$$\left(f(abu)-u_x(abf)\right)^{\varkappa-3}.$$

Entwickelt man weiter nach dem binomischen Lehrsatze, so entstehen hieraus die folgenden Formeln:

$$nB = (abu)^2 \sum_{\varkappa=2}^{\varkappa=n} (-1)^\varkappa \binom{n}{\varkappa} \big(b_x(afu)\big)^{n-\varkappa} \Big\{ \big(f(abu)\big)^{\varkappa-2} + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\varkappa-2} (-1)^\lambda \binom{\varkappa-2}{\lambda} \big(f(abu)\big)^{\varkappa-2-\lambda} \big(u_x(abf)\big)^\lambda \Big\},$$

$$0 = (abu)^2 u_x(abf) \sum_{\varkappa=3}^{\varkappa=n} \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\varkappa-2} (-1)^{\varkappa+\lambda} \binom{n}{\varkappa} (\varkappa-2) \binom{\varkappa-2}{\lambda-1} \big(b_x(afu)\big)^{n-\varkappa} \big(f(abu)\big)^{\varkappa-2-\lambda} \big(u_x(abf)\big)^{\lambda-1}$$

$$= (abu)^2 \sum_{\varkappa=2}^{\varkappa=n} \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\varkappa-2} (-1)^{\varkappa+\lambda} \binom{n}{\varkappa} \binom{\varkappa-2}{\lambda} \lambda \big(b_x(afu)\big)^{n-\varkappa} \big(f(abu)\big)^{\varkappa-2-\lambda} \big(u_x(abf)\big)^\lambda,$$

$$nB = (abu)^2 \left\{ \begin{aligned} & \sum_{\varkappa=2}^{\varkappa=n} (-1)^\varkappa \binom{n}{\varkappa} \big(b_x(afu)\big)^{n-\varkappa} \big(f(abu)\big)^{\varkappa-2} \\ & - u_x^2 (abf)^2 \sum_{\varkappa=2}^{\varkappa=n} \sum_{\lambda=2}^{\lambda=\varkappa-2} (-1)^{\varkappa+\lambda} \binom{n}{\varkappa} \binom{\varkappa-2}{\lambda} (\lambda-1) \\ & \qquad \big(b_x(afu)\big)^{n-\varkappa} \big(f(abu)\big)^{\varkappa-2-\lambda} \big(u_x(abf)\big)^{\lambda-2}. \end{aligned} \right.$$

Vergleicht man diese Formel mit der von uns behaupteten Formel:

$$B = Cu_x^2 + D,$$

so folgert man:

(27a) $$nC = -(abu)^2 (abf)^2 \sum_{\varkappa=4}^{\varkappa=n} \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\varkappa-4} (-1)^{\varkappa+\lambda} \binom{n}{\varkappa} \binom{\varkappa-2}{\lambda+2} (\lambda+1) \big(b_x(afu)\big)^{n-\varkappa} \big(f(abu)\big)^{\varkappa-4-\lambda} \big(u_x(abf)\big)^\lambda,$$

(27b) $$nD = \sum_{\varkappa=2}^{\varkappa=n} (-1)^\varkappa \binom{n}{\varkappa} \big(b_x(afu)\big)^{n-\varkappa} f^{\varkappa-2} (abu)^\varkappa.$$

Die Formeln (25) und (27) geben die Werthe für A, C und D, welche in der Normalform der Ueberschiebung

$$(afu)^n = (A + Cf) u_x^2 + Df$$

auftreten; trage ich sie in dieselbe ein, so wird sie:

$$n(afu)^n = \left\{ \begin{aligned} & -\frac{n}{6} u_x^2 (abc)^2 \sum (afu)^\varkappa (bfu)^\lambda (cfu)^\mu a_x^{n-2-\varkappa} b_x^{n-2-\lambda} c_x^{n-2-\mu} \\ & - f u_x^2 (abu)^2 (abf)^2 \sum_{\varkappa=4}^{\varkappa=n} \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\varkappa-4} (-1)^{\varkappa+\lambda} \binom{n}{\varkappa} \binom{\varkappa-2}{\lambda+2} (\lambda+1) \\ & \qquad \big(b_x(afu)\big)^{n-\varkappa} \big(f(abu)\big)^{\varkappa-4-\lambda} \big(u_x(abf)\big)^\lambda \\ & + f \sum_{\varkappa=2}^{\varkappa=n} (-1)^\varkappa \binom{n}{\varkappa} \big(b_x(afu)\big)^{n-\varkappa} f^{\varkappa-2} (abu)^\varkappa. \end{aligned} \right.$$

Wir können sie noch weiter vereinfachen, indem wir die Bezeichnung einführen:

$$(28)\qquad q = q_y^n = nf_y^n - f\sum_{\varkappa=2}^{\varkappa=n}(-1)^\varkappa \binom{n}{\varkappa} f^{\varkappa-2} f_y^{n-\varkappa} f_{y^\varkappa};$$

sie wird dann:

$$(29)\quad (aqu)^n = u_x^2 \begin{cases} -\frac{n}{6}(abc)^2 \sum (afu)^\varkappa (bfu)^\lambda (cfu)^\mu \, a_x^{n-2-\varkappa} b_x^{n-2-\lambda} c_x^{n-2-\mu} \\ -f(abu)^2(abf)^2 \sum\limits_{\varkappa=0}^{\varkappa=n} \sum\limits_{\lambda=0}^{\lambda=\varkappa-4} (-1)^{\varkappa+\lambda} \binom{n}{\varkappa}\binom{\varkappa-2}{\lambda+2}(\lambda+1) \\ \qquad \big(b_x(afu)\big)^{n-\varkappa} \big(f(abu)\big)^{\varkappa-4-\lambda} \big(u_x(abf)\big)^\lambda. \end{cases}$$

§ 8.

Division mit u_x^2.

Die ersten Glieder der Entwicklungen von p_y^n und q_y^n nach Polaren sind:

$$n^{n-1} f_y^n - n^{n-1}\frac{n-1}{2} f f_y^{n-2} f_{y^2},$$

$$n f_y^n - \binom{n}{2} f f_y^{n-2} f_{y^2},$$

die übrigen haben den Factor f^2. Hieraus folgt, dass die Differenz:

$$(30)\qquad p_y^n - n^{n-2} q_y^n$$

ebenfalls diesen Factor besitzt, dass man also setzen kann:

$$p_y^n = n^{n-2} q_y^n + f^2 r_y^n.$$

Durch Ueberschiebung mit f erhält man die Formel:

$$(31)\qquad (apu)^n = n^{n-2}(aqu)^n + f^2(aru)^n;$$

sie zeigt, dass $(aru)^n$ den Factor u_x^2 hat, dass also nach § 5 die Formeln bestehen:

$$(a_y r_x - r_y a_x)^n \qquad\quad = 0,$$

$$(a_y r_x - r_y a_x)^{n-1}(aru) = 0.$$

Aus denselben lassen sich diese ableiten:

$$0 = \big((abu)r_x - (rbu)a_x\big)^n \qquad\quad = \big((abr)u_x + b_x(aru)\big)^n,$$

$$0 = \big((abu)r_x - (rbu)a_x\big)^{n-1}(abr)u_x = \big((abr)u_x + b_x(aru)\big)^{n-1}(abr)u_x,$$

$$0 = b_x^n(aru)^n + n\big(b_x(aru)\big)^{n-1}u_x(abr)$$

$$+ u_x^2(abr)^2 \sum_{\varkappa=2}^{\varkappa=n}\binom{n}{\varkappa}\big(b_x(aru)\big)^{n-\varkappa}\big(u_x(abr)\big)^{\varkappa-2},$$

$$0 = n\big(b_x(aru)\big)^{n-1} u_x(abr) + u_x^2(abr)^2 \sum_{\varkappa=2}^{\varkappa=n} n \binom{n-1}{\varkappa-1} \big(b_x(aru)\big)^{n-\varkappa} \big(u_x(abr)\big)^{\varkappa-2},$$

$$f(aru)^n = u_x^2(abr)^2 \sum_{\varkappa=2}^{\varkappa=n} \binom{n}{\varkappa} (\varkappa-1) \big(b_x(aru)\big)^{n-\varkappa} \big(u_x(abr)\big)^{\varkappa-2}.$$

Trägt man in Formel (31) für $(aqu)^n$ und $(aru)^n$ ihre Werthe ein, so gelangt man zu der Endformel:

$$(apu)^n = u_x^2 \left\{ \begin{array}{l} -\frac{n}{6} \sum (afu)^{\varkappa} (bfu)^{\lambda} (cfu)^{\mu} a_x^{n-2-\varkappa} b_x^{n-2-\lambda} c_x^{n-2-\mu} \\ -f(abu)^2(abf)^2 \sum\limits_{\varkappa=4}^{\varkappa=n} \sum\limits_{\lambda=0}^{\lambda=\varkappa-4} (-1)^{\varkappa+\lambda} \binom{n}{\varkappa} \binom{\varkappa-2}{\lambda+2} (\lambda+1) \\ \qquad \big(b_x(afu)\big)^{n-\varkappa} \big(f(abu)\big)^{\varkappa-4-\lambda} \big(u_x(abf)\big)^{\lambda} \\ +f(abr)^2 \sum\limits_{\varkappa=2}^{\varkappa=n} \binom{n}{\varkappa} (\varkappa-1) \big(b_x(aru)\big)^{n-\varkappa} \big(u_x(abr)\big)^{\varkappa-2}. \end{array} \right.$$

Schliesslich will ich noch bemerken, dass die Aufgabe, die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen anzugeben, dass eine Raumcurve C in gerade Linien zerfällt, sich leicht auf die hier gelöste zurückführen lässt. Verbindet man nämlich alle Punkte der Curve C mit einem beliebigen Punkte ξ, so bilden die Verbindungslinien einen Kegel K. Zerfällt nun C in gerade Linien, so zerfallen alle Kegel K in Ebenen.

Erlangen, im April 1894.

Sur la théorie générale des surfaces unicursales.

Par

M. G. Humbert à Paris.

1. Autant la théorie des surfaces représentables point par point sur le plan est riche en propositions particulières et en exemples intéressants, autant elle semble pauvre en résultats généraux. Quand la représentation plane d'une surface est donnée, il est aisé de trouver les propriétés et les liaisons géométriques des courbes de la surface qui ont pour images telles et telles courbes du plan; mais rien ne semble avoir été entrepris, dans cet ordre d'idées, lorsqu'on laisse la représentation plane *complétement* indéterminée. C'est pour contribuer à combler cette lacune que nous avons rédigé le présent mémoire; nous nous proposons d'y rechercher, d'une manière générale, quelles sont les images des courbes communes à la surface unicursale et à ses surfaces adjointes d'un ordre donné: les résultats que Caporali*) a obtenus sur cette question paraissent incomplets et sont même inexacts dans certains cas. La difficulté et l'intérêt du problème tiennent, comme on le verra, à l'existence, sur la surface unicursale considérée, de points singuliers remarquables, dont les caractères analytiques et géométriques seront mis en évidence.

La méthode employée a d'ailleurs une portée assez générale; elle peut s'appliquer à plusieurs classes de surfaces intéressantes, comme nous aurons sans doute occasion de le faire voir plus tard.

2. Une notion de Géométrie plane, utile par le suite, doit d'abord être présentée.

Si une courbe algébrique plane, $C(x, y) = 0$, d'ordre n, possède en un point (a), qu'on peut toujours supposer à distance finie, une singularité σ, nous appellerons *singularité adjointe*, et nous désignerons par σ', la singularité que possèdent, au point (a), toutes les courbes adjointes à C; en particulier, σ' sera la singularité qui est commune, en (a), à toutes les courbes adjointes d'ordre $n-3$. Au point de

*) Voir la note du n° 9.

vue analytique, une courbe $f(x, y) = 0$ possédera en (a) la singularité σ', ou une singularité d'ordre supérieur, si l'intégrale

$$\int \frac{f(x, y)\, dx}{\left(\frac{\partial C}{\partial y}\right)},$$

prise le long de la courbe $C(x, y) = 0$, reste finie au point considéré.

Par exemple, si la singularité σ consiste en un point multiple ordinaire d'ordre m, σ' sera un point multiple d'ordre $m - 1$.

3. Soit maintenant $S(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$ une surface algébrique d'ordre n représentable point par point sur le plan, à l'aide des relations:

$$(1) \qquad \varrho x_i = x_i(u, v) \qquad [i = 1, 2, 3, 4]$$

les $x_i(u, v)$ étant des polynomes en u et v, d'ordre h. Admettons que, dans le plan des u, v, la courbe générique:

$$0 = \lambda_1 x_1(u, v) + \lambda_2 x_2(u, v) + \lambda_3 x_3(u, v) + \lambda_4 x_4(u, v)$$

où les λ sont des constantes arbitraires, ait en des points $(a_1), (a_2), \ldots$ des singularités $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$, dont on peut supposer qu'aucune n'est à l'infini, et proposons-nous de chercher, sur le plan des u, v, l'image des intersections mobiles de la surface S avec les *surfaces adjointes* d'un ordre donné. Par surfaces adjointes nous entendons, selon l'usage, des surfaces qui ont pour ligne multiple d'ordre $l - 1$ toute ligne multiple d'ordre l de S, et pour point multiple d'ordre $l - 2$ au moins tout point multiple d'ordre l. Analytiquement, et d'une manière plus précise, une surface $P(x, y, z) = 0$ sera adjointe à la surface $S(x, y, z) = 0$, si l'intégrale double

$$\iint \frac{P(x, y, z)\, dx\, dy}{S_z'}$$

reste finie, sur la surface S, en tout point à distance finie: on admet, que le plan de l'infini n'a aucune relation particulière avec S, c. à. d. qu'il ne passe par aucun point singulier isolé ou par aucun point d'une ligne multiple remarquable par une singularité speciale.*)

Dans tout ce qui suit, nous représenterons par x, y, z les quotients des coordonnées homogènes $\frac{x_1}{x_4}, \frac{x_2}{x_4}, \frac{x_3}{x_4}$, de sorte que l'équation de la surface S s'écrira indifféremment $S(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$, ou $S(x, y, z) = 0$. Le plan de l'infini sera $x_4 = 0$.

4. Considérons une surface d'ordre $n + q - 4$ *adjointe* à la surface d'ordre n, unicursale, $S = 0$; soit $P(x, y, z) = 0$ son équation: q désigne un entier au moins égal à l'unité. Soit $F(x, y, z) = 0$

---

*) Cette convention, qui évidemment ne diminue en rien la généralité, a pour but unique de simplifier le langage et l'écriture.

l'équation d'une surface *quelconque* d'ordre q; étudions, le long de la courbe $S=0$, $F=0$, l'intégrale

$$J=\int P(x,y,z)\frac{dx}{S_y'F_z'-S_z'F_y'}.$$

C'est évidemment un intégrale abélienne de première espèce, puisque la courbe $S=0$, $F=0$ est l'intersection complète de deux surfaces d'ordres n et q, que la surface $P(x,y,z)=0$ est d'ordre $n+q-4$ et qu'elle possède un point multiple d'ordre $l-1$ en tout point multiple d'ordre l de la courbe: ce dernier point résulte de ce que les seuls points multiples de la courbe sont ceux où la surface F rencontre les lignes multiples de la surface S, car F est supposée n'avoir aucune ligne singulière et ne passer par aucun point singulier remarquable de S.*)

L'intégrale J, prise le long de la courbe $S=0$, $F=0$, peut être mise sous une autre forme, si l'on y remplace x, y, z par leurs valeurs en fonction des paramètres u et v, tirées de (1); le calcul se présente ainsi:

Le long de la courbe $S=0$, $F=0$, on a:

$$dx=\frac{\partial x}{\partial u}du+\frac{\partial x}{\partial v}dv,$$

$$0=\frac{\partial F}{\partial u}du+\frac{\partial F}{\partial v}dv$$

en posant

$$F(u,v)=F[x_1(u,v),\ x_2(u,v),\ x_3(u,v),\ x_4(u,v)].$$

---

*) On peut rendre le raisonnement plus rigoureux et plus général en le déduisant de la définition analytique des surfaces adjointes. Il s'agit en effet d'établir que l'intégrale J reste finie aux points multiples de la courbe $S=0$, $F=0$. Or, dans l'intégrale double

$$\iint\frac{P(x,y,z)}{S_z'}dx\,dy$$

où x, y, z sont liés par la rélation $S(x,y,z)=0$, remplaçons la variable y par la variable μ, définie par l'équation

$$F(x,y,z)=\mu;$$

l'intégrale double devient

$$\iint\frac{P(x,y,z)\,dx\,d\mu}{S_z'F_y'-S_y'F_z'};$$

elle reste finie, par hypothèse, en tous les points à distance finie de S, ce qui exige que l'intégrale simple

$$\int\frac{P(x,y,z)\,dx}{S_z'F_y'-S_y'F_z'}$$

demeure finie en tous les points de la courbe $S=0$, $F-\mu=0$, μ étant considérée comme une constante. C'est précisément ce qu'il s'agissait d'établir.

On en tire:

(2) $$dx = \frac{du}{\left(\frac{\partial F}{\partial v}\right)} \left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial F}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial F}{\partial u}\right).$$

D'ailleurs les relations

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_4^q F(x, y, z),$$
$$S(x, y, z) \qquad = 0$$

donnent, le long de la courbe considérée:

$$\frac{\partial F}{\partial v} = x_4^q \left[\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v}\right]$$
$$-\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{S_x'}{S_z'}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{S_y'}{S_z'}\frac{\partial y}{\partial v}$$

d'où:

(3) $$\frac{\partial F}{\partial v} = \frac{x_4^q}{S_z'}\left\{\frac{\partial y}{\partial v}(F_x' S_z' - S_x' F_z') + \frac{\partial y}{\partial v}(F_y' S_z' - S_y' F_z')\right\}$$

et on a une expression analogue pour $\frac{\partial F}{\partial u}$. Portant ces expressions dans (2), et remplaçant dx par la valeur ainsi obtenue dans l'intégrale J, il vient

(4) $$J = \int P(x, y, z) \frac{\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u} - \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}}{S_z'} x_4^q \frac{du}{\left(\frac{\partial F}{\partial v}\right)}$$

l'intégrale étant prise maintenant, dans le plan des u, v, le long de la courbe $F(u, v) = 0$. J étant une intégrale de première espèce, il est nécessaire que la fonction:

$$P(x, y, z) \frac{\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u} - \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}}{S_z'} x_4^q$$

soit égale, en chaque point de cette courbe dont le degré est hq, à un polynôme d'ordre $hq - 3$, adjoint à $F(u, v)$.

Supposons que la surface $F(x, y, z)$ appartienne à un faisceau ponctuel ayant pour équation

$$F_1 + \Theta F_2 = 0,$$

Θ étant un paramètre variable, on aura, en chaque point de la courbe $F_1(u, v) + \Theta F_2(u, v) = 0$:

(5) $$P(x, y, z) \frac{\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u} - \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}}{S_z'} x_4^q = R(u, v, \Theta),$$

$R(u, v, \Theta)$ étant un polynome entier, d'ordre $hq - 3$, en u et v, dont les coefficients sont des fonctions *rationnelles* de Θ.

L'équation (5) n'a lieu que pour les valeurs de u, v qui vérifient la relation

$$F_1(u, v) + \Theta F_2(u, v) = 0,$$

mais si on tire Θ de cette relation pour le porter dans (5), on aura une équation vérifiée pour toutes les valeurs de u, v. Il vient ainsi:

$$(6) \qquad P(x, y, z) \frac{\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u} - \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}}{S_z'} x_4^q = R\left(u, v, -\frac{F_1(u, v)}{F_2(u, v)}\right).$$

Le second membre est évidemment, d'après ce qui a été dit sur la fonction R, de la forme:

$$(7) \qquad \frac{T(u, v)}{F'(u, v), F''(u, v) \ldots F^{(\nu)}(u, v)}$$

où $F'(u, v), \ldots F^{(\nu)}(u, v)$ désignent des courbes particulières du faisceau $F_1(u, v) + \Theta F_2(u, v) = 0$, et où T est un polynôme d'ordre égal à $hq - 3 + \nu hq$.

5. Cela posé, rappelons nous que l'intégrale double

$$\iint P(x, y, z) \frac{dx\, dy}{S_z'}$$

reste finie en tous les points à distance finie de la surface $S = 0$. Cette intégrale peut s'écrire, en remplaçant x, y, z par leurs valeurs (1) en fonction de u, v:

$$\iint \frac{P(x, y, z)}{S_z'} \left(\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u} - \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}\right) du\, dv,$$

et elle est prise cette fois dans le plan des u, v. Si on y remplace $P(x, y, z)$ par sa valeur tirée de (6), en tenant compte de l'expression (7), elle devient:

$$(8) \qquad \iint \frac{T(u, v)}{F'(u, v) . F''(u, v) \ldots} \frac{du\, dv}{x_4^q}.$$

L'intégrale ainsi obtenue ne devient infini, par hypothèse, dans le plan des u, v que le long de la courbe $x_4(u, v) = 0$; or les courbes $F'(u, v) = 0$, $F''(u, v) = 0, \ldots$ appartiennent à un faisceau qui ne contient pas, en général, la courbe $x_4(u, v) = 0$*); il en résulte que l'intégrale double (8) ne peut être finie le long des courbes

$$F'(u, v) = 0, \; F''(u, v) = 0, \ldots$$

que si $T(u, v)$ est divisible par le produit $F' F'' \ldots$. Soit $\Phi(u, v)$ le quotient de la division, on aura, d'après les relations (6) et (5) en chaque point du plan des u, v, l'identité:

$$(9) \qquad P(x, y, z) \frac{\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u} - \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}}{S_z'} x_4^q = \Phi(u, v),$$

*) Il suffit qu'on ait choisi le faisceau de surfaces $F_1(x, y, z) + \Theta F_2(x, y, z) = 0$ de manière qu'aucune surface du faisceau ne comprenne le plan de l'infini.

$\Phi(u, v)$ étant *un polynôme entier en* u, v, *d'ordre* $hq - 3$. Cela revient à dire que Θ ne figure pas dans $R(u, v, \Theta)$.

D'ailleurs l'intégrale (4) peut s'écrire, en tenant compte de (9):

$$J = \int \Phi(u, v) \frac{du}{\left(\frac{\partial F}{\partial v}\right)};$$

comme elle est prise le long de la courbe d'ordre hq, $F(u, v) = 0$, et qu'elle est de première espèce, la courbe $\Phi(u, v) = 0$ est une courbe (d'ordre $hq - 3$) *adjointe* à la précédente. Or la courbe $F(u, v) = 0$, c. à. d.

$$F\big(x_1(u, v), \ldots x_4(u, v)\big) = 0$$

n'a pas d'autres points singuliers, lorsque le polynôme F est quelconque, que les points communs aux courbes $x_i(u, v) = 0$ c. à. d. les points que nous avons appelés $(a_1), (a_2), \ldots$. Les courbes $x_1 = 0$ ayant en ces points des singularités $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$, la courbe $F\big(x_1(u, v)\ldots\big) = 0$ aura aux mêmes points les singularités qu'on désigne, dans la notation connue de M. Guccia, par $q\sigma_1, q\sigma_2, \ldots$ puisque $F(x_1, \ldots x_4)$ est d'ordre q. La courbe adjointe $\Phi(u, v) = 0$ aura, en ces points, les singularités adjointes $(q\sigma_1)', (q\sigma_2)', \ldots$*).

Si nous observons maintenant qu'en vertu de l'équation (9) la courbe non fixe, commune à la surface $S(x, y, z) = 0$ et à la surface adjointe $P(x, y, z) = 0$, a pour image sur le plan des u, v la courbe $\Phi(u, v) = 0$, nous pouvons énoncer la proposition suivante, qui résume cette analyse:

6. Théorème I. *Soit une surface*, S, *d'ordre* n, *représentable point par point sur un plan, de telle sorte que ses sections planes aient pour images des courbes d'ordre* h, *ayant en des points* $(a_1), (a_2), \ldots$ *des singularités* $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$. *Les images des courbes mobiles communes à la surface et à ses surfaces adjointes d'ordre* $n + q - 4$ *seront des courbes d'ordre* $hq - 3$, *ayant aux points* $(a_1), (a_2), \ldots$ *les singularités* $(q\sigma_1)', (q\sigma_2)', \ldots$ *adjointes des singularités* $(q\sigma_1), (q\sigma_2), \ldots$.

La réciproque de ce théorème est vraie et nous allons maintenant l'établir.

---

*) Il est aisé de voir que la singularité $(q\sigma_1)'$ est égale à la singularité $[(q-1)\sigma_1 + \sigma_1']$. Rappelons ici que si $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0, \ldots$ sont des courbes générales ayant en un point une singularité, σ, et si $\psi_1 = 0$, $\psi_2 = 0, \ldots$ des courbes ayant au même point la singularité τ, on désigne par $(\sigma + \tau)$ la singularité commune, en ce point, aux courbes

$$\Sigma a_{ij} \varphi_i \psi_j = 0$$

où les a_{ij} sont des constantes quelconques.

7. Considérons à cet effet un polynôme quelconque, $\Phi(u, v)$, d'ordre $hq-3$, tel que la courbe $\Phi(u, v)=0$ ait aux points (a_1), (a_2),... du plan des u, v, les singularités $(q\sigma_1)'$, $(q\sigma_2)'$, ... Soit toujours $F(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$ une surface quelconque d'ordre q; l'intégrale

$$J = \int \Phi(u, v) \frac{du}{\left(\frac{\partial F}{\partial v}\right)}$$

prise le long de la courbe

$$F\big(x_1(u, v), \ldots x_4(u, v)\big) = 0,$$

ou $F(u, v) = 0$, est, d'après les hypothèses, une intégrale de première espèce, pourvu du moins que la surface $F(x, y, z) = 0$ soit quelconque.

On peut transformer l'intégrale J, par les calculs inverses de ceux du n° 4, en la mettant sous la forme:

$$(10) \qquad J = \int \frac{\Phi(u, v)}{x_4^q} \frac{S_z'}{\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u} - \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}} \frac{dx}{F_y' S_z' - S_y' F_z'},$$

l'intégrale étant prise cette fois le long de la courbe de l'espace

$$S(x, y, z) = 0, \quad F(x, y, z) = 0,$$

et u, v étant supposés exprimés en fonction rationnelle de x, y, z à l'aide des relations (1). L'intégrale étant de première espèce, il est tout d'abord nécessaire, d'après la théorie générale des intégrales abéliennes, que la fonction

$$\frac{\Phi(u, v)}{x_4^q} \frac{S_z'}{\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u} - \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}}$$

soit égale, en chaque point de la courbe $S = 0$, $F = 0$, à un polynôme entier en x, y, z, d'ordre $n + q - 4$. En supposant que F appartienne au faisceau

$$F_1(x, y, z) + \Theta F_2(x, y, z) = 0,$$

on aura, en chaque point de la courbe considérée:

$$\frac{\Phi(u, v)}{x_4^q} \frac{S_z'}{\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u} - \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}} = R(x, y, z, \Theta)$$

R étant un polynôme d'ordre $n + q - 4$ en x, y, z et renfermant Θ rationnellement. Si dans R on remplace Θ par sa valeur tirée de l'équation

$$F_1(x, y, z) + \Theta F_2(x, y, z) = 0$$

on obtiendra une équation, *vérifiée en tous les points de la surface* $S = 0$, et de la forme:

$$(11)\qquad \frac{\Phi(u,v)}{x_4^q}\,\frac{S_z'}{\dfrac{\partial y}{\partial v}\dfrac{\partial x}{\partial u}-\dfrac{\partial y}{\partial u}\dfrac{\partial x}{\partial v}}=\frac{T(x,y,z)}{F'(x,y,z).F''(x,y,z)\ldots F^{(\nu)}(x,y,z)}$$

T étant un polynôme entier en x, y, z d'ordre $n+q-4+\nu q$, et $F'=0$, $F''=0$, ... $F^{(\nu)}=0$ étant des surfaces particulières du faisceau $F_1+\Theta F_2=0$. Or le premier membre de la relation précédente devient infini, sur la surface $S=0$, le long de certaines courbes bien déterminées; le second membre devient infini le long des courbes intersection de $S=0$ avec $F'=0$, $F''=0$, ...: on peut toujours choisir le faisceau $F_1+\Theta F_2=0$ de manière qu'aucune de ces dernières courbes ne coincide avec une des premières, et par suite il est nécessaire que la surface $T=0$ passe par les intersections de $S=0$ avec $F'=0$, $F''=0$, ... Ces dernières surfaces si le faisceau a été convenablement choisi, n'ont aucune ligne multiple et ne passent par aucune ligne multiple de S, on a donc, en vertu d'un théorème bien connu, l'identité:

$$T(x,y,z)=P(x,y,z)F'.F''\ldots F^{(\nu)}+B(x,y,z).S$$

$B(x,y,z)$ étant un polynôme entier, et $P(x,y,z)$ un autre polynôme d'ordre $n+q-4$. Portant cette valeur de $T(x,y,z)$ dans (11), il vient, *en tout point de la surface* $S=0$:

$$(12)\qquad \frac{\Phi(u,v)}{x_4^q}\,\frac{S_z'}{\dfrac{\partial y}{\partial v}\dfrac{\partial x}{\partial u}-\dfrac{\partial y}{\partial u}\dfrac{\partial x}{\partial v}}=P(x,y,z).$$

8. Nous allons déduire de là que la surface $P(x,y,z)=0$ est adjointe à S; étudions à cet effet l'intégrale double

$$(\mathrm{I})\qquad \iint P(x,y,z)\,\frac{dx\,dy}{S_z'};$$

elle peut s'écrire, en vertu de (12):

$$\iint \frac{\Phi(u,v)}{x_4^q(u,v)}\,du\,dv,$$

la nouvelle intégrale étant prise cette fois dans le plan des u, v.

Il est évident que cette intégrale double ne peut devenir infinie qu'aux points qui annulent $x_4(u,v)$; or ces points correspondent aux points à l'infini sur la surface $S=0$, l'intégrale (I) reste donc finie en tous les points à distance finie de la surface, ce qui exprime que la surface $P=0$ est adjointe à S.

Ce raisonnement comporte cependant un cas d'exception: les points du plan des u, v situés sur la courbe $x_4(u,v)=0$ correspondent à des points à l'infini sur S, à l'exception des points communs aux courbes

$x_4(u, v) = 0$, c. à d. des points (a_1), (a_2), ... où ces courbes ont des singularités communes $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$; à un de ces points correspond, sur S, soit une courbe, singulière ou non, soit un point. Il s'agit de montrer que l'intégrale double

$$\iint \frac{\Phi(u, v)}{x_4^q}\, du\, dv$$

reste finie aux points (a_1), (a_2), ... A cet effet, désignons par $f(u, v) = 0$ l'équation d'une courbe d'ordre hq ayant au point (a_1) une singularité d'ordre égal ou inférieur à $(q\sigma_1)$, de telle sorte que la courbe $\Phi(u, v) = 0$ ait, en ce point, le caractère d'une courbe adjointe à toutes les courbes du faisceau

$$f(u, v) + \mu\, x_4^q(u, v) = 0.$$

Il est clair qu'on pourra toujours trouver une courbe $f(u, v)$ telle que cette condition soit remplie, puisque $\Phi(u, v) = 0$ possède en (a_1) la singularité $(q\sigma_1)'$. Remplaçons maintenant, dans l'intégrale double, la variable v par la variable μ, définie par l'équation

$$f(u, v) + \mu\, x_4^q(u, v) = 0,$$

ou

$$F(u, v) = 0,$$

l'intégrale double devient

$$-\iint \frac{\Phi(u, v)}{\left(\frac{\partial F}{\partial v}\right)}\, du\, d\mu;$$

or l'intégrale simple

$$\int \frac{\Phi(u, v)\, du}{\left(\frac{\partial F}{\partial v}\right)}$$

prise le long de la courbe $F(u, v) = 0$ reste finie au point (a_1), puisque $\Phi(u, v) = 0$ est, en ce point, adjointe à la courbe $F(u, v) = 0$, quelle que soit la valeur de μ. Cette intégrale, prise entre $u_0 - \varepsilon$ et $u_0 + \varepsilon$, où ε désigne une quantité très petite, et u_0 la valeur de u qui correspond au point a_1, est donc une fonction de μ ne devenant infinie pour aucune valeur de μ; par suite son intégrale par rapport à μ, *entre des limites finies*, est elle-même finie, ce qui démontre que l'intégrale double reste finie.

Nous devons supposer que μ ne devient pas infini, sinon une des courbes limitant le champ de l'intégrale double serait la courbe $x_4(u, v) = 0$, c. à d. que le champ correspondant sur S serait infini, hypothèse que nous devons écarter.

Donc enfin l'intégrale (I) reste finie en tous les points de S à distance finie, ce qui prouve que la surface $P(x, y, z)$ est adjointe

à S, et l'équation (12) montre que la courbe $\Phi(u, v) = 0$ est l'image de l'intersection de S avec une surface adjointe d'ordre $n + q - 4$. Ainsi:

9. Théorème II. *Soit une surface d'ordre n, représentable point par point sur le plan, de telle sorte que ses sections planes aient pour images des courbes d'ordre h, ayant en des points (a_1), $(a_2)\ldots$, des singularités $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$: toute courbe d'ordre $hq-3$ ayant en (a_1), $(a_2), \ldots$ les singularités $(q\sigma_1)'$, $(q\sigma_2)', \ldots$ est l'image de l'intersection de la surface avec une surface adjointe d'ordre $n + q - 4$*).*

10. Le nombre des surfaces adjointes, d'ordre $n + q - 4$, linéairement distinctes, se déduit aisément des théorèmes I et II. D'après ces propositions, il est égal au nombre des fonctions $\Phi(u, v)$ linéairement distinctes, c. à d. des courbes d'ordre $hq - 3$ douées aux points (a_1), (a_2), ... des singularités $(q\sigma_1)'$, $(q\sigma_2)'$, ... Toutefois, si q atteint ou dépasse 4, on obtiendra, d'autres surfaces adjointes par l'équation

$$SQ = 0$$

où q est un polynôme quelconque d'ordre $q - 4$ renfermant

$$\frac{1}{6}(q-3)(q-2)(q-1)$$

coefficients arbitraires, et ce nombre devra être ajouté à celui des fonctions $\Phi(u, v)$ distinctes.

Les courbes $\Phi(u, v) = 0$, *d'ordre* $hq - 3$, ayant en (a_1), $(a_2), \ldots$ les singularités $(q\sigma_1)'$, $(q\sigma_2)'$, ... sont, par définition, adjointes aux courbes *d'ordre* hq, qui ont aux mêmes points les singularités $(q\sigma_1)$, $(q\sigma_2), \ldots$: parmi ces courbes d'ordre hq figurent les images des intersections de S avec les surfaces générales d'ordre q. En d'autres termes, le nombre des courbes $\Phi(u, v) = 0$, linéairement distinctes est égal au genre de la section de la surface S par une surface d'ordre q.

Or si on désigne par p le genre des sections planes d'une surface d'ordre n, le genre des sections par les surfaces d'ordre q est égal à

$$\frac{1}{2}q(q-1)n + q(p-1) + 1.$$

Donc:

Soit une surface d'ordre n, représentable point par point sur le plan, et dont les sections planes sont de genre p: le nombre de ses

*) Les théorèmes I et II ont été énoncés, sous une forme moins générale, par Caporali (Collectanea Mathem. in memoriam Chelini, p. 167); mais la démonstration, qui ne repose que sur une simple énumération de constantes, semble peu rigoureuse. De plus, l'auteur ne considère que des surfaces adjointes suivant les lignes multiples (qu'il suppose seulement doubles), de sorte que ses résultats sont en défaut dès qu'il existe, par exemple, des points singuliers isolés d'ordre supérieur à deux.

surfaces adjointes d'ordre $n+q-4$, linéairement distinctes, est égal à

$$\frac{1}{2}q(q-1)n+q(p-1)+1+\frac{1}{6}(q-1)(q-2)(q-3).$$

11. Les résultats et les démonstrations qui précèdent conduisent à des remarques importantes, relatives à la *théorie des points multiples* sur les surfaces unicursales.

Dans les raisonnements du n° 4, quand nous avons cherché l'image de l'intersection avec S d'une surface adjointe, $P(x, y, z)=0$, d'ordre $n+q-4$, nous n'avons nullement supposé que cette surface fût adjointe à S en ses points singuliers: nous avons seulement admis qu'elle était adjointe le long des lignes multiples, c. à d. qu'elle avait pour ligne multiple d'ordre $l-1$ toute ligne multiple ordinaire d'ordre l de S, mais sans faire aucune hypothèse sur la manière dont elle se comporte aux points singuliers, isolés ou remarquables. C'est seulement au n° 5 que nous avons admis que l'intégrale

$$\iint P(x, y, z)\frac{dx\,dy}{S_z'}$$

restait finie en *tous* les points à distance finie de S, c. à d. que la surface $P=0$ est adjointe, non seulement le long des lignes multiples, mais en tous les points singuliers. Affranchissons nous maintenant de cette dernière restriction, nous arrivons, par les raisonnements des n°s 4 et 5, à la relation, déduite de (6) et de (7):

$$P(x, y, z)\frac{\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u}-\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}}{S_y'}x_4^q(u, v)=\frac{T(u, v)}{F'(u, v)\,F''(u, v)\dots F^{(\nu)}(u, v)}$$

où $T(u, v)$ désigne un polynôme d'ordre $hq-3+q\nu$ et

$$F'(u, v),\ F''(u, v), \dots F^{(\nu)}(u, v)$$

des polynômes d'ordre hq, faisant partie du faisceau $F_1+\Theta F_2$.

D'après cette relation, on a:

$$\iint P(x, y, z)\frac{dx\,dy}{S_z'}=\iint\frac{T(u, v)}{F'(u, v).F''(u, v)\dots}\frac{du\,dv}{x_4^q(u, v)}$$

comme nous l'avons d'ailleurs déjà trouvé au n° 5.

L'intégrale double du premier membre reste finie, sur la surface S, en tous les points à distance finie, sauf en certains points singuliers: cela résulte de l'hypothèse faite sur la surface $P(x, y, z)=0$. L'intégrale double du second membre ne peut donc devenir infinie, dans le plan des u, v, que le long de la ligne $x_4(u, v)=0$ et aux points de ce plan qui correspondent aux points singuliers ci-dessus.

Or, au point de vue analytique, les points multiples de S, sont de deux espèces: aux *points de première espèce* correspondent des systèmes de valeurs des paramètres u, v en nombre infini, aux *points de seconde espèce* correspondent un ou plusieurs systèmes de valeurs de u, v, mais en nombre fini.

Pour que le premier cas se présente, — le point singulier étant le point $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, ce qu'on peut toujours admettre — il faut que les trois équations

$$x_1(u, v) = 0; \quad x_2(u, v) = 0; \quad x_3(u, v) = 0$$

aient une infinité de solutions communes en u et v, et par suite que les polynômes x_1, x_2, x_3 soient divisibles par un même polynôme, $g(u, v)$. Inversement, si cette condition est réalisée $\big($le polynôme $x_4(u, v)$ n'étant pas, bien entendu, divisible par $g(u, v)\big)$, on vérifie sans difficulté que le point $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ est généralement un point multiple*) et à ce point correspondent les couples d'arguments annulant $g(u, v)$.

Supposons d'abord que la surface S n'ait pas de points multiples de cette espèce: l'intégrale double

$$\iint \frac{T(u, v)}{F'(u, v)\, F''(u, v) \ldots} \, \frac{du\, dv}{x_4^q(u, v)}$$

ne devient infinie, d'après ce qui précède, que le long de la ligne $x_4(u, v) = 0$, et en des points particuliers du plan des u, v *en nombre limité*. Comme d'ailleurs aucune des courbes

$$F'(u, v) = 0, \; F''(u, v) = 0, \ldots$$

ne contient $x_4(u, v)$ en facteur, (n° 5), on en conclut que le quotient

$$\frac{T(u, v)}{F'(u, v)\, F''(u, v) \ldots}$$

ne devenant infini qu'en un nombre limité de points du plan des u, v (à distance finie), se réduit par suite à un polynôme entier en u, v, $\Phi(u, v)$, d'ordre $hq - 3$. On peut dès lors appliquer sans modification les raisonnements et conclusions du n° 5.

On arrive au même résultat si, la surface S possédant des points singuliers de la première espèce, la surface $P(x, y, z) = 0$ a le caractère d'une surface adjointe en ces points**), et on établit ainsi

*) Le point peut être un point double et même un point simple, mais ces exceptions n'infirment en rien la suite de nos raisonnements. Nous reviendrons d'ailleurs, d'une manière plus explicite, sur les points de cette nature, au n° 14.

**) Nous ne tenons compte ici que des points singuliers (de première espèce) par lesquels doivent passer les surfaces adjointes; on n'a donc pas à s'occuper des points doubles ordinaires, et a fortiori des points simples, même s'ils ont le caractère analytique des points de première espèce.

que: »toute surface d'ordre $n+q-4$, adjointe à S le long des lignes multiples et aux points singuliers de première espèce, coupe S suivant une courbe dont l'image plane est une courbe d'ordre $hq-3$, ayant en (a_1), (a_2), ... les singularités $(q\sigma_1)'$, $(q\sigma_2)'$, ...« Le théorème II montre qu'inversement cette courbe plane est l'image d'une courbe de l'espace située à l'intersection de S et d'une surface d'ordre $n+q-4$, adjointe le long des lignes multiples et un *tous* les points singuliers. Il en résulte que *toute* surface adjointe à S le long des lignes multiples et aux points singuliers de première espèce est aussi adjointe aux points singuliers de seconde espèce.

On déduit aisément de là deux conséquences intéressantes.

1° *Les points multiples de seconde espèce, c. à d. ceux auxquels correspond un nombre limité de systèmes des paramètres u, v, sont situés sur les lignes multiples de S, et toute surface adjointe le long de ces lignes est par là-même adjointe en chacun de ces points.*

2° *Les points multiples isolés sont toujours de première espèce,**) *c. à d. ont pour image sur le plan tous les points d'une courbe. Il en est de même de tout point singulier situé sur des lignes multiples, lorsque toute surface adjointe suivant ces lignes n'est pas, par là-même, adjointe en ce point.*

Les réciproques de ces deux propositions ne sont pas vraies, c. à d. qu'un point multiple situé sur des lignes singulières, et tel que toute surface adjointe le long de ces lignes soit aussi adjointe en ce point, n'est pas nécessairement de seconde espèce, et peut avoir pour image une courbe. Il serait aisé d'en donner des exemples.

12. Pour abrèger le langage, appelons *points singuliers remarquables* tous les points multiples par lesquels doivent passer les surfaces adjointes et tels, de plus, que les surfaces adjointes le long des lignes multiples ne soient pas nécessairement adjointes en ces points.

D'après le n° 10, les surfaces Σ, d'ordre $n+q-4$. adjointes à S, decoupent sur S un système linéaire de courbes $\varpi-1$ fois infini, ϖ désignant le genre de la courbe C_q, intersection de S avec une surface générale d'ordre q. De plus, il résulte de ce qui a été dit au n° 4 que les surfaces Σ sont adjointes à la courbe C_q, c. à d. coupent chacune cette courbe en $2(\varpi-1)$ points, dont l'ensemble constitue un groupe de la série spéciale bien connue:**) cette série, comme on sait, est $\varpi-1$ fois infinie.

*) Il s'agit toujours ici des points singuliers par lesquels devient passer les surfaces adjointes, c. à d. en particulier, de tous les points multiples dont l'ordre dépasse deux. La théorème serait en défaut pour les points doubles ordinaires, comme on le voit aisément par des exemples.

**) Sur une courbe gauche, de genre ϖ, intersection complète de deux surfaces $S=0$, $F=0$, d'ordres n et q, les groupes de la série spéciale, $\varpi-1$ fois

Les surfaces Σ, en nombre $\varpi - 1$ fois infini, découpent-elles sur C_q une série de groupes $\varpi - 1$ fois infinie? pour qu'il en fût autrement, il faudrait qu'une (au moins) des surfaces Σ, ne comprenant pas la surface S, passât par C_q; on aurait alors identiquement

$$\Sigma = AF + BS,$$

$\Sigma = 0$ étant l'équation de cette surface Σ, $F = 0$ celle de la surface d'ordre q passant par C_q, A et B des polynômes en x, y, z d'ordres $n - 4$ et $q - 4$. Cette identité montre que la surface $\Sigma - BS = 0$, qui est également une surface adjointe à S, d'ordre $n + q - 4$, se décompose en une surface $F = 0$, d'ordre q, qu'on a pu choisir quelconque, et en une surface $A = 0$, d'ordre $n - 4$. La surface $A = 0$ serait donc une surface adjointe à S, ce qui est absurde, une surface d'ordre n représentable point par point sur le plan n'ayant pas d'adjointe d'ordre $n - 4$.*) Il en résulte que les surfaces Σ découpent bien sur C_q une série $\varpi - 1$ fois infinie, et par suite, puisque la série spéciale est $\varpi - 1$ fois infinie, les surfaces Σ découpent sur C_q l'ensemble des groupes de cette série.

Céla posé, désignons par Σ' l'ensemble des surfaces d'ordre $n + q - 4$ adjointes à S *le long des lignes multiples seulement.* Si la surface S admet des points singuliers remarquables, il est clair que le nombre de ces surfaces linéairement distinctes sera supérieur au nombre analogue des surfaces Σ, ou encore que les surfaces Σ' découperont sur S une série de courbes $\varpi + \varrho - 1$ fois infinie, ϱ étant positif.**) Or, d'après le nº 4, les surfaces Σ' déterminent aussi sur C_q des groupes de la série spéciale; cette série étant $\varpi - 1$ fois infinie seulement, il faut que, parmi les surfaces Σ', une au moins passe par C_q^0.

---

infinie, sont decoupés par les surfaces d'ordre $n + q - 4$, $P(x, y, z) = 0$, adjointes à la courbe, c. à d. telles que l'intégrale

$$\int P(x, y, z) \frac{dx}{S_y' F_z' - S_z' F_y'}$$

reste finie tout le long de la courbe.

*) Cette propriété, bien connue, résulte de ce qu'il n'existe, sur S, aucune intégrale double de la forme

$$\int\int P(x, y, z) \frac{dx\, dy}{S_z'}$$

restant finie en *tous* les points de la surface, P étant un polynôme entier. Si $P = 0$ était une surface adjointe d'ordre $n - 4$, l'intégrale précédente resterait partout finie.

**) Si, pour une valeur de q, les surfaces Σ' sont toutes adjointes aux points singuliers remarquables, il est certain que ce fait ne se reproduit pas dès que q est assez grand.

On aura donc identiquement, comme plus haut:

$$\Sigma' = GF + HS$$

$\Sigma' = 0$ étant l'équation de la surface considérée, et G, H des polynômes, en x, y, z, d'ordres $n - 4$ et $q - 4$. La surface

$$\Sigma' - HS = 0$$

est, comme Σ', adjointe à S le long des lignes multiples; en vertu de l'identité précédente, elle se décompose en deux surfaces, dont l'une $F = 0$ est quelconque et dont l'autre, d'ordre $n - 4$, $G = 0$, sera par suite adjointe à S le long des lignes multiples.

De cette discussion résulte la proposition suivante:

Toute surface d'ordre n, représentable point par point sur le plan et ayant un ou plusieurs points singuliers remarquables, admet au moins une surface d'ordre $n - 4$, adjointe tout le long de ses lignes multiples. La réciproque de ce théorème est évidente.

Il résulte de là que les sections planes d'une surface unicursale, douée de points singuliers remarquables, sont des courbes d'ordre n qui admettent une courbe adjointe d'ordre $n - 4$: ce sont donc des courbes *spéciales*, selon la terminologie connue, et on a par suite l'inégalité

$$n \leqq 2(p-1) \quad \text{ou} \quad p \geqq \frac{n}{2} + 1$$

p étant le genre de ces sections planes.*)

13. Dans les raisonnements du n⁰ précédent, on aurait pu supposer que Σ' désignait l'ensemble des surfaces d'ordre $n + q - 4$ adjointes à S le long des lignes multiples et en un ou plusieurs points singuliers remarquables, $O_1, O_2, \dots O_r$. On en aurait conclu comme plus haut qu'une surface $\Sigma' - HS = 0$ se décomposait en une surface quelconque, $F = 0$, d'ordre q, et en une surface d'ordre $n - 4$: cette dernière est adjointe à S, non seulement le long des lignes multiples, mais encore aux points $O_1, O_2, \dots O_r$, puisque la surface $\Sigma' - HS = 0$ jouit évidemment de cette propriété.

Il en résulte que S admet au moins une surface d'ordre $n - 4$ adjointe le long des lignes multiples et en r points singuliers remarquables, arbitrairement choisis. De plus les surfaces d'ordre $n - 4$ adjointes le long des lignes multiples et aux points $O_1, O_2, \dots O_r$ ne

*) Il résulte de là que les surfaces réglées unicursales n'ont pas de point singulier remarquable; il en est de même des surfaces représentables point par point sur le plan et dont les sections sont de genre un ou de genre deux. Pour $p = 3$, on a $n \leqq 4$, c. à d. nécessairement $n = 4$; les surfaces correspondantes sont les surfaces du quatrième ordre sans lignes multiples ayant un point triple ou un point double à plans tangents confondus de l'éspèce signalée par M. Nöther: ces points sont des points singuliers remarquables.

sont pas toutes adjointes en un $(r+1)^{\text{ème}}$ point remarquable, O_{r+1}: sinon la surface d'ordre $n-4$, adjointe le long des lignes multiples et aux points remarquables, autres que O_{r+1} — et il en existe une au moins, d'après ce qui précède — serait aussi adjointe au point O_{r+1}, c. à d. serait adjointe à S, dans le sens général du mot, ce qui est impossible. Donc:

Etant donnée une surface S, d'ordre n, représentable point par point sur le plan et possédant t points singuliers remarquables, il existe au moins une surface d'ordre $n-4$ jouissant des propriétés suivantes: 1⁰ *elle est adjointe à S le long des lignes multiples et en r des points singuliers remarquables, arbitrairement choisis, $(r<t)$;* 2⁰ *elle n'est adjointe en aucun des $(t-r)$ autres points singuliers remarquables.*

Comme conséquence immédiate, on voit que:

La surface S admet au moins t surfaces d'ordre $n-4$, linéairement distinctes, adjointes le long de ses lignes multiples.

14. Il nous reste, pour terminer ces remarques sur les points singuliers, à résoudre la question suivante:

» *Une surface représentable point par point sur un plan étant donnée par sa représentation même, comment reconnaître si elle a des points singuliers remarquables.* «

D'après le n⁰ 11, tout point singulier remarquable est de première espèce, c. à d. a pour image sur le plan une courbe; il s'agit donc, lorsqu'à une courbe du plan ne correspond qu'un point de la surface S, de reconnaître si ce point est ou non *remarquable*, c. à d. si les surfaces adjointes à S le long des lignes multiples ne sont pas ou sont, par là même, adjointes en ce point.

Supposons, comme au n⁰ 11, que le point soit le point

$$x_1 = x_2 = x_3 = 0,$$

le surface S sera représentée, sur le plan des u, v, par des équations de la forme:

$$(13) \qquad \begin{aligned} x_1 &= g(u,v)\,\theta_1(u,v), \\ x_2 &= g(u,v)\,\theta_2(u,v), \\ x_3 &= g(u,v)\,\theta_3(u,v), \\ x_4 &= \qquad\quad \Theta_4(u,v) \end{aligned}$$

$g(u,v)$ étant un polynôme, qui peut d'ailleurs être décomposable, de degré k; les $\theta(u,v)$ sont des polynômes d'ordre $h-k$ n'ayant aucun facteur commun; $\Theta_4(u,v)$ est un polynôme d'ordre h.

Le point $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, que nous appellerons O, correspond à la courbe $g(u,v)=0$.

D'après les résultats du n⁰ 13, si O est un point singulier remarquable, on pourra trouver au moins une surface d'ordre $n-4$, $Q(x,y,z)=0$, adjointe à S le long des lignes multiples et en tous

les points singuliers remarquables autres que O; et réciproquement, si une telle surface d'ordre $n-4$ existe, O sera un point remarquable.

Or on peut toujours trouver un nombre q assez grand pour que la surface d'ordre $n+q-4$ formée par le surface $Q=0$ et par q plans quelconques *passant par* O, soit adjointe à S le long des lignes multiples et en tous les points singuliers, O compris: il est facile de voir que $n-1$ est, dans tous les cas, une limite supérieure de q, n désignant toujours l'ordre de la surface S.

En d'autres termes, si l'on se reporte aux théorèmes I et II, on voit que la condition nécessaire et suffisante pour que O soit un point singulier remarquable est la suivante:

»Il faut que, parmi les courbes d'ordre $h(n-1)-3$, du plan des u, v, douées aux points (a_1), (a_2), ... des singularités $[(n-1)\sigma_1]'$, $[(n-1)\sigma_2]'$, ... il en existe une au moins comprenant $n-1$ courbes arbitraires du réseau

$$\lambda_1\theta_1(u,v)+\lambda_2\theta_2(u,v)+\lambda_3\theta_3(u,v)=0.«$$

On en conclut également sans difficulté cette proposition:

»Soit α le nombre minimum des plans arbitraires passant par O, de telle sorte que la surface formée par ces α plans et par une surface quelconque adjointe à S le long des lignes multiples soit aussi adjointe au point O: l'image de la courbe commune à S et à une surface d'ordre $n-4$ adjointe à S le long des lignes multiples et en tous les points singuliers, O excepté, est une courbe d'ordre $\alpha k-3$, telle qu'en lui adjoignant α courbes quelconques du réseau $\lambda_1\theta_1+\lambda_2\theta_2+\lambda_3\theta_3=0$, la courbe (d'ordre $\alpha h-3$) ainsi composée, ait aux points (a_1), (a_2), ... les singularités $(\alpha\sigma_1)'$, $(\alpha\sigma_2)'$, ...«

15. Plus généralement, la même méthode permet d'énoncer le théorème suivant:

Désignons par O_i un point singulier remarquable, correspondant à la courbe, d'ordre k_i, $g_i(u,v)=0$: soient $s_1^{(i)}$, $s_2^{(i)}$, ... les singularités que présente cette courbe aux points (a_1), (a_2), ... communs à toutes les courbes images des sections planes de S; ces courbes (d'ordre h) ont en (a_1), (a_2), ... des singularités que nous appelons, comme d'habitude σ_1, σ_2, ... Enfin désignons par α_i le nombre minimum des plans arbitraires passant par O_i et tels que la surface formée par ces plans et par une surface quelconque, adjointe à S le long des lignes multiples, soit adjointe à S au point O_i.

L'image de la courbe commune à S et à une surface quelconque d'ordre $n+q-4$ adjointe à S le long des lignes multiples et en r des t points singuliers remarquables, O_1, O_2, ... O_r, est une courbe C d'ordre

$$hq-3+(\alpha_{r+1}k_{r+1}+\alpha_{r+2}k_{r+2}+\cdots+\alpha_t k_t),$$

ayant aux points (a_1), (a_2), ... les singularités

$$[(q\sigma_1)' + \alpha_{r+1} s_1^{(r+1)} + \cdots + \alpha_t s_1^{(t)}];$$
$$[(q\sigma_2)' + \alpha_{r+1} s_2^{(r+1)} + \cdots + \alpha_t s_2^{(t)}];$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot;$$

et réciproquement.

Il faut toutefois que cette courbe C ne comprenne aucune des courbes images des points singuliers remarquables.

Nous laisserons au lecteur le soin de faire des applications de ces principes très-généraux; il est aisé d'en trouver d'intéressantes.

Paris, 28. Juillet 1894.

Ueber die Umkehrung der Systeme von Functionen reeller Variabeln.

Von

Adolf Kneser in Dorpat.

Lipschitz hat zuerst die Frage untersucht, wann ein System von beliebig vielen Functionen reeller Variabeln eindeutig umgekehrt werden kann*); der Beweis des von ihm aufgestellten Satzes gründet sich wesentlich auf die Umwandlung doppelter Integrale in Contourintegrale, überhaupt mehrfacher Integrale in andere, die über ein Gebiet von weniger Dimensionen zu erstrecken sind. Bei der elementaren Natur der Frage erscheint es wünschenswerth, dieselbe mit geringeren Beweismitteln zu erledigen. Dazu führt ein bekannter Eliminationsprocess, auf welchen Jacobi seine Theorie der Functionaldeterminanten gegründet hat; untersucht man die Ausführbarkeit der dabei vorkommenden Operationen für reelle Functionen reeller Argumente, so ergiebt sich ein System von Bedingungen dafür, dass in der Umgebung eines Werthsystems der unabhängigen Variabeln überhaupt irgend ein Gebiet abgegrenzt werden kann, innerhalb dessen ein gegebenes Functionensystem eindeutig umgekehrt werden kann. Diese Bedingungen sind einfacher als die Voraussetzungen des von Lipschitz aufgestellten Satzes; letzterer wird aus unsern Betrachtungen als Corollar abgeleitet, die ihm zu Grunde liegende Anschauungsweise geometrisch erörtert, und eine bei der ursprünglichen Deduction von Lipschitz auftretende Schwierigkeit erledigt.

§ 1.

Vorbemerkungen über implicite Functionen.

Auf die Gefahr hin, zum Theil bekanntes zu wiederholen, beginnen wir mit naheliegenden Betrachtungen über implicite Functionen in der für uns nothwendigen Allgemeinheit.

*) Lipschitz, Beiträge zu der Theorie der Umkehrung eines Functionensystems, Nachrichten von der Ges. d. Wiss. zu Göttingen, Jahrgang 1870, S. 439. Lipschitz, Lehrbuch der Analysis (1880) Bd. II, § 102.

Wir sagen, eine Function von beliebig vielen reellen Argumenten $\varphi(x_1, x_2, \ldots x_m)$ besitzt ein Differential nach den Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_m$ für ein bestimmtes Werthsystem derselben, wenn für beliebige Grössen $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots \Delta x_m$, deren absolute Beträge gewisse feste Grenzen nicht übersteigen, eine Gleichung besteht:

$$\varphi(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, \ldots x_m + \Delta x_m)$$
$$= (\varphi_1 + \delta_1)\Delta x_1 + (\varphi_2 + \delta_2)\Delta x_2 + \cdots + (\varphi_m + \delta_m)\Delta x_m,$$

in welcher die Grössen $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_m$ von $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots$ unabhängig sind, und die Grössen $\delta_1, \delta_2, \ldots \delta_m$ gegen die Grenze Null convergiren, wenn die absoluten Beträge aller Incremente Δx in beliebiger Weise unbegrenzt abnehmen. Sind diese Voraussetzungen erfüllt, so ist die Function φ stetig und besitzt nach jeder der Variabeln x_ν einen partiellen Differentialquotienten

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_\nu} = \varphi_\nu;$$

nach einer wichtigen Bemerkung von Thomae*) folgt aber keineswegs die Existenz eines Differentials im definirten Sinne aus der Existenz der partiellen Differentialquotienten erster Ordnung. Man sieht ferner leicht, dass, wenn für $x_1, x_2, \ldots x_n$ differenzirbare Functionen einer Variabeln t gesetzt werden, auf den Ausdruck φ die gewöhnliche Regel für die Differentiation zusammengesetzter Functionen angewandt werden kann:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dt} + \cdots + \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}\frac{dx_n}{dt}.$$

Die Function $f(x_1, x_2, \ldots x_n, y)$ besitze nun ein Differential nach ihren $n+1$ Argumenten für alle reellen Werthsysteme derselben, welche durch die Ungleichungen

(1) $$|x_\nu - \xi_\nu| < \gamma_\nu, \quad |y - \eta| < \gamma$$

definirt sind, indem man unter ξ_ν, η beliebig reelle, unter γ_ν, γ positive Constanten versteht, es sei ferner

$$f(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n, \eta) = 0,$$

und für die durch die Ungleichungen (1) definirten Werthe von $x_1, \ldots x_n, y$

(2) $$\frac{\partial f}{\partial y} > 0.$$

Es seien ferner die Grössen y_1 und y_2 so fixirt, dass

$$\eta - y_1 = \varepsilon = y_2 - \eta, \quad 0 < \varepsilon < \gamma;$$

*) Thomae, Complexe Functionen, S. 17.

dann hat man auch

$$f(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n, y_1) < f(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n, \eta) < f(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n, y_2),$$

oder

$$f(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n, y_1) < 0, \qquad f(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n, y_2) > 0.$$

Da nun die Function f für alle den Relationen (1) genügenden Werthsysteme stetig ist, so kann man derartige Grössen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_n$ wählen dass man hat

$$0 < \varepsilon_1 \leqq \gamma_1, \; 0 < \varepsilon_2 \leqq \gamma_2, \ldots 0 < \varepsilon_n \leqq \gamma_n,$$

und dass für beliebige positive oder negative echte Brüche Θ die Ungleichungen bestehen

$$f(\xi_1 + \Theta_1 \varepsilon_1, \xi_2 + \Theta_2 \varepsilon_2, \ldots \xi_n + \Theta_n \varepsilon_n, y_1) < 0,$$
$$f(\xi_1 + \Theta_1 \varepsilon_1, \xi_2 + \Theta_2 \varepsilon_2, \ldots \xi_n + \Theta_n \varepsilon_n, y_2) > 0.$$

Dann gehört jedes Werthsystem $(\xi_1 + \Theta_1 \varepsilon_1, \xi_2 + \Theta_2 \varepsilon_2, \ldots, \xi_n + \Theta_n \varepsilon_n, y)$, in welchem die Grösse y zwischen y_1 und y_2 liegt, zu den durch die Relationen (1) definirten, für welche die Function f stetig, und die Ungleichung (2) erfüllt ist; daher giebt es, wenn die Brüche Θ fixirt sind, einen und nur einen Werth y, für welchen die Gleichung

$$f(\xi_1 + \Theta_1 \varepsilon_1, \xi_2 + \Theta_2 \varepsilon_2, \ldots \xi_n + \Theta_n \varepsilon_n, y) = 0$$

besteht. Für die Gültigkeit dieses Schlusses ist nicht erforderlich, dass die Grösse $\frac{\partial f}{\partial y}$ eine stetige Function sei; denn eine Function einer Variabeln wächst in einem Intervall sicher, sobald sie in jedem Punkte desselben einen positiven eindeutig bestimmten Differentialquotienten besitzt, gleichviel wie dieser sonst beschaffen sein möge. Hiermit ist gezeigt, dass für jedes Werthsystem $(x_1, x_2, \ldots x_n)$, für welches

(3) $$|x_1 - \xi_1| < \varepsilon_1, \; |x_2 - \xi_2| < \varepsilon_2, \ldots |x_n - \xi_n| < \varepsilon_n.$$

ein und nur ein Werth y existirt, welcher der Gleichung

(4) $$f(x_1, x_2, \ldots x_n, y) = 0$$

und der Ungleichung

(5) $$0 \leqq |y - \eta| < \varepsilon$$

genügt.

Das durch die Ungleichungen (3) für die Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_n$ definirte Gebiet heisse $\mathfrak{G}$; in ihm ist die Function y entsprechend den Relationen (4) und (5) eindeutig definirt. Diese Function ist nun auch im Gebiet $\mathfrak{G}$ stetig. Um dies zu zeigen, setze man

(6) $$0 < \zeta < \varepsilon;$$

da nun die Grösse ε zwischen 0 und γ willkürlich genommen werden konnte, darf man für ζ dieselbe Betrachtung wie für ε durchführen;

man kann positive Werthe $\zeta_1, \zeta_2, \ldots \zeta_n$ derartig bestimmen, dass für alle den Ungleichungen

(7) $$|x_1 - \xi_1| < \zeta_1, \; |x_2 - \xi_2| < \zeta_2, \ldots |x_n - \xi_n| < \zeta_n$$

genügenden Werthsysteme $(x_1, x_2, \ldots x_n)$ welche das Gebiet $\mathfrak{G}_0$ bilden mögen, die der Gleichung (4) genügende Grösse y zwischen den Grenzen $\eta + \zeta$ und $\eta - \zeta$ eindeutig bestimmt ist.

Dies Resultat bleibt bestehen, wenn man jede der Grössen $\zeta_1, \zeta_2, \ldots \zeta_n$ durch eine absolut kleinere ersetzt, da dann das Gebiet $\mathfrak{G}_0$ durch ein in ihm enthaltenes ersetzt wird; man darf also z. B. von vorneherein annehmen, dass

$$\zeta_1 < \varepsilon_1, \; \zeta_2 < \varepsilon_2, \ldots \zeta_n < \varepsilon_n,$$

sei, mithin das Gebiet $\mathfrak{G}_0$ einen Theil von $\mathfrak{G}$ bilde. Alsdann ist die Function y durch die Gleichung (4) im Gebiet $\mathfrak{G}_0$ eindeutig zwischen $\eta + \zeta$ und $\eta - \zeta$, andrerseits in $\mathfrak{G}$, also auch in $\mathfrak{G}_0$ eindeutig zwischen $\eta + \varepsilon$ und $\eta - \varepsilon$ definirt; die für $\mathfrak{G}_0$ construirte Function y muss also mit der vorher erhaltenen identisch sein. Da nun ζ so klein wie man will genommen werden darf, so ist die Stetigkeit der für das Gebiet $\mathfrak{G}$ definirten Function y zunächst im Werthsystem $(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n, \eta)$ bewiesen.

Diese Function nehme den Werth $\bar{y}$ an für das dem Gebiet $\mathfrak{G}$ angehörende Werthsystem $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots \bar{x}_n$, sodass man hat

$$f(\bar{x}_1 \bar{x}_2, \ldots \bar{x}_n, \bar{y}) = 0.$$

Dann kann man eine positive Grösse $\bar{\varepsilon}$ so wählen, dass

(8) $$\eta - \varepsilon < \bar{y} - \bar{\varepsilon} < \bar{y} + \bar{\varepsilon} < \eta + \varepsilon.$$

also alle der Ungleichung

$$|y - \bar{y}| < \bar{\varepsilon}$$

angehörenden Werthe y auch der Ungleichung (5) genügen. Da nun das Werthsystem $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots \bar{x}_n, \bar{y})$ auch den Ungleichungen (1) genügt, so besitzt in seiner Umgebung die Function f ein Differential nach allen Argumenten, und die Grösse $\frac{\partial f}{\partial y}$ ist positiv; man kann also für das Werthsystem $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots \bar{x}_n, \bar{y})$ dieselben Betrachtungen wie für $(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n, \eta)$ durchführen und derartige positive Grössen $\bar{\varepsilon}, \bar{\varepsilon}_2, \ldots \bar{\varepsilon}_n$ bestimmen, dass für alle Werthsysteme $(x_1, x_2, \ldots x_n)$, bei welchen

(8a) $$|x_1 - \bar{x}_1| < \bar{\varepsilon}_1, \; |x_2 - \bar{x}_2| < \bar{\varepsilon}, \ldots |x_n - \bar{x}_n| < \bar{\varepsilon}_n,$$

eine Function y entsprechend der Gleichung (4) zwischen den Grenzen $\bar{y} + \bar{\varepsilon}$ und $\bar{y} - \bar{\varepsilon}$ eindeutig bestimmt ist; man kann dabei die Grössen $\bar{\varepsilon}$ so klein gewählt denken, dass

$$\bar{\varepsilon}_1 < \varepsilon_1, \; \bar{\varepsilon}_2 < \varepsilon_2, \ldots \bar{\varepsilon}_n < \varepsilon_n;$$

dann gehören die durch die Relationen (8a) definirten Werthsysteme

dem Gebiet $\mathfrak{G}$ an. Da nun die zwischen $\bar{y}+\bar{\varepsilon}$ und $\bar{y}-\bar{\varepsilon}$ liegenden Werthe zufolge der Ungleichung (8) auch der Relation (5) genügen, so muss die Function y, die man für das Gebiet (8a) findet, mit der für das ganze Gebiet $\mathfrak{G}$ eindeutig definirten identisch sein für jedes Argumentsystem, für welches beide definirt sind, also für das Gebiet (8a). Da man endlich die Grösse $\bar{\varepsilon}$ beliebig klein annehmen kann, so ist die Function y für das Werthsystem $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots x_n)$, also für das ganze Gebiet $\mathfrak{G}$ stetig.

Jetzt sei $(x_1, x_2, \dots x_n)$ irgend ein festes, $(x_1+\Delta x_1,\ x_2+\Delta x_2, \dots \dots x_n+\Delta x_n)$ ein bewegliches Werthsystem des Gebiets $\mathfrak{G}$, ferner y und $y+\Delta y$ die zugehörigen Werthe der eindeutig definirten Function y; wenn dann alle Grössen Δx unendlich klein werden, so gilt nach dem erhaltenen Resultat dasselbe von Δy. Da nun die Function f ein Differential besitzt, so hat man

$$f(x_1+\Delta x_1,\ x_2+\Delta x_2, \dots x_n+\Delta x_n,\ y+\Delta y)$$

$$=f(x_1, x_2, \dots x_n, y)+\sum_{\nu=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_\nu}+\delta_\nu\right)\Delta x_\nu+\left(\frac{\partial f}{\partial y}+\delta\right)\Delta y,$$

also auch

$$\sum_{\nu=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_\nu}+\delta_\nu\right)\Delta x_\nu+\left(\frac{\partial f}{\partial y}+\delta\right)\Delta y=0,$$

wobei die Grössen $\delta_1, \delta_2, \dots \delta_n$, δ gegen die Grenze Null convergiren, sobald dies von allen $n+1$ Grössen $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots \Delta x_n, \Delta y$, also auch sobald es von den n ersten unter ihnen gilt. Berücksichtigt man noch die Ungleichung (2), so folgt

$$\Delta y=\sum_{\nu=1}^{n}\left(-\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x_\nu}}{\dfrac{\partial f}{\partial y}}+\delta_\nu'\right)\Delta x_\nu,$$

wobei auch die Grössen δ_ν' alle unendlich klein werden, sobald dies gilt von sämmtlichen Incrementen $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots \Delta x_n$. Damit ist bewiesen, dass die im Gebiet $\mathfrak{G}$ definirte Function y nicht nur partielle Differentialquotienten erster Ordnung, sondern auch ein Differential nach den n Variabeln x besitzt. Für die partiellen Differentialquotienten ist zugleich die gewöhnliche Bildungsregel abgeleitet.

Genau dasselbe erhält man offenbar, wenn in der Ungleichung (2) das Zeichen $>$ durch $<$ ersetzt wird.

Ein einfaches Corollar dieser Betrachtungen ist für das folgende von besonderer Wichtigkeit. Man fixire beliebig viele der Variabeln x, etwa die letzten $n-k$, innerhalb der Grenzen, die ihnen bei Definition des Gebiets $\mathfrak{G}$ vorgeschrieben wurden; dann ist y als Function der

Grössen $x_1, x_2, \ldots x_k$ zwischen 0 und ε eindeutig definirt in einem Gebiet, für welches

$$|x_1 - \xi_1| < \varepsilon_1, \ |x_2 - \xi_2| < \varepsilon_2, \ldots |x_k - \xi_k| < \varepsilon_k,$$

und dieses Gebiet ist unabhängig von einer etwaigen Aenderung der Variabeln $x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots x_n$, bei welcher die Ungleichungen

$$|x_{k+1} - \xi_{k+1}| < \varepsilon_{k+1}, \ |x_{k+2} - \xi_{k+2}| < \varepsilon_{k+2}, \ldots |x_n - \xi_n| < \varepsilon_n$$

erfüllt bleiben. Fasst man die letzteren Variabeln als Parameter auf, die in einer Function der ersten k eingehen, so kann man mit ein wenig geänderter Bezeichnung folgendes Theorem aufstellen.

Hängt eine Function f der $k+1$ Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_k, y$, ausserdem noch ab von den Parametern $t_1, t_2, \ldots t_r$; besteht die Gleichung

$$f(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k, \tau_1, \tau_2, \ldots \tau_r, \eta) = 0,$$

und besitzt die Function $f(x_1, x_2, \ldots x_k, t_1, t_2, \ldots t_r, y)$ ein Differential nach allen $k + r + 1$ Argumenten für alle Werthsysteme einer gewissen Umgebung des Systems $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_k, \tau_1, \tau_2, \ldots \tau_r, \eta$, und ist für dieses Gebiet auch $\frac{\partial f}{\partial y}$ von constantem Zeichen, so kann man eine Umgebung (τ) des Werthsystems $(\tau_1, \tau_2, \ldots \tau_r)$, eine Umgebung (ξ) des Werthsystems $(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_k)$ und ein die Grösse η umfassendes Intervall (η) derartig abgrenzen, dass durch die Gleichung

$$f(x_1, x_2, \ldots x_k, t_1, t_2, \ldots t_r, y) = 0$$

für jedes dem Gebiet (τ) angehörende Werthsystem der Parameter t die Grösse y als Function von $x_1, x_2, \ldots x_k$ definirt wird, welche im Gebiet (ξ) überall existirt und, wenn man sie auf das Intervall (η) beschränkt, eindeutig bestimmt ist. Diese Function besitzt bei der angegebenen Beschränkung der Argumente x und t ein Differential nach allen diesen $k + r$ Grössen.

Achten wir endlich noch auf die Werthe, welche die Function y wirklich annimmt. Es sei mindestens ein partieller Differentialquotient $\frac{\partial f}{\partial x_\nu}$ in der Umgebung des Werthsystems $(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n, \tau_1, \tau_2, \ldots \tau_r, \eta)$ von Null verschieden und constanten Zeichens, dann ist auch die Grösse

$$\frac{\partial y}{\partial x_\nu} = -\frac{\partial f}{\partial x_\nu} : \frac{\partial f}{\partial y}$$

entweder stets positiv, oder stets negativ. Setzt man nun zunächst

$$t_1 = \tau_1, \ t_2 = \tau_2, \ldots t_r = \tau_r,$$
$$x_1 = \xi_1, \ldots x_{\nu-1} = \xi_{\nu-1}, \ x_{\nu+1} = \xi_{\nu+1}, \ldots x_n = \xi_n$$

und lässt man x_ν allein variiren und den Werth ξ_ν wachsend passiren, so passirt die Grösse y den Werth η wachsend oder abnehmend, durchläuft also alle Werthe eines gewissen endlichen, den Werth η umfassenden Intervalls $(\eta)_0$; um so mehr wird dieses Intervall von der Grösse y ganz durchlaufen, wenn man die eben gemachten Beschränkungen der Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_{\nu-1}, x_{\nu+1}, \ldots x_n$ wieder aufhebt. Aendert man sodann die Grössen t hinlänglich wenig, so durchläuft die Function y ein von $(\eta)_0$ beliebig wenig verschiedenes Intervall, also noch das Intervall $(\eta)_1$ selbst, wenn man dieses hinlänglich klein angenommen hat. Man kann dasselbe somit als von den Grössen t unabhängig betrachten, wenn man nöthigenfalls das Gebiet (τ) durch ein kleineres ersetzt.

Man kann demnach dem obigen Theorem folgenden Ergänzungssatz beifügen.

Wenn mindestens eine partielle Ableitung $\frac{\partial f}{\partial x_\nu}$ in der Umgebung des Werthsystems $(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n, \tau_1, \tau_2, \ldots \tau_r, \eta)$ entweder stets positiv oder stets negativ ist, so kann ein den Werth η umfassendes Intervall $(\eta)_0$ derartig gefunden werden, dass die Grösse y alle Werthe desselben auch dann noch annimmt, wenn die Variabeln t innerhalb des Gebiets (τ) beliebig fixirt werden; von ihren Werthen ist das Intervall $(\eta)_0$ unabhängig.

§ 2.

Die Umkehrung eines Systems von zwei Functionen zweier Veränderlichen.

Nach diesen Vorbereitungen wenden wir uns dem eigentlichen Thema zu und betrachten zunächst ein System zweier Functionen von zwei Variabeln

$$y_1 = f_1(x_1, x_2), \quad y_2 = f_2(x_1, x_2);$$

speciell sei gesetzt

$$\eta_1 = f_1(\xi_1, \xi_2), \quad \eta_2 = f_2(\xi_1, \xi_2)$$

und die Functionen mögen Differentiale nach x_1 und x_2 besitzen für alle Werthe dieser Grössen, bei welchen die Differenzen $|x_1 - \xi_1|$ und $x_2 - \xi_2|$ gewisse positive Constanten nicht überschreiten. Für alle diese Werthe sei ferner die Functionaldeterminante

$$\frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(x_1, x_2)} = \frac{\partial f_1}{\partial x_1}\frac{\partial f_2}{\partial x_2} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\frac{\partial f_2}{\partial x_1}$$

wie auch die — zufolge der Voraussetzung existirende — Grösse $\frac{\partial f_1}{\partial x_2}$ constanten Vorzeichens und von Null verschieden.

Alsdann hat die Function

$$F(x_1, x_2, y_1) = y_1 - f_1(x_1, x_2)$$

nach den drei als unabhängig betrachteten Argumenten x_1, x_2, y_1 ein Differential für alle Werthsysteme, bei welchen x_1, x_2 den angegebenen Beschränkungen unterworfen sind, y_1 aber beliebig sein kann. Da nun die Grössen

$$\frac{\partial F}{\partial x_2} = -\frac{\partial f_1}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial F}{\partial y_1} = 1$$

in der Umgebung des Werthsystems (ξ_1, ξ_2, η_1) von constantem Vorzeichen sind und die Gleichung

$$F(\xi_1, \xi_2, \eta_1) = 0.$$

besteht, so sind die Bedingungen für die Anwendbarkeit des in § 1 aufgestellten Satzes auf die Gleichung

$$F(x_1, x_2, y_1) = 0 \tag{9}$$

erfüllt, in welcher man x_2 als Function von x_1 und y_1 ansieht. Man kann also positive Grössen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \zeta_1$ derartig bestimmen, dass für alle den Ungleichungen

$$|x_1 - \xi_1| < \varepsilon_1, \quad |y_1 - \eta_1| < \zeta_1 \tag{10}$$

unterworfenen Werthepaare (x_1, y_1) ein und nur ein der Gleichung (9) und der Ungleichung

$$|x_2 - \xi_2| < \varepsilon_2$$

genügender Werth x_2 existirt; wir bezeichnen ihn durch $\varphi(x_1, y_1)$ und können ihn nach § 1 für die angegebenen Argumentenreihe als eine mit einem Differential versehene Function ansehen.

Setzt man weiter

$$G(x_1, y_1, y_2) = y_2 - f_2\big(x_1, \varphi(x_1, y_1)\big),$$

wobei dann

$$G(\xi_1, \eta_1, \eta_2) = 0,$$

so ist diese Function definirt für alle Werthsysteme (x_1, y_1, y_2), bei welchen die ersten beiden Argumente den Ungleichungen (10) genügen; sie hat für alle diese Werthsysteme nach den drei Variabeln ein Differential, wie man leicht daraus folgert, dass dasselbe für die Functionen f_2 und φ gilt. Dann kann nach einer in § 1 gemachten Bemerkung die Function G nach den gewöhnlichen Regeln der Differentialrechnung differenzirt werden:

$$\frac{\partial G}{\partial y_2} = 1, \quad \frac{\partial G}{\partial x_1} = -\frac{\partial f_2}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}$$
$$= \frac{1}{\frac{\partial f_1}{\partial x_2}} \frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(x_1, x_2)},$$

indem man nach Ausführung der Differentiation $x_2 = \varphi(x_1, y_1)$ einsetzt.

Wegen der über das Vorzeichen der Functionaldeterminante und der Grösse $\frac{\partial f_1}{\partial x_2}$ getroffenen Voraussetzung ist also der Werth $\frac{\partial G}{\partial x_1}$ in der Umgebung des Werthsystems ξ_1, η_1, η_2 von constantem Vorzeichen und von Null verschieden. Es ist also das Theorem des § 1 sammt dem Schlusssatz anwendbar auf die Gleichung

(11) $$G(x_1, y_1, y_2) = 0$$

in welcher man x_1 als Function von y_1 und y_2 ansieht. Man kann also positive Grössen $\zeta_1', \zeta_2', \varepsilon'$ bestimmen derart, dass für alle durch die Beschränkung

(12) $$|y_1 - \eta_1| < \zeta_1', \quad |y_2 - \eta_2| < \zeta_2'$$

definirten Werthsysteme (y_1, y_2) ein und nur ein der Gleichung (10) genügender Werth

$$x_1 = \psi_1(y_1, y_2)$$

zwischen den Grenzen $\xi_1 + \varepsilon'$ und $\xi_1 - \varepsilon'$ existirt. Die Grössen ζ' kann man unbeschadet dieser ihrer Bedeutung durch kleinere ersetzen; man darf also von vorneherein annehmen

(13) $$\zeta_1' < \zeta_1.$$

Die Function ψ_1 hat nach § 1 ein Differential und durchläuft alle Werthe des Intervalles von $\xi_1 + \varepsilon''$ bis $\xi_1 - \varepsilon''$, wenn ε'' eine hinreichend kleine positive Constante ist; es sei etwa noch

$$\varepsilon'' < \varepsilon_1.$$

Alsdann bestehen die Ungleichungen (10) unter den Voraussetzungen (12) und (13); man kann also in dem Ausdruck $\varphi(x_1, y_1)$ für x_1 einsetzen $\psi(y_1, y_2)$, womit man erhalten möge

$$\varphi(x_1, y_1) = x_2 = \varphi\big(\psi(y_1, y_2), y_1\big) = \psi_2(y_1, y_2).$$

Dann ist die so bestimmte Function ψ_2 für die durch die Ungleichungen (12) definirten Argumente eindeutig bestimmt, hat nach ihnen ein Differential, und es besteht die Gleichung

(14) $$F(x_1, x_2, y_1) = y_1 - f_1\big(\psi_1(y_1, y_2), \psi_2(y_1, y_2)\big) = 0.$$

Die Gleichung (11) aber giebt

(15) $$y_2 - f_2\big(\psi_1(y_1, y_2), \psi_2(y_1, y_2)\big) = 0.$$

Da endlich die Function $\varphi(x_1, y_1)$ für die Umgebung des Werthsystems $x_1 = \xi_1$, $y_1 = \eta_1$ einen von Null verschiedenen Differentialquotienten

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y_1} = 1 : \frac{\partial f_1}{\partial x_2}$$

constanten Zeichens besitzt, in welchem rechts $x_2 = \varphi(x_1, y_1)$ einzusetzen ist, so nimmt die Function $\varphi(\xi_1, y_1)$ alle Werthe eines gewissen ξ_2 einschliessenden Intervalls an, wenn man y_1 das Intervall

von $\eta_1 - \zeta_1'$ bis $\eta_1 + \zeta_1'$ durchlaufen lässt. Dabei kann man y_2 entsprechend der Gleichung

(15a) $$\xi_1 - \psi_1(y_1, y_2) = 0$$

bestimmen, da die Function ψ_1, wie gezeigt, ein Differential besitzt, und die Grösse

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial y_2} = -\frac{\partial G}{\partial y_2} : \frac{\partial G}{\partial x_1} = -\frac{\partial f_1}{\partial x_2} : \frac{\partial (f_1, f_2)}{\partial (x_1, x_2)},$$

in welcher nach der Differentiation

$$x_2 = \varphi(x_1, y_1), \quad x_1 = \psi_1(y_1, y_2)$$

zu setzen ist, ein constantes Zeichen besitzt. Auf die Gleichung (15a) ist also der Satz des § 1 anwendbar; man kann y_1 und gleichzeitig y_2 innerhalb der Intervalle (12) so variiren, dass die Function $\psi_2(y_1, y_2)$ alle Werthe eines endlichen, ξ_2 einschliessenden Intervalls annimmt, welches etwa definirt sei durch die Ungleichung

(16) $$|x_2 - \xi_2| < \varepsilon'''.$$

Hiermit ist das Ziel einer Umkehrung der Gleichungen

$$y_1 = f_1(x_1, x_2), \quad y_2 = f_2(x_1, x_2)$$

vollständig erreicht; für das unter (12) definirte Gebiet der Grössen y_1 und y_2 giebt es eindeutige, mit Differentialen nach diesen Argumenten versehene Functionen $\psi_1(y_1, y_2)$ und $\psi_2(y_1, y_2)$, welche den Gleichungen (14) und (15) genügen; die erste nimmt alle durch (13), die zweite alle durch (16) definirten Werthe an.

Eine leichte Verallgemeinerung dieses Resultats, von der wir später Gebrauch machen werden, ergiebt sich, wenn man annimmt, dass die Functionen f_1 und f_2 ausser x_1 und x_2 auch noch beliebig viele Parameter $t_1, t_2, \ldots t_r$ enthalten, und dass sie nach allen diesen $r + 2$ Variabeln zusammengenommen Differentiale besitzen für alle Werthe der Parameter t, bei welchen die Unterschiede

$$|t_1 - \tau_1|, \; |t_2 - \tau_2|, \ldots |t - \tau_r|$$

von irgendwelchen Anfangswerthen $\tau_1, \tau_2, \ldots \tau_r$ gewisse positive Constanten nicht überschreiten. Alsdann hängt auch die Function $F(x_1, x_2, y_1)$ und nach § 1 auch die durch die Gleichung (9) definirte Function $\varphi(x_1, y_1)$ von den Parametern t in derselben Weise ab wie f_1 und f_2, nämlich so, dass sie nach sämmtlichen in ihnen vorkommenden $r + 3$ und $r + 2$ Grössen Differentiale besitzen. Die Grössen $\varepsilon_1, \zeta_1, \varepsilon_2$, können nach § 1 als von den Parametern t unabhängig betrachtet werden, wenn man diese auf hinreichend enge Intervalle beschränkt. Weiter haben dann auch die Function $G(x_1, y_1, y_2)$ und die durch die Gleichung (11) definirte Function $\psi_1(y_1, y_2)$ nach den in ihnen auftretenden Variabeln x, y, t zusammengenommen Differentiale, und es können nach § 1 die Grössen $\zeta_1', \zeta_2', \varepsilon'', \varepsilon'''$ für unabhängig

30*

von den Parametern t gelten, wenn man die Aenderung derselben hinreichend beschränkt.

Das Ergebniss unsrer Untersuchung kann demnach in folgender Weise zusammengefasst werden:

Die Functionen $f_1(x_1, x_2, t_1, t_2, \ldots t_r)$ und $f_2(x_1, x_2, t_1, t_2, \ldots t_r)$ mögen in der Umgebung eines speciellen Werthsystems $(\xi_1, \xi_2, \tau_1, \tau_2, \ldots \tau_r)$ der Variabeln nach diesen Differentiale besitzen und es sei in dem genannten Gebiete die Grösse

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\frac{\partial f_2}{\partial x_2} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\frac{\partial f_2}{\partial x_1}$$

constanten Vorzeichens und von Null verschieden; dasselbe gelte von mindestens einer der in ihr vorkommenden partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x}$. Alsdann giebt es ein einziges bestimmtes System von zwei eindeutigen Functionen

$$\psi_1(y_1, y_2, t_1, t_2, \ldots t_r) \quad \text{und} \quad \psi_2(y_1, y_2, t_1, t_2, \ldots t_r),$$

welche für x_1 und x_2 gesetzt die Gleichungen

$$\text{(A)} \quad y_1 = f_1(x_1, x_2, t_1, t_2, \ldots t_r), \quad y_2 = f_2(x_1, x_2, t_1, t_2, \ldots t_r)$$

befriedigen. Beschränkt man das Parametersystem $(t_1, t_2, \ldots t_r)$ auf eine hinreichend eng umgrenzte Umgebung des Werthsystems $(\tau_1, \tau_2, \ldots \tau_r)$, die Argumente y_1 und y_2 auf die Werthe, für welche die Grössen

$$|y_1 - f_1(\xi_1, \xi_2, \tau_1, \tau_2, \ldots \tau^r)|, \quad |y_2 - f_2(\xi_1, \xi_2, \tau_1, \tau_2, \ldots \tau_r)|$$

gewisse positive Constanten nicht übersteigen, so existiren die Functionen ψ_1 und ψ_2 und haben nach allen ihren Argumenten Differentiale. Sie liefern die einzigen Lösungen der Gleichungen (A), wenn man die Grössen x_1 und x_2 auf gewisse die Werthe ξ_1 resp. ξ_2 umfassende Intervalle beschränkt, und nehmen, auch wenn man die Grössen t fixirt, alle Werthe an, für welche die Differenzen

$$|\psi_1(y_1, y_2, t_1, t_2, \ldots t_r) - \xi_1|,$$
$$|\psi_2(y_1, y_2, t_1, t_2, \ldots t_r) - \xi_2|$$

gewisse von den Parametern t unabhängige Constanten nicht übersteigen.

Zu beachten ist, dass hier ebensowenig wie in § 1 die Stetigkeit der ersten partiellen Differentialquotienten von f_1 und f_2 benutzt und vorausgesetzt wird. Führt man diese Annahme ein, so folgt von selbst, dass mindestens eine partielle Ableitung jeder Function in der Umgebung irgend eines Argumentsystems von constantem Vorzeichen ist.

§ 3.

Beweis und Erörterung des von Lipschitz aufgestellten Satzes.

Um die Beziehungen der erhaltenen Resultate zu den citirten Untersuchungen von Lipschitz übersehen zu können, nehmen wir an, es sei im Gebiet der Variabeln x_1 und x_2 ein beliebiges, einfach oder mehrfach zusammenhängendes Continuum $\mathfrak{C}$ von endlicher Ausdehnung abgegrenzt; wir denken es uns durch eine ebene Figur dargestellt, indem wir jetzt die Grössen x_1 und x_2 der kürzeren Ausdrucksweise halber als rechtwinklige Coordinaten eines Punktes der Ebene interpretiren. Für die Umgebung jedes Punktes im Innern und auf dem Rande des Gebiets $\mathfrak{C}$ mögen die Functionen $f_1(x_1, x_2)$ und $f_2(x_1, x_2)$ die im Theorem des vorigen Paragraphen vorausgesetzten Eigenschaften besitzen; das Vorzeichen der Functionaldeterminante sei für alle diese Punkte dasselbe; zur Vereinfachung nehmen wir ausserdem an, die Grössen $\frac{\partial f_1}{\partial x_1}$ und $\frac{\partial f_1}{\partial x_2}$ seien in dem Gebiet $\mathfrak{C}$ stetige Functionen, sodass mindestens eine von ihnen in der Umgebung jedes der betrachteten Punkte constanten Zeichens ist und nicht verschwindet.

Wenn nun P ein Punkt des Gebiets $\mathfrak{C}$ ist mit den Coordinaten (ξ_1, ξ_2), so kann nach § 1 ein diesen Punkt umfassendes den Coordinatenaxen parallel orientirtes Rechteck $\mathfrak{R}$ bestimmt werden, innerhalb dessen durch die Gleichung

$$(17) \qquad f_1(x_1, x_2) - f_1(\xi_1, \xi_2) = 0$$

entweder x_2 als eindeutige Function von x_1 definirt wird, oder umgekehrt, je nachdem $\frac{\partial f_1}{\partial x_2}$ oder $\frac{\partial f_1}{\partial x_1}$ die in P nicht verschwindende Ableitung ist. Schreibt man diese Gleichung in der Form

$$(18) \qquad f_1(x_1, x_2) - a_1 = 0$$

und sieht a_1 als Parameter an, so folgt aus § 1, dass bei hinreichend kleiner Aenderung von a_1 das Rechteck $\mathfrak{R}$ als von a_1 unabhängig betrachtet werden kann. Denkt man sich diese Aenderung durch Aenderung der Grössen ξ_1 und ξ_2 hervorgebracht, so folgt, dass bei hinreichend kleiner Verschiebung des Punktes P das zugehörige Rechteck $\mathfrak{R}$ als unverändert angesehen werden kann.

Es sei nun p der kürzeste Abstand des Punktes P vom Perimeter des Rechtecks $\mathfrak{R}$; dann kann man für alle Punkte des Gebiets $\mathfrak{C}$ einschliesslich der Randpunkte die Rechtecke $\mathfrak{R}$ so bestimmt denken, dass alle Grössen p über einer positiven Constanten p_0 verbleiben. Denn, wäre dass nicht der Fall, so würde nach der Weierstrass-Bolzano'schen Schlussweise folgen, dass mindestens ein Punkt P_0 in dem betrachteten Gebiet existirt von der Beschaffenheit, dass in beliebiger Nähe desselben

Punkte liegen, für welche die Grösse p nothwendig kleiner ist als eine beliebig klein gegebene positive Grösse. Einen Widerspruch hiergegen ergiebt die folgende Erwägung. Für den Punkt P_0 selbst kann man das zugehörige Rechteck $\mathfrak{R}_0$ nach dem oben gesagten so gezeichnet denken, dass dasselbe auch zu allen Punkten einer gewissen Umgebung von P_0 gehört. Für alle diese wäre dann offenbar die Grösse p oberhalb eines festen positiven Werthes gelegen. Es giebt also bei passender Bestimmung der Rechtecke $\mathfrak{R}$ eine positive Grösse p_0, welche kleiner ist als jede der Grössen p.

Wenn speciell in dem für P construirten Rechteck $\mathfrak{R}$ etwa x_1 die unabhängige Variable ist, so sei etwa

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_2} > 0;$$

alsdann ist für irgend einen Punkt des Gebiets $\mathfrak{R}$

$$f_1(x_1, x_2) \gtrless f_1(\xi_1, \xi_2), \tag{19}$$

je nachdem x_2 grösser oder kleiner ist als der zu x_1 gehörige durch die Gleichung (17) oder (18) eindeutig definirte Werth x_2; die dieser Gleichung genügenden Punkte theilen also das Gebiet $\mathfrak{R}$ in zwei Continua derart, dass für das eine das obere, für das andere das untere Zeichen in der Ungleichung (19) gilt; dasselbe gilt offenbar, wenn die Grösse $\frac{\partial f_1}{\partial x_2}$ negativ ist, und ebenso wenn x_2 als unabhängige Variable zu nehmen ist.

Weiter kann in dem Rechteck $\mathfrak{R}$ der „Fortgang längs der Curve (17)" genau definirt werden. Denn ist etwa x_1 die unabhängige Variable, so kann man die innerhalb des Rechtecks $\mathfrak{R}$ liegenden der Gleichung (17) genügenden Punkte nach der Grösse ihrer Abscissen x_1 geordnet denken; lässt man x_1 von dem Werthe ξ_1 aus entweder wachsen oder abnehmen, bis die Grenze des Rechtecks $\mathfrak{R}$ erreicht ist, so erhält man zwei bestimmte von P ausgehende Bögen der Curve (17), deren einer etwa in P_1 endigen möge. Da nun die durch die Gleichung (17) definirte Function nach den jetzigen Voraussetzungen einen stetigen Differentialquotienten

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{\partial f_1}{\partial x_1} : \frac{\partial f_1}{\partial x_2}$$

besitzt, so ist auch das Bogenintegral

$$\int dx_1 \sqrt{1 + \left(\frac{dx_2}{dx_1}\right)^2}$$

endlich und, von P bis P_1 erstreckt, grösser als die kürzeste Entfernung des Punktes P vom Umfang der Figur $\mathfrak{R}$, also $> p_0$. — Ebenso kann man für den Punkt P_1 ein zugehöriges Rechteck $\mathfrak{R}_1$

zeichnen und einen bestimmten bis zu seiner Grenze reichenden Bogen $P_1 P_2$ der Curve (17), welcher in P_1 als Fortsetzung des Bogens PP_1 zu betrachten ist. Die Fortgangsrichtung des Bogens $P_1 P_2$ ist leicht analytisch zu definiren. Ist auch in $\mathfrak{R}_1$ die Variable x_1 unabhängig, so nehme man denjenigen Bogen P_1, P_2, längs dessen sich x_1 in demselben Sinne ändert wie beim Uebergang von P zu P_1. Ist dagegen in $\mathfrak{R}_1$ die unabhängige Variable x_2 zu nehmen, so ändern sich x_2 in demselben oder entgegengesetztem Sinne wie vorher x_1, je nachdem in P_1 die Grösse $\frac{dx_2}{dx_1}$ positiv oder negativ ist.

Fragen wir nun nach den Werthen der Function $f_2(x_1, x_2)$ „längs der Curve (17)", so ist dieselbe zunächst innerhalb des Gebietes $\mathfrak{R}$ als eine eindeutige Function von x_1 aufzufassen, deren Differentialquotient nach § 2 geschrieben werden kann:

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial x_1} = -\frac{1}{\frac{\partial f_1}{\partial x_2}}\frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(x_1, x_2)}. \tag{19a}$$

Diese Grösse ist innerhalb des Gebietes $\mathfrak{R}$ von constantem Vorzeichen; lässt man also x_1 vom Werthe ξ_1 aus wachsen oder abnehmen, entsprechend dem Fortgang PP_1, so ändert sich die Function f_2 stets in einem bestimmten Sinne. Ist x_1 auch im Gebiet $\mathfrak{R}_1$ unabhängige Variable, so behält sie beim Uebergang $P_1 P_2$ ihren Aenderungssinn, die Grösse (19a) ihr Vorzeichen bei; mithin ändert sich der Werth f_2 beim Uebergang $P_1 P_2$ ebenso wie bei PP_1. Wird dagegen x_2 die unabhängige Variable für das Gebiet $\mathfrak{R}_1$, so hat man f_2 als eindeutige Function von x_2 zu betrachten, deren Ableitung ist

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \frac{\partial f_2}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dx_2} = \frac{1}{\frac{\partial f_1}{\partial x_1}}\frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(x_1, x_2)}. \tag{20}$$

Diese hat dasselbe oder das entgegengesetzte Vorzeichen wie die Grösse (19a), je nachdem im Punkte P_1 der Quotient

$$-\frac{\partial f_1}{\partial x_1} : \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = \frac{dx_2}{dx_1}$$

positiv oder negativ ist, je nachdem also beim Fortgang $P_1 P_2$ die Variable x_2 sich in demselben oder dem entgegengesetzten Sinne ändert, wie die Variable x_1 beim Fortgang PP_1. Bei letzterem ändert sich die Grösse f_2 in demselben Sinne wie bei ersterem, wenn entweder die Grössen (19a) und (20) dasselbe Zeichen haben, und x_1 und x_2 in gleichem Sinne variiren, oder die Grössen (19a) und (20) verschiedene Zeichen haben und die Grössen x_1 und x_2 in entgegengesetztem Sinne sich ändern; *also ändert sich der Werth $f_2(x_1, x_2)$ bei dem Fortgang PP_1P_2 stets in demselben Sinne.*

Vom Punkte P_2 ausgehend kann man nun in derselben Weise wie von P_1 ausgehend eine Fortsetzung P_2P_3 construiren u. s. f., und alle Bögen P_1P_2, P_2P_3 u. s. f. sind grösser als p_0, da sie jedesmal einen Punkt mit dem Umfang des zugehörigen Rechteckes $\mathfrak{R}$ verbinden. Wenn also dies Verfahren der Fortsetzung eine unbegrenzte Anzahl von Malen wiederholt werden könnte, ohne dass man einen Punkt des Randes des Gebietes $\mathfrak{C}$ erreichte, so ergäbe sich eine in diesem verlaufende Linie (17) von unendlicher Bogenlänge, die sich selbst niemals schnitte, oder eine geschlossene Linie. In ersterem Falle theile man das Gebiet $\mathfrak{C}$ in beliebiger Weise in Theile; dann muss in mindestens einem Theil $\mathfrak{C}_0$ ein unendlich langer Bogen unsrer Curve vorhanden sein; ebenso wieder in mindestens einem Untertheil, wenn man das Gebiet $\mathfrak{C}_0$ beliebig eintheilt u. s. f. Schliesslich muss man nach einer bekannten Schlussweise mindestens einen Punkt Q im Innern oder auf dem Rande des Gebietes $\mathfrak{C}$ erhalten von der Beschaffenheit, dass in jedem beliebig kleinen ihn umfassenden Gebiet ein unendlich langer Bogen unsrer Curve vorhanden ist. Wäre für den Punkt Q die Gleichung (17) nicht erfüllt, so gälte dasselbe für eine gewisse Umgebung, da die Function $f_1(x_1, x_2)$ stetig ist; es könnte also in diese Umgebung die Linie (17) überhaupt nicht eindringen. Bestände aber die Gleichung (17) für den Punkt Q, so construire man das zugehörige Rechteck $\mathfrak{R}$; man sieht dann unmittelbar, dass in diesem nur ein Bogen von endlicher Länge der Linie (17) vorhanden ist. Der Fortgang P_1P_2, P_2P_3, u. s. f. kann also nicht unendlich oft wiederholt werden. Ebenso kann sich auch keine geschlossene Linie (17) ergeben, da bei unserm Process der Fortsetzung die Grösse f_2 sich stets in demselben Sinne ändert, also nach Vollendung eine Umlaufs nicht wieder zu demselben Werth zurückkehren kann, den sie anfangs hatte, wie es doch durch die Eindeutigkeit dieser Function gefordert wird.

Hiernach bleibt die einzige Möglichkeit übrig, dass nach einer endlichen Anzahl von Fortgängen der beschriebenen Art ein Randpunkt erreicht wird, in welchem die Fortsetzung des Verfahrens unmöglich wird. Die ganze Betrachtung gilt für jede der beiden Fortgangsrichtungen, die man im Punkte P einschlagen kann; der Punkt P liegt also auf einem das Gebiet $\mathfrak{C}$ einfach von einem Randpunkte zu einem andern hindurchsetzenden Zuge der Linie (17). Bedenkt man noch, dass diese, wie früher bemerkt, innerhalb des um einen ihrer Punkte construirten Rechtecks $\mathfrak{R}$ die Punkte, für welche $f_1(x_1,x_2) > a_1$, von denen scheidet, für welche $f_1(x_1, x_2) < a_1$, so kann man die Ergebnisse der Untersuchung in folgender Weise zusammenfassen:

Wenn in der Umgebung jedes Punktes im Innern und auf dem Rande eines beliebigen endlichen Gebiets $\mathfrak{C}$ die

Functionen $f_1(x_1, x_2)$ und $f_2(x_1, x_2)$ Differentiale, die erste auch stetige erste Ableitungen und die Functionaldeterminante für die sämmtlichen bezeichneten Punkte dasselbe Vorzeichen besitzt, so bilden die Punkte des Gebiets $\mathfrak{C}$, für welche eine Gleichung $f_1(x_1, x_2) = a_1$ besteht, stetige Linienzüge, deren jeder von einem Randpunkte zu einem andern geht, dabei weder sich selbst noch die anderen schneidet. Längs eines jeden dieser Züge ändern sich die Werthe von $f_2(x_1, x_2)$ in einem bestimmten Sinne, d. h. von einem Endpunkt zum andern beständig ab- oder zunehmend; jeder Zug trennt ein Gebiet $f_1(x_1, x_2) > a_1$ von einem Gebiet $f_1(x_1, x_2) < a_1$.

Auf Grund dieses ganz allgemeinen Resultats kann man leicht speciellere, insbesondere den Satz von Lipschitz ableiten, bei welchem vorausgesetzt wird, das Gebiet $\mathfrak{C}$ sei einfach zusammenhängend und werde durch die Mannichfaltigkeit $f_1(x_1, x_2) = a_1$ in ein Gebiet $f_1 > a_1$ und ein anderes $f_1 < a_1$ zerlegt, deren jedes in sich zusammenhängt. Bei dieser Annahme kann die Mannichfaltigkeit $f_1 = a_1$ nicht aus mehreren Stücken bestehen, da diese das Gebiet $\mathfrak{C}$ in mehr als zwei Stücke zerlegen würden, wenn es nur einfach zusammenhängend ist. Längs eines einzelnen Stückes $f_1 = a_1$ sind aber alle Werthe der Function f_2 von einander verschieden, wie gezeigt wurde; also kann ein bestimmtes Werthsystem der Functionen f_1 und f_2 niemals in mehr als einem Punkte des Gebietes $\mathfrak{C}$ erreicht werden.

Zu bemerken ist noch, dass die von Lipschitz a. a. O. gemachte Voraussetzung, die Mannichfaltigkeit $f_1 = a_1$ enthalte kein Werthsystem doppelt, bei unsrer Betrachtungsweise sich als entbehrlich erweist. Ein weiterer Unterschied zwischen den von Lipschitz eingeführten Voraussetzungen und den unsrigen besteht darin, dass unsre ganzen Entwicklungen auf der Existenz der Differentiale von f_1 und f_2 beruhten, während bei Lipschitz nur von Differentialquotienten die Rede ist. Es lässt sich aber zeigen, dass unsre Voraussetzungen aus den von Lipschitz gebrauchten folgen. Lipschitz*) geht aus von der Formel

$$(21) \qquad \int\int\left(\frac{\partial P}{\partial x_2} - \frac{\partial Q}{\partial x_1}\right) dx_1\, dx_2 = \int (P dx_1 + Q dx_2),$$

in welcher links über eine beliebige Fläche, rechts über ihre Randlinie zu integriren ist, und gesetzt wird

$$P = f_2 \frac{\partial f_1}{\partial x_1}, \quad Q = f_2 \frac{\partial f_1}{\partial x_2};$$

*) Lipschitz, Lehrbuch der Analysis Bd. II, § 98, S. 577.

es wird also implicite die Existenz und Stetigkeit der Grösse $\frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1 \partial x_2}$ benutzt, sowie die Gleichung

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_2 \partial x_1},$$

welche nach einem von Schwarz*) aufgestellten Theorem aus der Existenz und Stetigkeit der Grössen $\frac{\partial f_1}{\partial x_1}$, $\frac{\partial f_1}{\partial x_2}$, $\frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1 \partial x_2}$ folgt. Setzt man also in der Gleichung (16)

$$P = \frac{\partial f_1}{\partial x_1}, \quad Q = \frac{\partial f_1}{\partial x_2},$$

so ergiebt sich unter den von Lipschitz gebrauchten Voraussetzungen

$$(22) \qquad 0 = \int \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} dx_2 \right),$$

wobei rechts über eine beliebige geschlossene Linie integrirt wird, indem man hier wie auf der rechten Seite der allgemeinen Gleichung (21) die Vorzeichen von dx_1 und dx_2 in bekannter Weise bestimmt. Aus der Gleichung (22) folgt

$$f_1(x_1, x_2) = f_1(x_1^0, x_2^0) + \int \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} dx_2 \right),$$

indem man rechts längs einer beliebigen Linie integrirt, welche die Punkte (x_1^0, x_2^0) und (x_1, x_2) verbindet. Nimmt man dieselbe gerade an, so kann man den gewöhnlichen Mittelwerthsatz anwenden, da das Vorzeichen von dx_1 und dx_2 constant bleibt. Sind die beiden Endpunkte der Integrationslinie einander hinreichend nahe, so kann man, da $\frac{\partial f_1}{\partial x_1}$ und $\frac{\partial f_1}{\partial x_2}$ stetige Functionen sind, setzen

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2) = f_1(x_1^0, x_2^0) &+ \left(\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1} \right)_0 + \delta_1 \right) (x_1 - x_1^0) \\ &+ \left(\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right)_0 + \delta_2 \right) (x_2 - x_2^0), \end{aligned}$$

wobei die Grössen mit dem Index 0 für $x_1 = x_1^0$, $x_2 = x_2^0$ zu nehmen sind, und die Grössen δ_1 und δ_2 mit den Differenzen $x_1 - x_1^0$ und $x_2 - x_2^0$ zugleich unendlich klein werden. Mit dieser Gleichung ist aber genau entsprechend der in § 1 gegebenen Definition ausgesprochen, dass die Function f_1 ein Differential besitzt. Endlich wird auch für die Function f_2 bei Lipschitz implicite die Existenz eines Differentials, nicht bloss der Differentialquotienten vorausgesetzt, da die Mannichfaltigkeiten $f_1 =$ const. und $f_2 =$ const.) als „Linien" be-

---

*) Schwarz, Ueber ein vollständiges System von einander unabhängiger Voraussetzungen etc. Ges. Abhandlungen S. 275.

trachtet werden, längs deren man fortgehen und integriren kann. Diese Auffassung kann wohl kaum anders strenge definirt und gerechtfertigt werden als durch die hier gegebenen Entwicklungen, welche den wesentlichen Inhalt der §§ 1 und 2 voraussetzen.

§ 4.

Mehrdeutige Umkehrung; Kronecker's Charakteristik.

Auf Grund der gewonnenen Anschauungen kann man sich klar machen, wie eine mehrdeutige Umkehrung eintreten kann. Es sei wiederum $\mathfrak{E}$ ein beliebiges Gebiet, innerhalb dessen die Functionaldeterminante ihr Zeichen nicht ändert und nicht verschwindet. Wenn dann jede Mannichfaltigkeit $f_1 = a_1$ das Gebiet $\mathfrak{E}$ in einem einzigen Zuge durchsetzt, so kann kein Werthsystem von den Functionen f_1 und f_2 mehrmals angenommen werden, da längs eines solchen Zuges die Werthe von f_2 alle von einander verschieden sind. Soll also ein Werthsystem $f_1 = a_1$, $f_2 = a_2$ mehrmals erreicht werden, so muss die Mannichfaltigkeit $f_1 = a_1$ in mindestens zwei getrennte Theile zerfallen. Nimmt man an, dass auch die Function f_2 im Gebiet $\mathfrak{E}$ stetige erste Ableitungen besitze, sodass man die Rollen beider Functionen vertauschen kann, so folgt, dass auch die Linie $f_2 = a_2$ in mindestens zwei Theile zerfällt; jeder Theil einer solchen kann mit einem Theil der Linie $f_1 = a_1$ höchstens einen Punkt gemein haben. Jeder Zug einer Linie $f_1 = a_1$ theilt ferner, wie gezeigt, die ihm benachbarten Theile des Gebietes $\mathfrak{E}$ in solche, für welche $f_1 > a_1$, und solche, für welche $f_1 < a_1$ ist. Da ferner, wie gezeigt, längs eines Zuges der Linie $f_1 = a_1$ die Function f_2 beständig wächst oder abnimmt, so theilt ein Punkt, für welchen $f_2 = a_2$ ist, den Zug der Linie $f_1 = a_1$, auf welchem er liegt, in ein Stück, für welches $f_2 > a_2$, und ein anderes, für welches $f_2 < a_2$.

Betrachtet man nun die auf der Randlinie des Gebietes $\mathfrak{E}$ liegenden Punkte, für welche $f_1 = a_1$, so kann man die Betrachtung wiederholen, welche Gauss im vierten seiner Beweise für den Fundamentalsatz der Algebra*) angewandt hat. Ein Zug der Linie $f_1 = a_1$, auf welchem die Function f_2 den Werth a_2 nicht annimmt, schneidet die Randlinie in zwei Punkten, für welche der Quotient

$$\frac{f_1 - a_1}{f_2 - a_2} = Q$$

das eine Mal von positiven zu negativen Werthen übergeht, das andere Mal umgekehrt, wenn die Randlinie des Gebiets $\mathfrak{E}$ so durchlaufen wird, dass das Innere des Gebiets etwa stets zur Linken bleibt.

*) Gauss Werke Bd. III, S. 80.

Genauere Untersuchung erfordern die Züge $f_1 = a_1$, auf welchen die Gleichung $f_2 = a_2$ einmal erfüllt wird.

Wenn man von einem Schnittpunkte S der Linien $f_1 = a_1$, $f_2 = a_2$ längs der einen oder andern unendlich wenig fortschreitet, mögen die Coordinaten die durch d resp. δ bezeichneten Incremente erhalten; man gehe längs der ersten Curve in der Richtung wachsender Werthe von f_2, und nehme auf der zweiten einen bei S unendlich nahe benachbarten Punkt, für welchen $f_1 > a_1$. Diese Bestimmungen geben die Relationen

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} dx_2 = 0, \quad df_2 > 0,$$
$$\frac{\partial f_2}{\partial x_2} \delta x_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \delta x_2 = 0, \quad \delta f_1 > 0,$$

sodass man setzen kann

$$dx_1 = -\lambda \frac{\partial f_1}{\partial x_2}, \quad dx_2 = \lambda \frac{\partial f_1}{\partial x_1},$$
$$\delta x_1 = \frac{\partial f_2}{\partial x_2}, \quad \delta x_2 = -\mu \frac{\partial f_2}{\partial x_1},$$
$$df_2 = \lambda\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\frac{\partial f_2}{\partial x_2} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\right), \quad \delta f_1 = \mu\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\frac{\partial f_2}{\partial x_2} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\right).$$

Nimmt man nun an, um einen bestimmten Fall vor Augen zu haben, das Zeichen der Functionaldeterminante sei das positive, so folgt

$$\lambda > 0, \quad \mu > 0, \quad \begin{vmatrix} \delta x_1 & \delta x_2 \\ dx_1 & dx_2 \end{vmatrix} = \lambda\mu\left\{\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\frac{\partial f_2}{\partial x_2} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\right\} > 0.$$

Nach einem bekannten Satze der analytischen Geometrie schliesst man hieraus, dass die den Incrementen δ entsprechende Richtung zu der den Incrementen d entsprechenden liegt wie die positive x_1-Axe zur positiven x_2-Axe; d. h. die nach den Punkten $f_1 > a_1$ hinzeigende Richtung der in S gezogenen Tangente der Curve $f_2 = a_2$ muss in positivem Drehungssinne weniger als die Hälfte einer vollen Umdrehung beschreiben, um in die nach den Punkten $f_2 > a_2$ weisende Tangente der Curve $f_1 = a_1$ überzugehen. Orientirt man also die Coordinatenaxen wie gewöhnlich, d. h. die x_1-Axe nach rechts, die x_2-Axe nach oben, und geht man längs der Curve $f_1 = a_1$ in der Richtung wachsender Werthe von f_2, so hat man das Gebiet $f_1 > a_1$ zur Rechten.

Auf Grund dieser von Gauss*) herrührenden geometrischen Hilfsbetrachtung kann man jetzt die frühere Bemerkung betreffs der Punkte $f_1 = a_1$ auf der Randlinie des Gebiets $\mathfrak{C}$ vervollständigen. Längs

*) Gauss, Allgemeine Lösung der Aufgabe, die Theile einer gegebenen Fläche auf einer andern abzubilden etc., Art. 14, Werke Bd. IV, S. 214.

dieser passire man in der festgesetzten Richtung, das Innere des Gebiets $\mathfrak{C}$ zur Linken, einen Punkt P der Linie $f_1 = a_1$, wobei die Function f_1 etwa wachsen möge. Geht man nun von P aus längs der Linie $f_1 = a_1$ in das Innere des Gebiets $\mathfrak{C}$ hinein, so hat man die Punkte, für welche $f_1 > a_1$, zur Rechten, man bewegt sich in der Richtung wachsender Werthe von f_2. Wenn demnach auf dem betrachteten Linienzuge $f_1 = a_1$ ein Punkt liegt, für welchen $f_2 = a_2$, so ist in P jedenfalls $f_2 < a_2$. Der Quotient Q geht also bei der festgesetzten Bewegung längs der Randlinie des Gebiets $\mathfrak{C}$ von positiven zu negativen Werthen über. Dasselbe findet aber auch statt, wenn bei dieser Bewegung im Punkte P die Differenz $f_1 - a_1$ von positiven zu negativen Werthen übergeht; dann hat man beim Fortgang längs der Linie $f_1 = a_1$ das Gebiet $f_1 > a_1$ zur Linken, bewegt sich also in der Richtung abnehmender Werthe f_2, daher denn in P sein muss $f_2 > a_2$. In diesem Punkte geht also auch jetzt der Quotient Q von positiven zu negativen Werthen über. Jedem Punkte, in welchem $f_1 = a_1$ und $f_2 = a_2$ wird, entsprechen also zwei Schnittpunkte des Randes mit der Linie $f_1 = a_1$, in welchen Q von positiven zu negativen Werthen übergeht.

Vergleicht man hiermit das Resultat, welches für die Bögen $f_1 = a_1$, in welchen nirgends $f_2 = a_2$ wird, so ergiebt sich folgender Satz:

Wird die Randlinie des Gebiets $\mathfrak{C}$ in bestimmter Richtung durchlaufen, so kann in den Schnittpunkten derselben mit der Linie $f_1 = a_1$ der Quotient

$$Q = \frac{f_1 - a_1}{f_2 - a_2}$$

von positiven zu negativen Werthen übergehen, oder umgekehrt. Die Differenz der Anzahlen beider Arten von Punkten ist, absolut genommen, gleich der doppelten Zahl der Punkte im Innern von $\mathfrak{C}$, für welche $f_1 = a_1$ und $f_2 = a_2$ ist. Dabei ist offenbar gleichgiltig ob die Randlinie aus einem oder mehreren Stücken besteht; der Sinn, in welchem dieselbe zu durchlaufen ist, bestimmt sich dadurch, dass das Innere stets auf einer und derselben Seite etwa stets zur Linken liegt. Dieser Satz ist natürlich ein Specialfall des allgemeinen Theorems von Kronecker*) über die Charakteristik von Functionensystemen für $n = 2$, welches übrigens auch seinerseits aus den hier gegebenen specielleren Betrachtungen leicht gefolgert werden kann, indem man ein beliebiges Gebiet in Theile zerlegt, für deren jeden die Functionaldeterminante ein constantes Vorzeichen behält.

*) Kronecker, Ueber Systeme von Functionen mehrerer Variabeln, Monatsberichte der Berl. Academie, Jahrg. 1869, S. 159, §§ II und III. Ueber die Charakteristik von Functionensystemen, Jahrg. 1878, S. 145.

Den vierten Gauss'schen Beweis für die Existenz der Wurzeln der algebraischen Gleichungen hat Kronecker ebenfalls schon mit seiner Theorie der Charakteristik in Verbindung gebracht, aber in ganz andrer Weise, als hier geschehen ist. Man kann den citirten Beweis in etwas modificirter Gestalt aus den obigen Entwicklungen ableiten, indem man noch bedenkt, dass einzelne Punkte P_0 im Innern des Gebiets $\mathfrak{C}$, für welche die Functionaldeterminante verschwindet, für die Argumentation keine wesentliche Schwierigkeit darbietet, wenn nur in ihnen nicht gleichzeitig $f_1 = a_1$, $f_2 = a_2$ ist. Denn beschreibt man um einen solchen Punkt P_0 einen hinlänglich kleinen Kreis $\mathfrak{P}_0$, so wird entweder auf diesem die Function $f_1 - a_1$ überhaupt nicht verschwinden, oder die Function $f_2 - a_2$ verschwindet nicht und es wird die Grösse $f_1 - a_1$ nur eine gerade Zahl von Malen das Zeichen wechseln, der Quotient Q geht also ebenso oft von positiven zu negativen Werthen über wie umgekehrt. Auf das Gebiet $\mathfrak{C}$, nach dem man die Kreise $\mathfrak{P}_0$ ausgeschieden hat, sind aber die obigen Betrachtungen anwendbar; die Kreise $\mathfrak{P}_0$ liefern dabei zur Bestimmung der Anzahl der Punkte, für welche $f_1 = a_1$ und $f_2 = a_2$, den Beitrag Null, können also unberücksichtigt bleiben. Wenn nun speciell $f_1 + f_2 i$ eine ganze rationale Function des complexen Arguments $x_1 + x_2 i$ ist, so ist die Functionaldeterminante nie negativ und verschwindet gleichzeitig mit der Grösse

$$\frac{d(f_1 + f_2 i)}{d(x_1 + x_2 i)},$$

also, wie man annehmen kann, nur in Punkten, für welche nicht beide Functionen f_1 und f_2 verschwinden. Man bestimmt also die Anzahl der Wurzeln der Gleichung

$$f_1 + f_2 i = 0$$

innerhalb eines beliebigen Gebiets $\mathfrak{C}$ durch die Anzahlen der Uebergänge der Quotienten $f_1 : f_2$ von positiven zu negativen Werthen und umgekehrt in den Punkten, wo der Rand des Gebiets von der Linie $f_1 = 0$ geschnitten wird. Diese Anzahlen lassen sich nach der bekannten Methode von Gauss bestimmen, wenn der Rand ein hinlänglich grosser Kreis um den Coordinatenanfangspunkt ist.*)

*) Beiläufig sei noch bemerkt, dass die Integraldarstellung der Charakteristik nicht, wie es wohl bei oberflächlicher Betrachtung scheinen könnte, zur Ableitung des in § 2 gegebenen Satzes dienen kann, da die Eigenschaften der Charakteristik nur abgeleitet werden unter der Voraussetzung einer endlichen Anzahl von Schnittpunkten der betrachteten Curven $f_1 =$ const. und $f_2 =$ const.

§ 5.

Die Umkehrung eines Systems von beliebig vielen Functionen reeller Argumente.*)

Den Uebergang von den bisher durchgeführten Betrachtungen zu analogen auf Systeme beliebig vieler Functionen bezüglichen kann man nach der Methode der vollständigen Induction bewerkstelligen. Zu diesem Zwecke stellen wir zunächst die zu beweisende Verallgemeinerung des in § 2 erhaltenen Resultats auf, und nehmen dieselbe als bewiesen an, wenn man n durch $n-1$ ersetzt.

Die n Functionen

$$f_\nu(x_1, x_2, \dots x_n, t_1, t_2, \dots t_r) \quad \nu = 1, 2, \dots n$$

mögen in der Umgebung eines speciellen Werthsystems

$$(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_r)$$

der Variabeln nach diesen Differentiale besitzen, und es sei in dem genannten Gebiete jede der n Grössen

$$(23) \qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_\nu} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_\nu} \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{\partial f_\nu}{\partial x_1} & \frac{\partial f_\nu}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_\nu}{\partial x_\nu} \end{vmatrix} \qquad (\nu = 1, 2, \dots n)$$

constanten Vorzeichens und von Null verschieden, oder wenigstens finde dies statt, nachdem man die Variabeln $x_1, x_2, \dots x_n$ einer passenden linearen Transformation unterworfen hat; ferner setze man

$$\eta_\nu = f_\nu(\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n, \tau_1, \tau_2, \dots \tau_n).$$

Alsdann giebt es eindeutige Functionen

$$\text{(A)} \qquad x_\nu = \psi_\nu(y_1, y_2, \dots y_n, t_1, t_2, \dots t_r) \quad (\nu = 1, 2, \dots n)$$

für welche die Gleichungen

$$\text{(B)} \qquad y_\nu = f_\nu(x_1, x_2, \dots x_n, t_1, t_2, \dots t_r)$$

bestehen mit folgenden näheren Bestimmungen. Man kann für die drei Grössensysteme $(x_1, x_2, \dots x_n)$, $(t_1, t_2, \dots t_r)$, $(y_1, y_2, \dots y_n)$ die Gebiete (ξ), (τ), (η), deren Innerem beziehentlich die Werthsysteme $(\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n)$, $(\tau_1, \tau_2, \dots \tau_r)$, $(\eta_1, \eta_2, \dots \eta_n)$ angehören, derartig abgrenzen, dass die Functionen $\psi_\nu(y_1, y_2, \dots y_n, t_1, \dots t_r)$ existiren und nach allen $n + r$ Argumenten Differentiale besitzen, sobald die

---

*) Wie ich nachträglich sehe, ist das hier benutzte Jacobi'sche Verfahren schon von Peano zum Nachweis der Existenz der impliciten Functionen angewandt worden in dem Werke: Lezioni di analisi infinitesimale t. II, p. 162 (Turin 1893); indessen sind die Voraussetzungen bei Peano etwas weniger allgemein. [Juli 1894.]

Grössen y dem Gebiet (η) und die Parameter t dem Gebiet (τ) angehören; für alle diese Werthsysteme geben die Gleichungen (A) die einzigen der Gleichung (B) genügenden Werthsysteme x, welche dem Gebiet (ξ) angehören. Dabei nehmen die Functionen ψ_ν, wenn man die Grössen t im Gebiet (τ) beliebig fixirt, alle Werthsysteme an, für welche die Differenzen $|\psi_\nu - \xi_\nu|$ gewisse von den Grössen t unabhängige positive Constanten nicht überschreiten.

Zum Beweis dieses Theorems gehen wir aus von der Gleichung

$$F(x_1, x_2, \dots x_n, y_1, t_1, t_2, \dots t_r)$$
$$= y_1 - f_1(x_1, x_2, \dots x_n, t_1, \dots t_r) = 0,$$

durch welche wir uns definirt denken

$$x_1 = \varphi(x_2, x_3, \dots x_n, y_1, t_1, t_2, \dots t_r). \tag{24}$$

Da die Function F offenbar in der Umgebung des Werthsystems $(\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n, \eta_1, \tau_1, \dots \tau_r)$ ein Differential nach allen $n+r+1$ Argumenten besitzt, da ferner in dieser Umgebung die Grössen $\frac{\partial F}{\partial y_1}$ und $\frac{\partial F}{\partial x_1}$ constanten Zeichens sind, und die Gleichung

$$F(\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n, \eta_1, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_r) = 0$$

besteht, so ist der Satz des § 1 anwendbar; die Function φ existirt und besitzt nach allen ihren Argumenten ein Differential, sobald die Differenzen

$$|x_2 - \xi_2|, \ |x_3 - \xi_3|, \dots |x_n - \xi_n|, \ |y_1 - \eta_1|, \ |t_1 - \tau_1|,$$
$$|t_2 - \tau_2|, \dots |t_r - \tau_r|$$

gewisse positive Werthe nicht überschreiten, und sie nimmt alle Werthe an, die von ξ_1 hinreichend wenig verschieden sind. Daraus folgt, dass wenn man den Werth (24) für x_1 einsetzt in die Ausdrücke $f_2, f_3, \dots f_n$, und setzt

$$y_\nu = f_\nu(\varphi, x_2, x_3, \dots x_n, t_1, t_2, \dots t_r), \quad \nu = 1, 3, \dots n \tag{25}$$

diese Grössen als Functionen der unabhängigen Variabeln

$$y_1, x_2, x_3, \dots x_n, t_1, t_2, \dots, t_r$$

Differentiale besitzen für alle Werthe der Variabeln, welche resp. von den Werthen

$$\eta_1, \xi_2, \xi_3, \dots \xi_n, \tau_1, \tau_2, \dots \tau_r$$

hinreichend wenig verschieden sind, sodass die gewöhnliche Regel der Differentialrechnung zur Bildung der ersten Ableitungen zusammengesetzter Functionen angewandt werden kann. Differentirt man also die Gleichungen (25), indem man $y_1, t_1, t_2, \dots t_r$ ungeändert lässt, so ergiebt sich

$$\frac{\partial y_\nu}{\partial x_\varrho} = \frac{\partial f_\nu}{\partial x_1}\frac{\partial \varphi}{\partial x_\varrho} + \frac{\partial f_\nu}{\partial x_\varrho}, \quad (\nu, \varrho = 2, 3, \dots n),$$

indem man rechts nach Ausführung der Differentiation die Substitution (24) macht. Hieraus folgt

$$
(26)\qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial y_2}{\partial x_2}, & \frac{\partial y_2}{\partial x_3}, & \dots & \frac{\partial y_2}{\partial x_\nu} \\ \frac{\partial y_3}{\partial x_2}, & \frac{\partial y_3}{\partial x_3}, & \dots & \frac{\partial y_3}{\partial x_\nu} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial y_\nu}{\partial x_2}, & \frac{\partial y_\nu}{\partial x_3}, & \dots & \frac{\partial y_\nu}{\partial x_\nu} \end{vmatrix}
$$

$$
= \frac{1}{\frac{\partial f_1}{\partial x_1}} \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & 0 & \dots & 0 \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_1}\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_1}\frac{\partial \varphi}{\partial x_\nu} + \frac{\partial f_2}{\partial x_\nu} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_\nu}{\partial x_1} & \frac{\partial f_\nu}{\partial x_1}\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + \frac{\partial f_\nu}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_\nu}{\partial x_1}\frac{\partial \varphi}{\partial x_\nu} + \frac{\partial f_\nu}{\partial x_\nu} \end{vmatrix}.
$$

Bedenkt man weiter, dass zufolge der Definition der Function φ nach § 1 die Gleichungen

$$
-\frac{\partial \varphi}{\partial x_\varrho}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = \frac{\partial f_1}{\partial x_\varrho} \qquad (\varrho = 2, 3, \dots n)
$$

bestehen, so ergiebt sich für die letzte Determinante indem man die erste Colonne mit $\frac{\partial \varphi}{\partial x_\varrho}$ multiplicirt von der ϱ^{ten} subtrahirt, der Werth

$$
\frac{1}{\frac{\partial f_1}{\partial x_1}} \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_\nu} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_\nu} \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial f_\nu}{\partial x_1} & \frac{\partial f_\nu}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_\nu}{\partial x_\nu} \end{vmatrix},
$$

also eine Grösse, die nach Voraussetzung constanten Zeichens und von Null verschieden ist, sobald die Grössen x und t von den gleichbezifferten ξ und τ hinreichend wenig verschieden sind. Da nun die Function φ innerhalb der oben angegebenen Grenzen stetig ist und

$$
\varphi(\xi_2, \xi_3, \dots \xi_n, \eta_1, \tau_1, \tau_2, \dots \tau_n) = \xi_1,
$$

so kann man auch sagen: Die Grösse (26) ist von Null verschieden und constanten Zeichens, sobald die Differenzen

$$
|y_1 - \eta_1|, |x_2 - \xi_2|, \dots |x_n - \xi_n|, |t_1 - \tau_1|, \dots |t_r - \tau_r|
$$

gewisse positive Werthe nicht übersteigen. Die durch die Gleichungen (25) definirten $n - 1$ Grössen y_ν genügen also, als Functionen von $x_2, x_3, \dots x_n$ mit den Parametern $y_1, t_1, t_2, \dots t_r$ betrachtet, den für das System der n Functionen f_ν eingeführten Voraussetzungen in

dem allgemeinen zu beweisenden Theorem, das wir für $n-1$ Functionen als bewiesen betrachten.

Man kann demnach eindeutige Functionen $\varphi_2, \varphi_3, \dots \varphi_n$ derartig bestimmt denken, dass die Gleichungen (25) erfüllt werden, wenn man setzt

(27) $$x_\nu = \varphi_\nu(y_2, y_3, \dots y_n, y_1, t_1, t_2, \dots t_r),$$

dass diese Functionen Differentiale besitzen für alle Werthe ihrer Argumente, die von den gleichbezifferten Grössen η resp. τ hinreichend wenig abweichen; für jedes dieser Argumentsysteme liefern die Gleichungen (27) das einzige den Gleichungen (25) genügende Werthsystem $(x_2, x_3, \dots x_n)$, wenn man jede dieser Grössen auf ein gewisses den gleichbezifferten Werth ξ umfassendes Intervall beschränkt. Fixirt man die Parameter t und y_1 innerhalb des ihnen angewiesenen Gebiets, so nimmt jede dieser Grössen x_ν noch alle Werthe eines gewissen die Grösse ξ_ν umfassenden Intervalls an, welches von der speciellen Wahl der Parameterwerthe unabhängig ist, also auch fest bleibt wenn man die Grösse t festhält, y_1 aber variiren lässt. Setzt man nun die Werthe (27) in die Gleichung (24) ein, so ergiebt sich

(28) $$x_1 = \varphi_1(y_2, y_3, \dots, y_n, y_1, t_1, t_2, \dots t_r),$$

wobei die Function φ_1 für dieselben Argumentwerthe wie $\varphi_2, \varphi_3, \dots \varphi_n$ ein Differential besitzt. Hält man die Grössen t fest, so durchläuft auch die Grösse x_1, analog dem Verhalten der Grössen (27), ein den Werth ξ_1 umfassendes Intervall, welches von der speciellen Wahl der Parameter t unabhängig ist; ferner erfüllen die Functionen φ_ν, für x_ν gesetzt die Gleichungen

$$y_\nu = f_\nu(x_1, x_2, \dots, x_n, t_1, t_2, \dots t_r)$$

für die angegebenen Werthe der Variabeln y und t; die Umkehrung dieses Gleichungs- oder Functionensystems ist also vollständig geleistet. Dass dieselbe eindeutig bestimmt ist, folgt daraus, dass bei hinreichender Beschränkung der Variabeln für jedes den Gleichungen (A) genügende Werthsystem die Gleichungen (24) und (25) bestehen.

Die Reduction der n Functionen auf $n-1$ und der Functionaldeterminante (26) auf die Form (23) ist von Jacobi*) mehrfach benutzt worden; hier kam es vor Allem darauf an, die Ausführbarkeit dieser Operationen für reelle Werthe der auftretenden Variabeln zu untersuchen. —

Dorpat, Mai 1894.

*) Jacobi, Vorlesungen über Dynamik, Vorl. XII, S. 95.

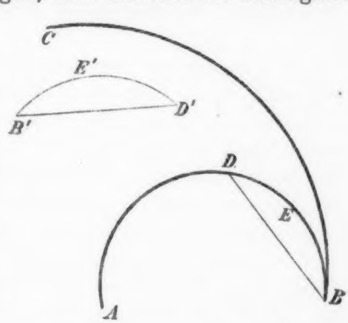
Zum Beweis des Hauptsatzes über die Endlichgleichheit zweier ebener Systeme.

Von

Moritz Réthy in Budapest.

Ich habe in einer Arbeit über *„endlich-gleiche Flächen“* den Satz aufgestellt*): „Zur endlichen Gleichheit zweier flächengleicher ebener Systeme ist es nothwendig und hinreichend, dass die krummlinigen Bögen ihrer Begrenzungen endlichgleich und die Krümmungen congruenter Stücke (relativ zum Innern der Fläche) von gleichem Sinne seien, — von Stücken der Begrenzungen abgesehen, die auf demselben System eben so oft vorkommen mit positivem als mit negativem Krümmungssinn.“ Bei dem Beweise dieses Satzes sind, wie Herr Dr. E. Kötter bemerkt**), stillschweigend Systeme vorausgesetzt, deren Begrenzungen keine Selbstberührungen — zwischen Bögen von entgegengesetztem Krümmungssinn — aufweisen.

Es sei mir gestattet, hinzuzufügen, dass hiedurch die Richtigkeit des Satzes nicht in Frage gestellt ist, da — in Folge der im ersten Satze meiner Arbeit ausgesprochenen Beschränkung — ein beliebiges ebenes System durch Verschiebung gewisser Theile nach einer endlichen Anzahl von Schnitten in ein solches von der vorausgesetzten Eigenschaft transformirt werden kann; am einfachsten, wie folgt:



Es sei ABC ein Theil der Begrenzung des ebenen Systems S, wobei B ein singulärer Punkt von der fraglichen speciellen Art ist. Man zeichne die, ausserhalb S gelegene, Sehne BD, und construire im *Innern* von S eine Fläche $B'E'D' \underset{=}{\backsim} BED$, was bei der un-

*) Berichte der ung. Akad. der Wiss. 1890, Math. Ann. Bd. 38, p. 410–412.

**) Jahrbuch über die Fortschritte der Math. Bd. 23, p. 533.

beschränkten Kleinheit der Sehne BD immer möglich ist. Schneidet man sodann das Stück $B'E'D'$ heraus und überführt es in BED, so erscheint das System S transformirt in ein System S_1, welches um Eins weniger Selbstberührungspunkte an der Grenze enthält.

„Unsere Untersuchungen beziehen sich aber auf ebene Flächen, deren Grenzlinien in zwei verschiedenen Lagen eine endliche Anzahl von Schnittpunkten darbieten.“ Daher ist die Anzahl der singulären Punkte eine endliche, und man kommt bei Anwendung der beschriebenen Construction nach einer endlichen Anzahl von Schritten vom gegebenen System S aus auf ein System S_n, welches an seinen Grenzen keine Selbstberührungen zwischen Bögen von entgegengesetztem Krümmungssinn enthält.

Die Stetigkeit der automorphen Functionen bei stetiger Abänderung des Fundamentalbereichs.

Von

Ernst Ritter in Göttingen.

Theil I.

Symmetrische Fundamentalbereiche.

Einleitung.

Im Verfolg meiner Untersuchungen über automorphe Functionen komme ich zu einer Frage, welche besonders beim Beweise des sog. Fundamentaltheorems wichtig ist; der von Herrn Klein herrührende (Math. Ann. Bd. XXI. 1882) und von Herrn Poincaré in Acta math. IV in verschärfter Form wiedergegebene Continuitätsbeweis dieses Theorems stützt sich nämlich darauf, *dass bei stetiger Aenderung des Fundamentalbereichs auch die zugehörigen automorphen Functionen sich stetig ändern.*

Dieser Hülfssatz ist natürlich leicht analytisch zu beweisen, wenn man eine explicite Darstellung der Functionen kennt, wie sie Poincaré in der That für die eindeutigen Functionen geliefert hat. Aber es ist wünschenswerth, denselben Satz auch aus dem blossen Begriff der automorphen Functionen, *aus ihrer geometrischen Definition heraus mit denselben Principien zu beweisen, vermittelst deren man überhaupt die Existenz der Functionen erschliesst.* Es ist das um so nothwendiger, als Poincaré's Beweis versagt, wenn seine Reihenentwicklungen versagen, d. h. immer, wenn man es nicht mit *eindeutigen* automorphen Functionen zu thun hat. Der allgemeine geometrische Beweis ist dagegen von einer solchen Einschränkung ganz unabhängig, ja er lässt sich überhaupt nur so führen, dass man auch solche Abänderungen des Bereichs zulässt, bei denen die Functionen nicht eindeutig bleiben.

In dieser Allgemeinheit umfasst der Begriff des automorphen Fundamentalbereichs insbesondere auch den Fall der *gewöhnlichen Riemann'schen Fläche,* so dass man als Corollar des allgemeinen Stetig-

keitssatzes den Satz erhält, *dass bei stetiger Abänderung der Riemann'schen Fläche die Gesammtheit der zugehörigen algebraischen Functionen sich stetig ändert.*

Bei diesem Stetigkeitsbeweise kommt es mir aber nicht nur darauf an, zu zeigen, dass überhaupt einer verschwindend kleinen Aenderung des Bereichs eine verschwindende Aenderung jeder zugehörigen Function entspricht, sondern ich werde besonderen Werth darauf legen, geradezu *eine obere Grenze für die Aenderung der Function abzuschätzen*, oder doch wenigstens die Möglichkeit einer solchen expliciten Abschätzung in jedem gegebenen Falle darzuthun.

In dem vorliegenden ersten Theil meiner Arbeit werde ich dieses Programm zunächst für solche Fundamentalbereiche durchführen, welche durch eine Symmetrielinie in zwei *von Kreisbogenstücken begrenzte in ihrem Innern unverzweigte Halbbereiche* zerfallen, deren Substitutionsgruppe also aus blossen Spiegelungen an Kreisbogen erzeugt werden kann.

Bei diesen Bereichen kommt man deswegen mit einfacheren Mitteln zum Ziele und kann den Resultaten eine schärfere Bestimmtheit geben, als bei den allgemeinsten Bereichen, weil es bei ihnen symmetrische Functionen giebt, d. h. solche Functionen, deren reeller (oder imaginärer) Theil längs der Begrenzung des Halbbereichs verschwindet. Dass trotz dieser Beschränkung meine Arbeit eine so unverhältnissmässige Ausdehnung gewonnen hat, hätte ich nur so vermeiden können, dass ich die Herleitung meiner expliciten Abschätzungsvorschriften unterdrückte, wozu ich mich aber deswegen nicht entschliessen konnte, weil gerade diese Betrachtungen und die bei ihnen entwickelten Hülfssätze einerseits zum Theil eine über den augenblicklichen Zweck hinausgehende allgemeinere Bedeutung haben, andererseits sich mit geringen Modificationen auf den Fall der nichtsymmetrischen Fundamentalbereiche übertragen, so dass mir die grosse Ausführlichkeit im ersten Theile meiner Arbeit bedeutende Erleichterung für den zweiten Theil, den Stetigkeitsbeweis im allgemeinen unsymmetrischen Fall, verschaffen wird.

§ 1.

Die Functionen eines symmetrischen Fundamentalbereichs.

Es sei in der Ebene einer Variablen ζ ein einfach oder mehrfach zusammenhängender Bereich S gegeben, welcher durch eine endliche Anzahl von Kreisbogenstücken vollständig begrenzt ist und in seinem Innern keine Windungspunkte enthält. Die Grösse der Winkel in den Ecken soll dagegen keiner Beschränkung unterliegen, so dass sie sich beliebig oft herumwinden dürfen; nur unendlich grosse Winkel sollen ausgeschlossen sein, während rein imaginäre Winkel, d. h. un-

endlich oft zwischen zwei Kreisen sich herumwindende Bänder statt eigentlicher Ecken (cf. Schilling, Beiträge zur geometrischen Theorie der Schwarz'schen s-Function. Math. Ann. Bd. 44. 1894) zugelassen sein sollen.

Ich ergänze nun das beschriebene Kreisbogenpolygon durch sein Spiegelbild an einem der begrenzenden Kreisbogen zum „*automorphen Fundamentalbereich*". Derselbe definirt eine gewisse Gesammtheit „*automorpher Functionen*", welche sich bekanntlich alle durch irgend zwei derselben, x, y, rational ausdrücken. Andererseits kann man die automorphen Functionen des Bereichs auch durch solche Functionen ausdrücken, welche sich bei den Substitutionen der zum Bereich gehörigen Gruppe nicht reproduciren, sondern um Constanten additiv ändern, und welche ich wegen ihrer Verwandtschaft mit den Abel'schen Integralen auf einem algebraischen Gebilde „*automorphe Integrale*" nenne. Sie zerfallen, wie die Abel'schen Integrale in solche erster, zweiter und dritter Gattung und sie lassen sich sämmtlich durch Differentiation und durch Summirung bezw. Integration aus den einfachsten Integralen dritter Gattung, denjenigen mit nur zwei logarithmischen Unstetigkeitspunkten herstellen.

Eine ausgezeichnete Rolle spielen bei unserem durch Spiegelung eines Kreisbogenpolygons entstandenen Fundamentalbereiche die „*symmetrischen automorphen Functionen und Integrale*", womit ich diejenigen Functionen und Integrale bezeichnen will, deren reeller Theil längs der ganzen Begrenzung des Polygons S verschwindet.

Die allgemeine Lehre von den Functionen und Integralen, den symmetrischen wie den nichtsymmetrischen, welche zu einem solchen in der ζ-Ebene ausgebreiteten mehrfach zusammenhängenden Halbbereich gehören, wie unser Polygon S einer ist, findet man in der Abhandlung von Schottky: Ueber die conforme Abbildung mehrfach zusammenhängender ebener Flächen. (Crelle's Journ. Bd. 83. 1877) entwickelt. Ich bemerke dazu nur, dass die Beschränkung auf schlichte Flächenstücke, an der Herr Schottky festhält, ganz unwesentlich ist, und dass, wenn man diese Beschränkung aufgiebt, das Geschlecht eines von n Randcurven begrenzten Bereichs nicht nothwendig $n-1$ zu sein braucht, sondern auch um eine beliebige gerade Zahl grösser sein kann.

Ich will hier nur die wichtigsten Sätze über symmetrische Integrale und Functionen des Bereichs zusammenstellen, welche ich im Folgenden gebrauchen werde:

1) Nach den Methoden von Schwarz beweist man die Existenz der „*Green'schen Function*" G_ξ^ζ des Bereichs S, d. h. eines logarithmischen Potentials, welches längs des Randes von S verschwindet,

an der einzigen Stelle ξ im Innern des Bereichs unstetig ist wie $\Re\left(\log\frac{1}{\zeta-\xi}\right)$, und welches sonst im ganzen Bereich holomorph ist.

2) Aus der Green'schen Function bildet man durch eine blosse Quadratur die conjugirte Potentialfunction H_ξ^ζ.

Dann ist

$$P_\xi^\zeta = G_\xi^\zeta + i H_\xi^\zeta$$

das „*symmetrische Integral* 3. *Gattung*". Dasselbe enthält noch eine willkürliche rein imaginäre Constante, ist aber sonst wohlbestimmt. Die Perioden von P_ξ^ζ sind rein imaginär. P_ξ^ζ ist eine analytische Function des complexen Argumentes ζ, nicht aber auch eine solche von ξ, sondern nur eine Function des reellen und des imaginären Theils von $\xi = \xi' + i\xi''$.

3) Das allgemeinste „*symmetrische Integral zweiter Gattung*", mit nur einer Unstetigkeitsstelle erster Ordnung im Polygon hat die Gestalt

$$Y_\xi^\zeta = a\cdot\frac{\partial P_\xi^\zeta}{\partial\xi'} + b\,\frac{\partial P_\xi^\zeta}{\partial\xi''}\cdot$$

4) *Symmetrische Integrale erster Gattung giebt es nicht.* Um auch solche zu ermöglichen, muss man, was aber für mich keinen Zweck hat, den Begriff der Symmetrie so erweitern, dass man auch Functionen symmetrisch nennt, deren reeller Theil auf jeder Randcurve constant ist.

5) Die allgemeinste *symmetrische automorphe Function* setzt sich aus symmetrischen Integralen zweiter Gattung linear mit constanten Coefficienten zusammen; z. B. wenn sie nur einfache Unendlichkeitsstellen $\xi_1, \xi_2, \dots \xi_m$ mit den Coefficienten $a_1 + ib_1$, $a_2 + ib_2, \dots$ .. $a_m + ib_m$ im Polygon besitzt, hat sie folgende Gestalt:

$$F(\zeta) = ib_0 + \sum_{\nu=1}^{\nu=m}\left(a_\nu\cdot\frac{\partial P_{\xi_\nu}^\zeta}{\partial\xi_\nu'} + b_\nu\,\frac{\partial P_{\xi_\nu}^\zeta}{\partial\xi_\nu''}\right)\cdot$$

Umgekehrt ist jede derartige Summe eine symmetrische automorphe Function, wenn die a_ν, b_ν folgenden $2p$ linearen homogenen Gleichungen genügen:

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=m}\left(a_\nu\,\frac{\partial A_\varkappa(\xi_\nu)}{\partial\xi_\nu'} + b_\nu\cdot\frac{\partial A_\varkappa(\xi_\nu)}{\partial\xi_\nu''}\right) = 0,\quad (\varkappa = 1, 2, \dots 2p),$$

worin $A_1(\xi)$, $A_2(\xi)$ ... $A_m(\xi)$ die $2p$ linear unabhängigen Perioden des Integrals 3. Gattung P_ξ^ζ vorstellen.

6) Man kann auf diese Weise *zwei symmetrische automorphe Functionen* x, y bilden, *durch welche sich alle übrigen automorphen Func-*

tionen als rationale Functionen ausdrücken, und zwar die symmetrischen Functionen als rationale Functionen mit reellen Coefficienten, die unsymmetrischen als solche mit complexen Coefficienten.

§ 2.

Frage der Stetigkeit bei Abänderung des Fundamentalbereichs.

Nachdem die Existenz der automorphen Functionen zu irgend einem vorgegebenen Fundamentalbereiche feststeht, wird man zwei Stufen der functionentheoretischen Fragestellung zu unterscheiden haben: Zuerst nämlich wird man nach den *Beziehungen der Functionen eines bestimmten Fundamentalbereichs untereinander* fragen; in dieser Richtung bewegen sich die Untersuchungen, welche Herr Poincaré in Acta math. I und III an seine Reihendarstellungen anknüpft, sowie meine eignen Arbeiten in Math. Ann. Bd. 41 und 44. Weitergehend aber wird man die automorphen *Functionen verschiedener Fundamentalbereiche* mit einander vergleichen wollen. Man wird sie also in ihrer Abhängigkeit von der Gestalt des Fundamentalbereichs betrachten müssen, um so eine Theorie zu gewinnen, welche sich zur gewöhnlichen Theorie der automorphen Functionen ebenso verhält, wie die Theorie der elliptischen Modulfunctionen zur gewöhnlichen Theorie der elliptischen Functionen.

Dabei wird die erste Frage sein, *ob sich das zu einem Fundamentalbereich gehörige System automorpher Functionen bei stetiger Abänderung des Fundamentalbereichs stetig ändert?*

Um diese Frage zu beantworten, muss ich zuerst genau präcisiren, *was ich unter stetiger Abänderung einerseits des Fundamentalbereichs, andererseits des zugehörigen Functionssystems verstehe.*

Ich will von zwei Kreisbogenpolygonen sagen, dass sie sich um eine beliebig kleine Grösse ε unterscheiden, wenn kein Randpunkt des einen Bereichs von dem nächsten Randpunkt des zweiten Bereichs weiter als um die Strecke ε entfernt ist und umgekehrt. Bewegt man einen Kreis vom Radius ε mit einem Mittelpunkte längs des Randes eines der beiden Bereiche, so soll also die Begrenzung des andern Bereichs immer ganz innerhalb des Streifens liegen, welcher von dem kleinen Kreise überstrichen wird. Am rationellsten wäre es, die Entfernung ε auf einer Kugel zu messen, auf die man die ζ-Ebene stereographisch projiciren müsste, um so die Ausnahmestellung des unendlichfernen Punktes auf der ζ-Ebene zu beseitigen. Da aber ein solches Messen mit grossen Umständlichkeiten in den Formeln verbunden wäre, so will ich den Unterschied der beiden Begrenzungen lieber in der ζ-Ebene messen, indem ich mir nur eventuell eine solche lineare Transformation

des Polygons vorbehalte, dass alle Punkte der Begrenzung im Endlichen liegen.

Ferner sage ich von einer Function, dass sie unendlich klein von der Ordnung η ist, wenn sie in jedem in angebbarer endlicher Entfernung von jedem singulären Punkte gelegenen Punkte bei hinreichend kleinem η immer ihrem absoluten Werthe nach unter einer angebbaren Grenze ηg bleibt, wobei g eine von η unabhängige endliche angebbare Grösse bedeutet; mit andern Worten, wenn die Function durch η dividirt bei verschwindendem η dem absoluten Werthe nach unterhalb einer angebbaren endlichen von η unabhängigen Function bleibt. Und von zwei Functionssystemen sage ich, dass sie nur um eine kleine Grösse η verschieden sind, wenn es zu jeder Function Z des einen Systems eine Function Z' des andern Systems giebt, derart, dass die Differenz $Z - Z'$ unendlich klein von der Ordnung η ist.

Und nun heisst unsere Behauptung bezüglich der automorphen Functionen:

Sind zwei Kreisbogenpolygone nur um eine beliebig klein zu machende Grösse ε verschieden, so sind auch die zugehörigen Systeme automorpher Functionen und Integrale nur um eine mit ε stetig verschwindende Grösse η verschieden.

Diese Behauptung bleibt auch richtig, wenn man sich in der Aussage nur auf das System der automorphen Functionen eines jeden der beiden Bereiche beschränkt und die automorphen Integrale nicht mit hereinzieht. Für den Beweis jedoch wird es bequem sein, zuerst den Satz gerade für die Integrale zu beweisen, weil diese einen functionentheoretisch viel einfacheren Charakter besitzen.

Und zwar werde ich mit meinem Beweise der Reihe nach folgende Schritte ausführen: Ich beweise nämlich:

<table>
<tr><td>1) dass die Green'schen Functionen G_ξ^ζ
2) dass die conjugirten Potentiale H_ξ^ζ und folglich die symmetrischen Integrale 3. Gattung P_ξ^ζ
3) dass die symmetrischen Integrale 2. Gattung Y_ξ^ζ</td><td>der beiden Bereiche nur um Grössen η verschieden sind, die mit ε stetig verschwinden,</td></tr>
</table>

4) dass in *symmetrischen automorphen Functionen* mit denselben im Polygon gelegenen Unendlichkeitsstellen die willkürlichen Constanten so bestimmt werden können, dass die beiden Functionen nur unendlich wenig verschieden sind,

5) dass man zu *jeder beliebigen automorphen Function* des einen Bereichs eine ebenfalls automorphe Function des andern Bereichs finden kann, welche von der ersteren nur unendlich wenig verschieden ist,

6) dass man zu jeder zwischen zwei automorphen Functionen des einen Bereichs bestehenden *algebraischen Gleichung* eine von ihr nur unendlich wenig verschiedene zu entsprechenden Functionen des andern Bereichs gehörige algebraische Gleichung finden kann,

7) dass entsprechende automorphe Functionen der beiden Bereiche dieselben auf unendlich wenig verschiedene *geschlossene Riemann'sche Flächen* conform abbilden.

§ 3.

Reduction auf den Fall, dass ein Polygon das andere umschliesst.

Denken wir uns die beiden Kreisbogenpolygone, welche sich nur um eine kleine Grösse ε unterscheiden, in passender Weise aufeinandergelegt, so wird sich nach Voraussetzung die Begrenzung keines der beiden Polygone von der Begrenzung des andern Polygons um mehr als ε entfernen. Dabei wird aber im Allgemeinen an den verschiedenen Stellen der Begrenzung bald das erste Polygon über das zweite, bald das zweite über das erste hinausgreifen. Dies würde den unmittelbaren Vergleich der zu den beiden Polygonen gehörigen Green'schen Functionen erschweren; denn es wird nöthig sein, die Green'sche Function des einen Polygons in Bezug auf ihre Werthe längs der Begrenzung des andern Polygons zu untersuchen, und man müsste daher erst genauer darauf eingehen, wie sich die Green'sche Function über die Grenze ihres Bereichs nach aussen fortsetzt. Diese Nothwendigkeit fällt wenigstens fürs Erste fort, wenn der eine Bereich ganz im andern liegt.

Noch eine andere Schwierigkeit stellt sich bei dem Versuche, die beiden Bereiche aufeinanderzulegen, in denjenigen Ecken ein, deren Winkel grösser als 2π ist; dort ist es, falls nicht die beiden Eckpunkte genau aufeinanderpassen, ohne Zerschneidung der Polygone gar nicht möglich, ihre Flächen aufeinanderzulegen. Aber auch diese Schwierigkeit zugleich mit der erstgenannten Unzuträglichkeit vermeide ich durch folgendes Verfahren:

Seien S und S' die beiden Polygone, G und G' die zugehörigen Green'schen Functionen; *dann vergleiche ich diese letzteren nicht unmittelbar mit einander, sondern mit der Green'schen Function* Γ *eines Bereiches* Σ, *der sowohl ganz in* S, *wie ganz in* S' *liegt, und welcher von beiden Bereichen* S *und* S' *nur unendlich wenig verschieden ist.*

Diesen Bereich Σ kann man sich z. B. auf folgende Weise construirt denken: man bewege, wie im vorigen Paragraphen, einen kleinen Kreis vom Radius ε mit seinem Mittelpunkt auf der ganzen Begrenzung des Polygons S hin. Die innere Begrenzung des von diesem Kreise überstrichenen Streifens liegt dann innerhalb sowohl von

S, wie von S', und ist von der Begrenzung eines jeden dieser beiden Polygone um weniger als die mit ε verschwindende Grösse 2ε entfernt; sie besteht ebenfalls aus einer endlichen Anzahl von Kreisbogen und sie umschliesst also einen Bereich Σ, welcher den gestellten Bedingungen genügt.

Wir haben nun das folgende einfachere Problem:

Gegeben ist ein Polygon S und ein Polygon Σ, beide von einer endlichen Anzahl von Kreisbogen begrenzt, und so beschaffen, dass das zweite Polygon Σ ganz innerhalb des Polygons S liegt, und dass sich seine Begrenzungslinie σ nirgend um mehr als ε (welches ich jetzt statt 2ε schreibe) *von der Begrenzung s des Polygons S entfernt. Es ist zu beweisen, dass die zu den beiden Polygonen gehörigen Green'schen Functionen G und Γ bei gleicher Lage des Unstetigkeitspunktes sich nur um eine mit ε stetig verschwindende kleine Grösse η unterscheiden.*

Während wir das Polygon S als fest gegeben ansehen, ist das Polygon Σ als variabel zu denken, so dass mit verschwindendem ε seine ganze Begrenzung gleichmässig stetig in die Begrenzung von S übergeht. Die einzelnen Kreise, welche S begrenzen, besitzen eine von ε unabhängige endliche Länge und Krümmung, so dass ich ε so klein wählen kann, dass es gegenüber den Längen und Krümmungsradien sämmtlicher Begrenzungsstücke von S beliebig klein ist. Die Begrenzung des Polygons Σ dagegen ändert sich stetig mit ε; dieselbe besteht zunächst aus einer gewissen Anzahl von endlichen Kreisbogen, die den Begrenzungsbogen von S entlang laufen, und denen gegenüber ε beliebig klein wird, ausserdem aber eventuell noch aus einer endlichen Anzahl von Kreisbogen, deren Längen und Krümmungsradien mit ε unendlich klein werden, und welche denjenigen Ecken von S entsprechen, deren Winkel grösser als π sind; so lange jedoch ε nicht wirklich verschwindet, sondern noch eine endliche, wenn auch noch so kleine Grösse ist, sind auch die Längen und Krümmungsradien dieser Kreisbogen noch endlich, wenn auch sehr klein. So lange also ε nicht wirklich verschwindet, existirt zu dem Polygon Σ immer gewiss noch eine Green'sche Function Γ, und dass diese für $\lim \varepsilon = 0$ stetig in die Green'sche Function G des Polygons S übergeht, dies soll eben bewiesen werden.

§ 4.

Beweis für den stetigen Uebergang von Γ in G bei verschwindendem ε.

In jedem Stadium der Annäherung der Begrenzung σ von Σ an die Begrenzung s von S existirt eine Green'sche Function G des Polygons S und eine Green'sche Function Γ des Polygons Σ. Innerhalb und auf der Grenze von Σ sind beide Functionen gleichzeitig definirt, folglich auch ihre Differenz $G - \Gamma$.

Während G und Γ an der Stelle ξ des Polygons Σ unstetig werden wie $\log \frac{1}{r}$, ist die Differenz $G - \Gamma$ eine im ganzen Innern von Σ holomorphe Potentialfunction. Längs σ verschwindet Γ nach seiner Definition, während G erst längs s verschwindet und längs σ nur positive und höchstens längs der etwaigen gemeinsamen Theile von s und σ verschwindende Werthe besitzt; folglich besitzt auch $G - \Gamma$ längs σ nur positive oder höchstens längs einzelner Stücke verschwindende Werthe, nämlich dieselben wie G, und ist daher im Innern des Gebietes Σ überall positiv und kleiner als der grösste Werth von G längs σ.

Wenn wir nun nachweisen können, dass die Green'sche Function G, welche längs s verschwindet, innerhalb eines Streifens von der Breite ε längs der Innenseite von s unterhalb einer mit ε stetig verschwindenden oberen Grenze η bleibt, so muss sie auch längs des ganz in diesem Streifen liegenden Curvenzugs σ kleiner als η sein, und es muss $G - \Gamma$ innerhalb von Σ unterhalb der mit ε stetig verschwindenden oberen Grenze η liegen.

Dem Beweis für die Existenz einer solchen oberen Grenze η ist dieser Paragraph gewidmet, während ich in den weiteren Paragraphen zeigen will, wie man eine solche obere Grenze wirklich geometrisch angeben kann.

Man denke sich in dem Kreisbogenpolygon S die Niveaucurven $G = \alpha$ für alle positiven Werthe von α construirt. Dieselben werden das ganze Innere von S erfüllen, und zwar so, dass sich nirgends zwei Curven überschneiden oder auch nur berühren, und dass sich die Curven für $\lim \alpha = +\infty$ unendlich dicht um den Punkt ξ drängen und für $\lim \alpha = +0$ sich längs ihrer ganzen Erstreckung unendlich nahe an den Rand s anschmiegen.

Aus der in der Definition von G liegenden Eigenschaft, im ganzen Innern von S mit Ausnahme des Punktes ξ holomorph zu sein und bei Annäherung an den Rand gleichmässig stetig in den Werth 0 überzugehen, ergeben sich folgende Eigenschaften des Systems von Niveaucurven im Innern und in der Nähe der Begrenzung von S:

Die Entfernung zweier verschiedenen Niveaucurven $G = \alpha$ und $G = \alpha'$ kann nirgends wirklich verschwinden, als indem genau $\alpha = \alpha'$ wird, denn sonst würde G an den betreffenden Stellen nicht eindeutig und stetig sein. Andererseits können die beiden Curven für $\lim \alpha = \alpha'$ nirgends in endlicher Entfernung von einander bleiben, da sie sonst zusammen ein Gebiet in S umschliessen würden, in welchem G constant $= \alpha$ wäre, was unmöglich ist. Ferner kann eine Curve $G = \alpha$ den Rand nicht anders wirklich berühren, als indem genau $\alpha = 0$ ist, da sonst G an der betreffenden Stelle beim Zuschreiten auf den Rand

nicht gegen 0, sondern gegen α convergiren würde; auch kann die Curve $G = \alpha$ für $\lim \alpha = 0$ nirgends in endlicher Entfernung vom Rande bleiben, da sie sonst mit dem Rande zusammen ein in S gelegenes Flächenstück begrenzen würde, in welchem G constant $= 0$ wäre. Die Entfernung der Curve $G = \alpha$ vom Rande s muss daher für $\lim \alpha = 0$ stetig und gleichmässig längs des ganzen Randes gegen 0 convergiren.

Nun achten wir auf alle diejenigen Niveaucurven, welche mit der von s umschlossenen Curve σ einen oder mehrere Punkte gemeinsam haben. Unter allen diesen Niveaucurven wird es eine innerste Curve C geben, welche dem grössten Werthe entspricht, den G längs σ annimmt. Diese Curve C wird ganz innerhalb von Σ liegen und wird dessen Begrenzung σ in einem oder in mehreren Punkten von innen berühren. Sie besitzt Punkte, welche von s höchstens um ε entfernt sind. Diese Niveaucurve muss nun (wenn man von dem trivialen Falle absieht, dass S und Σ concentrische Kreise und ξ der Mittelpunkt derselben ist) gewiss ganz ausserhalb derjenigen Niveaucurve C' liegen, deren kleinste Enterfnung vom Rande s genau $= \varepsilon$ ist. Der Werth α von G auf C, und also das Maximum von G längs σ muss daher gewiss kleiner sein, als der Werth von G auf der Niveaucurve C'. $G = \eta$ sei der Werth auf dieser letzteren Curve.

Nun wähle ich ε immer kleiner, indem ich es stetig gegen 0 convergiren lasse. Man sieht leicht, dass dabei η immer abnehmen muss. Denn die Curve $G = \eta'$, welche einem Werthe $\varepsilon' < \varepsilon$ entspricht, muss gewiss ausserhalb von $G = \eta$ liegen; denn läge sie innerhalb von $G = \eta$, so gäbe es innerhalb der letzteren Curve, und folglich auch auf ihr Punkte, welche vom Rande eine kleinere Entfernung als ε hätten, und wenn die Curven $G = \eta'$ und $G = \eta$ zusammenfielen, so gäbe es wenigstens auf der Curve $G = \eta$ Punkte, deren Entfernung vom Rande ε', also $< \varepsilon$ wäre. Jede folgende einem kleineren Werthe von ε entsprechende Curve liegt also ausserhalb der vorhergehenden und entspricht einem kleineren Werthe von η. Die Abnahme des η muss ferner mit ε stetig erfolgen. Denn entspräche dem kleinsten Abstande $\varepsilon + 0$ der Werth $G = \eta$ und dem kleinsten Abstande $\varepsilon - 0$ der Werth $G = \eta' < \eta$, so würden die Curven $G = \eta$ und $G = \eta'$ nach den oben ausgesprochenen Sätzen über die Niveaulinien eine überall endliche Entfernung von einander haben. Auf der Curve $G = \eta$ liegt nach Voraussetzung mindestens ein Punkt, welcher von s die Entfernung ε besitzt. Construirt man nun die kürzeste Verbindungslinie dieses Punktes mit s, so muss dieselbe auch die Curve $G = \eta'$ schneiden, und zwar so, dass dieser Schnittpunkt dem Rande um ein endliches Stück näher liegt, als der Ausgangspunkt auf der Curve $G = \eta$. Also gäbe es auf $G = \eta'$ mindestens einen Punkt, welcher eine um ein Endliches kleinere Entfernung vom Rande s besässe, als ε, entgegen der Voraussetzung.

η nimmt also mit ε stetig ab; zugleich muss für $\varepsilon > 0$ auch $\eta > 0$ bleiben, da man sonst zu einer Niveaucurve $G = 0$ käme, welche nicht mit dem Rande zusammenfiele, was, wie oben gezeigt, unmöglich ist. Folglich muss für $\lim \varepsilon = 0$ η stetig gegen eine bestimmte Grenze convergiren, welche ≥ 0 ist. Diese Grenze kann aber nicht > 0 sein, da man sonst für $\lim \varepsilon = 0$ eine Niveaucurve von G bekäme, welche mit dem Rande mindestens einen Punkt gemein hätte, und auf der doch G noch von 0 verschieden wäre, was ebenfalls oben als unmöglich erwiesen ist.

Folglich muss η mit ε stetig gegen 0 convergiren.

Damit ist bewiesen, dass mit abnehmendem ε die Differenz $G - \Gamma$ der beiden Green'schen Functionen in dem ganzen Gebiet Σ einschliesslich des Randes unterhalb der mit ε stetig gegen 0 convergirenden Grenze η liegt, was zu beweisen war.

§ 5.

Zur geometrischen Abschätzung von η: Abschätzung der Green'schen Function für das Innere des Polygons.

Wenn auch die Existenz einer mit ε stetig verschwindenden oberen Grenze η im vorigen Paragraphen mit hinlänglicher Strenge erwiesen sein dürfte, so wird es doch wünschenswerth sein, eine solche obere Grenze η für jedes vorgelegte Kreisbogenpolygon wirklich geometrisch aus den Bestimmungsstücken des Polygons zu construiren, zugleich um einzusehen, in welchem Masse mindestens η mit ε gegen 0 convergirt, ob wie ε selbst, oder wie eine angebbare Potenz oder ein anderer Ausdruck von ε.

Es kommt dies darauf hinaus, die Werthe der Green'schen Function G in der nächsten Nähe des Randes abzuschätzen. Diese Aufgabe erfordert jedoch die vorhergehende Lösung folgender Aufgabe:

Es soll für die Werthe der Green'schen Function G längs irgend einer geschlossenen den Unstetigkeitspunkt ξ umschliessenden und ganz im Innern des Bereichs gelegenen Curve auf geometrischem Wege eine obere Grenze angegeben werden.

Bevor ich dieses Problem für den allgemeinsten möglichen Bereich löse, will ich zunächst einen *specielleren Fall* voranehmen, in welchem man mit einfacheren Hülfsmitteln zum Ziele gelangt, als im allgemeinen Fall.

Der Bereich soll nämlich so beschaffen sein, dass er irgend ein endliches Stück der Ebene unbedeckt lässt, während er sich im übrigen beliebig mehrfach überdecken und Zusammenhang beliebig hoher Ordnung besitzen mag.

Der Einfachheit halber will ich voraussetzen, — was man immer

durch eine projective Transformation $\zeta' = \frac{\alpha\zeta + \beta}{\gamma\zeta + \delta}$ der Ebene erreichen kann —, dass das unbedeckte Stück der Ebene den unendlich fernen Punkt enthält.

Die Function G soll längs des Randes s verschwinden und an der Stelle ξ unstetig werden wie $\log \frac{1}{r}$. Bedeutet ϱ_2 den Radius des kleinsten um ξ als Centrum beschriebenen Kreises, welcher nicht in das Innere von S eintritt, so ist $\log \frac{\varrho_2}{r}$ eine Potentialfunction, welche längs des Randes s nirgends negativ, sondern, wenn man von dem trivialen Fall eines Kreises mit dem Centrum ξ absieht, mindestens längs eines endlichen Stückes positiv, ev. auch in einzelnen Punkten des Randes positiv logarithmisch unendlich ist, und welche an der Stelle ξ, sowie an denjenigen Stellen des Bereichs, die über demselben Punkte der ζ-Ebene, wie ξ, aber in einem andern Blatte liegen, unstetig wird wie $\log \frac{1}{r}$. Die Function $G - \log \frac{\varrho_2}{r}$ ist daher längs des ganzen Randes nirgends positiv, sondern mindestens längs eines endlichen Randstückes negativ, ev. in einzelnen Punkten des Randes negativ logarithmisch unendlich, und ist im Innern an der Stelle ξ holomorph, an den andern mit ξ gleichliegenden Stellen aber negativ logarithmisch unendlich. Folglich ist $G - \log \frac{\varrho_2}{r}$ im ganzen Innern des Gebiets nothwendig negativ, d. h. $G < \log \frac{\varrho_2}{r}$. Da G im Innern nothwendig positiv ist, so haben wir also für jeden Punkt im Innern des Bereichs

$$0 < G < \log \frac{\varrho_2}{r}.$$

Wollen wir nun eine obere Grenze für die Werthe von G längs irgend einer im Innern von S liegenden, den Punkt ξ umschliessenden Curve s_1 bestimmen, so bestimmen wir den Radius r_1 des grössten um ξ als Centrum beschriebenen Kreises, welcher noch ganz innerhalb des von s_1 umschlossenen Gebietes liegt.

Dann ist längs dieses Kreises, und also auch längs der ganz zwischen diesem Kreise und der Begrenzung s des Bereichs liegenden Curve s_1

$$0 < G < \log \frac{\varrho_2}{r_1},$$

und zwar bleibt diese Ungleichung auch richtig, wenn die Curve s_1 sich etwa in einem anderen Blatte näher als bis auf die Entfernung r_1 an den Punkt ξ heranziehen, ja vielleicht gar durch denselben hindurchgehen sollte.

Wenn ich mich jetzt zum allgemeinen Falle eines Bereichs wende, der keinen Theil der Ebene unbedeckt lässt, so versagt das eben eingeschlagene Verfahren, weil die Function $\log \frac{1}{r}$ dann nicht nur positive,

sondern auch nothwendig negative Unendlichkeitsstellen im Bereiche haben würde. Ich könnte allerdings zum Ziele gelangen, indem ich so, wie Poincaré es bei einer Gelegenheit thut*), zum Vergleich die Modulfunction heranzöge; da es aber mein Bestreben ist, möglichst alle Abschätzungen auf die Berechnung rationaler Functionen zurückzuführen, so bleibt uns nichts übrig, als dass wir genau die einzelnen Schritte verfolgen, vermittelst deren man nach dem Schwarz-Neumann'schen Combinationsverfahren die Green'sche Function für einen solchen Bereich construirt.

Dazu brauche ich aber einen gewissen Hülfssatz, der als nothwendige Ergänzung zu Schwarz' alternirendem Verfahren eine allgemeinere Bedeutung besitzt und daher in einem besondern Paragraphen dargestellt werden soll.

§ 6.

Abschätzung des Convergenzexponenten im Schwarz'schen alternirenden Verfahren.

Ich will folgenden Satz beweisen:

Construire ich ein Potential u, welches längs einer ganz im Innern des Bereichs S liegenden geschlossenen Curve s_1 irgendwelche endliche vorgegebene Werthe mit der oberen Grenze M annimmt, welches längs der äusseren Begrenzung s des Bereichs S verschwindet, und welches in dem ganzen zwischen s_1 und s liegenden Gebiete S_1 holomorph ist, so kann ich für jede zwischen s und s_1 gelegene Curve s_2 durch eine endliche Anzahl geometrischer Schritte einen von 0 verschiedenen echten Bruch g angeben, welcher die Bedeutung hat, dass das construirte Potential u längs s_2 unterhalb der oberen Grenze

$$(1-g)\cdot M$$

bleibt.

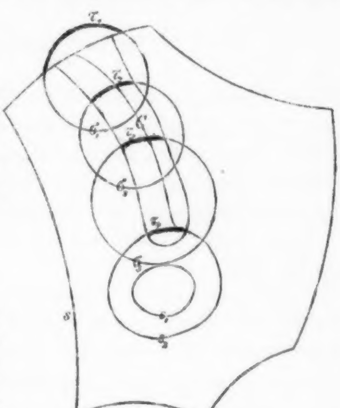


Fig. 1.

Um dies zu beweisen, verbinde ich irgend einen beliebigen Punkt der Contur s_2 mit irgend einem Punkte des Randes s durch eine ganz im Innern des Gebietes S_1 verlaufende Linie C. Diese Linie überdecke ich so mit einer endlichen Anzahl von Kreisscheiben, dass die erste Kreisscheibe mit einem endlichen Stück über den Rand s hinausgreift, dass

*) Bull. de la Soc. math. de France XIII.

jede folgende Kreisscheibe mit der vorhergehenden ein endliches Stück gemein hat und ganz in S_1 liegt, und dass die letzte Kreisscheibe noch um ein endliches Stück über den auf s_2 liegenden Endpunkt der Linie C hinausgreift, ohne doch in das von s_1 abgegrenzte Gebiet einzutreten. Die ganze Curve C liegt dann vollständig innerhalb des von den Kreisscheiben bedeckten Gebiets, und man kann auch noch die Curve C in einen über ihren Endpunkt hinausgreifenden Flächenstreifen T von endlicher Breite einschliessen, dessen Punkte jeder im Innern mindestens einer Kreisscheibe in endlicher angebbarer Entfernung vom Rande derselben liegen.

Die erste Kreisscheibe, diejenige, welche über den Rand s hinausgreift, möge K_1 heissen, dasjenige Stück ihrer Contur, welches ausserhalb des Bereiches S liegt, heisse τ_1, der übrige innerhalb von S liegende Theil der Contur sei σ_1. Die ν^{te} Kreisscheibe, vom Rande aus gerechnet, werde K_ν genannt, das Stück ihrer Contur, welches zugleich in der vorhergehenden Kreisscheibe und in dem Flächenstreifen T liegt, heisse τ_ν, der übrige Theil ihrer Contur σ_ν. Wenn endlich n die Anzahl aller Kreisscheiben ist, so möge $\tau_{n+1} = \tau$ dasjenige Stück der Linie s_2 bedeuten, welches innerhalb des Flächenstreifens T liegt.

Nun sei r_ν der Radius des Kreises K_ν, $2\varphi_\nu$ sei die Winkelöffnung des Bogens τ_ν, und d_ν sei die kleinste Entfernung des Bogens $\tau_{\nu+1}$ vom Rande der Kreisscheibe K_ν. Setze ich dann

$$\gamma_\nu = \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg}\left(\frac{d_\nu}{2r_\nu - d_\nu} \operatorname{tg}\frac{\varphi_\nu}{2}\right),$$

mit der Massgabe, dass für arctg der zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ liegende Werth zu wählen ist, so ist γ_ν ein gewiss von 0 verschiedener echter Bruch, welcher für die Kreisscheibe K_ν folgende Bedeutung hat:

Ein in K_ν holomorphes Potential, welches längs τ_ν verschwindet, längs σ_ν dagegen den Werth 1 *besitzt, ist längs $\tau_{\nu+1}$ überall $\leqq 1 - \gamma_\nu$.*

Aus dieser Bedeutung der Constanten γ_ν folgt dann weiter folgender Satz:

Wenn eine in K_ν holomorphe Potentialfunction längs τ_ν die obere Grenze M_ν, längs σ_ν die obere Grenze $M > \mathsf{M}_\nu$ hat, so genügt ihre obere Grenze $\mathsf{M}_{\nu+1}$ längs $\tau_{\nu+1}$ der Ungleichung

$$\mathsf{M}_{\nu+1} \leqq \gamma_\nu \mathsf{M}_\nu + (1 - \gamma_\nu) M.$$

Denn eine solche Potentialfunction ist im Innern der Kreisscheibe gewiss nicht grösser, als diejenige Potentialfunction, welche längs τ_ν den constanten Werth M_ν, längs σ_ν den constanten Werth M besitzt. Diese letztere Function ist aber überall um die Constante M_ν grösser, als diejenige Function, welche längs τ_ν verschwindet und längs σ_ν den constanten Werth $M - \mathsf{M}_\nu$ besitzt; und diese wieder erhält man durch

Multiplication mit der positiven Constanten $M - \mathsf{M}_\nu$ aus der Function, welche längs τ_ν verschwindet und längs σ_ν den Werth 1 hat. Folglich ist

$$\mathsf{M}_{\nu+1} \leqq \mathsf{M}_\nu + (1 - \gamma_\nu)(M - \mathsf{M}_\nu),$$

worin sich die rechte Seite sofort in die oben angegebene Form umrechnet.

Man sieht auch, wenn man die rechte Seite in der Gestalt

$$M - \gamma_\nu(M - \mathsf{M}_\nu)$$

schreibt, dass jedesmal, wenn $\mathsf{M}_\nu < M$ ist, von selbst auch $\mathsf{M}_{\nu+1} < M$ wird.

Diese Begriffe und Sätze wenden wir auf unsere Kette von Kreisscheiben der Reihe nach an. Die in S_1 holomorphe Potentialfunction u, welche längs s_1 die positive obere Grenze M besitzt und längs s verschwindet, ist, wie wir auch ohne genaue Abschätzung von vornherein wissen, innerhalb von S_1 überall positiv und $< M$. Wir betrachten dieselbe nun zuerst in demjenigen von s und σ_1 begrenzten Theile der Kreisscheibe K_1, welcher innerhalb S liegt. Sie verschwindet längs s und ist längs σ_1 gewiss $< M$. Dann muss sie aber in K_1 kleiner sein als dasjenige in ganz K_1 holomorphe Potential, welches längs τ_1 verschwindet und längs σ_1 die obere Grenze M besitzt; also muss ihre obere Grenze längs τ_2 der Ungleichung genügen:

$$\mathsf{M}_2 < (1 - \gamma_1) M.$$

Nun schliessen wir von hier aus weiter für den Kreis K_2, da u längs τ_2 unter der oberen Grenze M_2, längs σ_2 unter der oberen Grenze M bleibt, dass die obere Grenze von u längs τ_3

$$\mathsf{M}_3 < \gamma_2 \mathsf{M}_2 + (1 - \gamma_2) M = \gamma_2(1 - \gamma_1) M + (1 - \gamma_2) M,$$

d. h.

$$\mathsf{M}_3 < (1 - \gamma_1 \gamma_2) M$$

ist. Ebenso finden wir weiter

$$\mathsf{M}_4 < (1 - \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3) M$$

u. s. w. und schliesslich, wenn wir das Stück τ_{n+1} der Curve s_2 kurz mit τ, und die zugehörige obere Grenze des Potentials u mit M bezeichnen:

$$\mathsf{M} < (1 - \gamma_1 \gamma_2 \ldots \gamma_n) M.$$

Somit ist es uns in der That gelungen, wenigstens für ein endliches Stück τ der Curve s_2 einen solchen von 0 verschiedenen echten Bruch, nämlich

$$g = \gamma_1 \cdot \gamma_2 \cdot \gamma_3 \cdots \gamma_n$$

zu finden, dass jede Potentialfunction, die längs s_1 die obere Grenze M besitzt, längs τ unter der oberen Grenze $(1 - g) M$ bleibt.

Nun können wir aber den Flächenstreifen T vom Rande aus an jede beliebige Stelle der Linie s_2 heranführen. Wir können also für beliebig viele endliche Stücke τ der Linie s_2 je eine Zahl g abschätzen. So können wir erreichen, dass nach einer endlichen Anzahl solcher Abschätzungen jeder Punkt der Linie s_2 mindestens auf einer solchen

Strecke τ liegt, für welche ein Bruch g abgeschätzt ist. Wir legen dann jedem Punkte von s_2 denjenigen Werth g bei, welcher zu der Strecke τ gehört, auf der er liegt, und wenn er auf mehreren Strecken τ liegt, den grössten der zugehörigen Werthe g. Nachdem so jedem Punkte der Linie s_2 ein von 0 verschiedener echter Bruch g zugeordnet ist, wählen wir unter allen diesen Werthen g den kleinsten aus, und dieser ist dann die gesuchte zu der Linie s_2 in Bezug auf s_1 gehörige Constante g, welche in dem Satze auf S. 485 postulirt wird. Wir können die letztere also in der That durch eine endliche Anzahl geometrischer Constructionen abschätzen, w. z. b. w.

§ 7.

Endgültige Abschätzung der Green'schen Function für das Innere des allgemeinsten Bereichs.

Nun wollen wir, wie bereits in Aussicht genommen, versuchen, aus der Eigenthümlichkeit des Schwarz'schen alternirenden Verfahrens heraus eine obere Grenze für den Werth der durch dasselbe dargestellten Green'schen Function zu finden.

Es sei wieder s die Begrenzung des Kreisbogenpolygons, ξ der Unstetigkeitspunkt der herzustellenden Green'schen Function, ϱ_1 sei der Radius des grössten um den Punkt ξ als Centrum beschriebenen Kreises, welcher noch mit seiner ganzen Fläche in dem Bereich liegt. s_1 und s_2 seien zwei im selben Blatt wie ξ gelegene concentrische Kreise mit dem Mittelpunkt ξ, deren Radien den Ungleichungen genügen:

$$0 < r_1 < r_2 < \varrho_1.$$

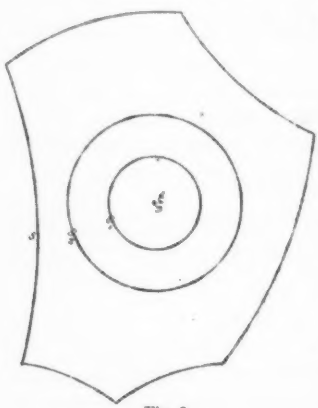


Fig. 2.

Wir denken uns nun die Constante g der Linie s_2 in Bezug auf die Linie s_1 nach dem Verfahren des vorigen Paragraphen abgeschätzt, so dass also eine längs s verschwindende Potentialfunction, die längs s_1 die obere Grenze M besitzt, längs s_2 unterhalb der oberen Grenze $(1-g)\,M$ bleibt.

S_1 sei das zwischen s_1 und s gelegene mehrfach zusammenhängende Gebiet, S_2 sei die von s_2 begrenzte Kreisfläche, so dass also S_1 und S_2 das zwischen s_1 und s_2 gelegene ringförmige Gebiet gemein haben. Nun construirt man zuerst eine in S_1 holomorphe Potentialfunction, welche längs s verschwindet und längs s_1

den constanten positiven Werth $\log\frac{r_2}{r_1}$ annimmt. Diese Potentialfunction werde mit u_1 bezeichnet, ihre Werthe längs s_1 mit u_1' und ihre Werthe längs s_2 mit u_1''. Da die Werthe u_1' nicht grösser als $\log\frac{r_2}{r_1}$ sind, — nämlich $=\log\frac{r_2}{r_1}$ —, so sind nach unserm Satze aus dem vorigen Paragraphen die Werthe u_1'' längs s_2 sämmtlich positiv und kleiner als $(1-g)\cdot\log\frac{r_2}{r_1}$.

Zweitens construirt man ein in S_2 holomorphes Potential u_2, dessen Werthe u_2'' längs s_2 mit den Werthen u_1'' der Function u_1 längs derselben Linie übereinstimmen. Die Werthe der neuen Function u_2 längs s_1 mögen u_2' heissen; dieselben liegen natürlich zwischen denselben Grenzen, wie die Werthe u_2'' und u_1'', sind also ebenfalls positiv und kleiner als $(1-g)\log\frac{r_2}{r_1}$.

Drittens bildet man für S_1 ein holomorphes Potential u_3, das längs s verschwindet und dessen Werthe u_3' längs s_1 mit $u_2'+\log\frac{r_2}{r_1}$ übereinstimmen. Die Differenz u_3-u_1 ist dann ebenfalls eine in S_1 holomorphe Function, welche längs s verschwindet, und zwar stimmen ihre Werthe $u_3'-u_1'$ längs s_1 mit den Werthen u_2' überein, sind also positiv und kleiner als $(1-g)\log\frac{r_2}{r_1}$. Dann folgt aber wieder aus unserem Satze, dass die Werthe $u_3''-u_1''$ längs s_2 positiv und kleiner als $(1-g)^2\log\frac{r_2}{r_1}$ sind.

Darauf construirt man ein viertes in S_2 holomorphes Potential u_4, dessen Werthe u_4'' längs s_2 mit den Werthen u_3'' übereinstimmen. Da u_2 daselbst mit u_1'' übereinstimmt, so stimmt die Differenz $u_4''-u_2''$ mit $u_3''-u_1''$ überein, ist also positiv und kleiner als $(1-g)^2\log\frac{r_2}{r_1}$. Dieselbe Ungleichung muss also auch für $u_4'-u_2'$ gelten.

Ein fünftes Potential u_5 soll dann wieder in S_1 holomorph sein, längs s verschwinden und längs s_1 die Werthe $u_5'=u_4'+\log\frac{r_2}{r_1}$ besitzen. $u_5'-u_3'$ stimmt dann mit $u_4'-u_2'$ überein, ist also positiv und kleiner als $(1-g)^2\log\frac{r_2}{r_1}$; folglich ist längs s_2 die Differenz $u_5''-u_3''<(1-g)^3\log\frac{r_2}{r_1}$.

So fortfahrend gelangt man zu einer unbegrenzten Reihe abwechselnd in S_1 und S_2 holomorpher Functionen, und es zeigt sich, dass die Functionenreihen:

$$\begin{array}{cccc} u_1 \quad, & u_3 \quad, & u_5 \quad, & \cdots \\ u_2+\log\frac{r_2}{r}, & u_4+\log\frac{r_2}{r}, & u_6+\log\frac{r_2}{r}, & \cdots \end{array}$$

in dem gemeinsamen Theile der Gebiete S_1 und S_2 gegen dieselbe Grenzfunction u convergiren, welche als Grenzfunction der ersten Reihe zugleich im ganzen Gebiet S_1, als Grenzfunction der zweiten Reihe zugleich im ganzen Gebiete S_2, mithin überhaupt im ganzen Gebiet S erklärt ist und alle für die gesuchte Green'sche Function G geforderten Eigenschaften besitzt. u ist daher die gesuchte Green'sche Function. Diese lässt sich also sowohl längs s_1 wie längs s_2, wo ja beide Functionenreihen definirt sind, entweder in der einen oder in der andern der folgenden Gestalten darstellen:

$$u_1 + (u_3 - u_1) + (u_5 - u_3) + \cdots,$$
$$\log\frac{r_2}{r} + u_2 + (u_4 - u_2) + (u_6 - u_4) + \cdots.$$

Dann folgt aber sowohl aus der ersten, wie aus der zweiten Reihe übereinstimmend mit Benutzung der für die Differenzen angegebenen Ungleichungen, dass

$$\text{längs } s_1 \quad u' < \log\frac{r_2}{r_1} + (1-g)\log\frac{r_2}{r_1} + (1-g)^2\log\frac{r_2}{r_1} + \cdots,$$
$$\text{längs } s_2 \quad u'' < (1-g)\log\frac{r_2}{r_1} + (1-g)^2\log\frac{r_2}{r_1} + (1-g)^3\log\frac{r_2}{r_1} + \cdots$$

ist, oder, wenn wir die Reihen summiren:

Die Green'sche Function G ist längs des Kreises s_1 kleiner als $\frac{1}{g}\log\frac{r_2}{r_1}$, längs des Kreises s_2 kleiner als $\frac{1-g}{g}\log\frac{r_2}{r_1}$, wobei g ein positiver echter Bruch ist, den man mit Hülfe einer endlichen Anzahl geometrischer Constructionen berechnen kann.

Damit ist die Aufgabe, für irgend eine bestimmte den Unstetigkeitspunkt umschliessende Curve die obere Grenze der Green'schen Function abzuschätzen, thatsächlich gelöst, nämlich für die Kreise s_1 und s_2. Dieselbe obere Grenze, wie für den Kreis s_1 gilt natürlich erst recht für jeden ausserhalb s_1 gelegenen Punkt und für jede Curve, die nicht in den Kreis s_1 eintritt. Aber man kann die obere Grenze für Punkte ausserhalb s_1 durch das Verfahren des vorigen Paragraphen noch weiter erniedrigen. Jedenfalls ist damit die Lösbarkeit der Aufgabe für jede beliebige nicht in s_1 eintretende Curve nachgewiesen.

Aber auch für jeden innerhalb von s_1 gelegenen Punkt können wir sofort eine obere Grenze für den Werth von G angeben: Längs s_1 ist nämlich $G < \frac{1}{g}\log\frac{r_2}{r_1}$. Die Function $G - \log\frac{r_2}{r}$ ist also längs s_1 kleiner als $\frac{1-g}{g}\log\frac{r_2}{r_1}$, folglich, da sie innerhalb s_1 holomorph ist, gilt auch innerhalb des Kreises s_1 die Ungleichung

$$G - \log\frac{r_2}{r} < \frac{1-g}{g}\log\frac{r_2}{r_1},$$

oder

$$G < \frac{1-g}{g} \log \frac{r_2}{r_1} + \log \frac{r_2}{r},$$

oder anders geschrieben:

$$G < \frac{1}{g} \log \frac{r_2}{r_1} + \log \frac{r_1}{r}.$$

Damit können wir auch für jede dem Punkt ξ beliebig nahe kommende, nur nicht durch ihn selbst hindurchgehende Curve eine endliche obere Grenze für den Werth der Green'schen Function längs derselben angeben.

§ 8.

Abschätzung der Green'schen Function in der Nähe gewöhnlicher Randpunkte.

Um die Werthe der Green'schen Function in der Nähe eines Randpunktes abzuschätzen, kann man so verfahren, dass man den betreffenden Randpunkt in eine den Rand orthogonal schneidende Kreisscheibe einschliesst, dass man den im Polygon S liegenden Theil dieser Kreisscheibe so auf einen Halbkreis abbildet, dass das Centrum desselben dem in Rede stehenden Randpunkt entspricht, und nun die Green'sche Function für die Umgebung des Kreiscentrums abschätzt. Dabei wird man einerseits beachten, dass längs des Durchmessers des Halbkreises G verschwinden soll, und wird andererseits aus dem vorigen Paragraphen das Resultat entnehmen müssen, dass man längs des Halbkreises eine endliche obere Grenze für G abschätzen kann.

Dies geschilderte directe Verfahren führt jedoch besonders in der Nähe der Ecken zu sehr umständlichen Rechnungen und geometrischen Abschätzungen, die ich zum guten Theil vermeiden kann, wenn ich folgende Modification vornehme: ich schätze nämlich nicht unmittelbar den Werth von G selbst in einer kleinen Umgebung ε des Randpunktes ab, sondern die Ableitung von G nach einer beliebigen Richtung in einer Umgebung des Randpunktes von endlicher Grösse. Durch eine endliche Zahl von Schritten kann ich so die Ableitung von G innerhalb eines ganzen Streifens von endlicher Breite längs der Innenseite des Randes s abschätzen. Hat man so z. B. innerhalb einer endlichen Umgebung eines gewöhnlichen Randpunktes eine obere Grenze g_0 für den absoluten Werth der Ableitung von G nach jeder Richtung der ξ-Ebene gefunden, so braucht man sich G selbst nur durch Integration vom nächsten Randpunkt aus dargestellt zu denken, um zu sehen, dass innerhalb eines schmalen Streifens von der Breite ε längs des Randes, soweit derselbe in der betrachteten endlichen Umgebung des betreffenden Randpunktes liegt, die Green'sche Function $G < \varepsilon g_0$ sein muss.

Aehnlich, wenn auch im Einzelnen umständlicher, gestaltet sich die Untersuchung in der Nähe einer Ecke.

Ich schreite jetzt zur Ausführung des angegebenen Verfahrens, zunächst für die *Umgebung eines gewöhnlichen Randpunktes.*

Zuerst denke ich mir um den Unstetigkeitspunkt ξ der Green'schen Function eine ganz im Innern des Bereichs s liegende den Punkt ξ umschliessende Curve s_1, z. B. einen beliebig kleinen, aber endlichen Kreis gezogen, längs dessen als obere Grenze der Green'schen Function der Werth M gefunden werde. Das von der Curve s_1 umschlossene den Punkt ξ enthaltende Flächenstück heisse S_2, der übrige zwischen s_1 und s liegende mehrfach zusammenhängende Theil des Bereiches S sei S_1 genannt.

Nun sei ζ_0 ein gewöhnlicher nicht in der unmittelbaren Umgebung einer Ecke liegender Randpunkt des Bereichs. Derjenige an der Begrenzung des Polygons theilnehmende Kreis, der „Randkreis", auf welchem ζ_0 liegt, habe den Durchmesser a, und derjenige Punkt dieses Randkreises, welcher dem Punkt ζ_0 diametral gegenüberliegt, heisse $\bar{\zeta}_0$.

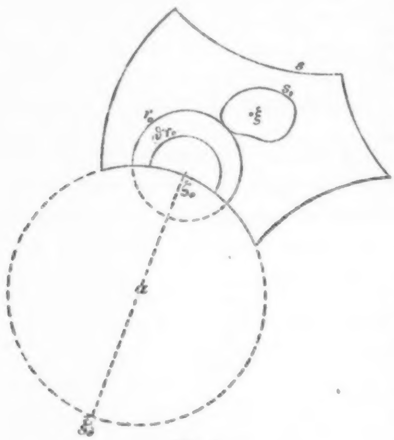


Fig. 3.

Setze ich dann

$$\frac{\zeta-\zeta_0}{\zeta-\bar{\zeta}_0} = \pm\frac{re^{i\varphi}}{ai} = \pm\frac{Z}{ai},$$

wobei das Zeichen $+$ oder $-$ gelten soll, je nachdem der Randkreis nach aussen concav oder convex ist, so stellt $r =$ const. einen Kreis vor, welcher auf dem Randkreise senkrecht steht, und die Werthe von φ, welche zwischen 0 und π liegen, geben dasjenige Stück dieses Kreises, welches mit dem Polygon S auf derselben Seite des Randkreises liegt.

Es sei ein Werth r_0 zwar möglichst gross, aber doch so klein gewählt, dass der Kreis $r = r_0$ von dem Gebiet S_1 eine den Punkt ζ_0 auf seiner Begrenzung enthaltende rechtwinklige Kreissichel abschneidet. Der Kreis $r = r_0$ darf also keine anderen Randpunkte von S einschliessen, als solche, welche mit ζ_0 auf demselben Bogenstücke liegen, und darf in das Gebiet S_2 nicht eintreten. Das Innere der so abgeschnittenen Sichel ist dann durch die Ungleichungen gegeben:

$$0 \leq r \leq r_0, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi.$$

Die durch den Randkreis gebildete Begrenzung der Sichel heisse das „Randstück", gegeben durch $\varphi = 0$ und $\varphi = \pi$, die durch den Orthogonalkreis $r = r_0$ gebildete Begrenzung das „Bogenstück".

Nun weiss ich, dass G in der ganzen Sichel holomorph ist, dass es längs des Randstückes verschwindet und längs des Bogenstückes überall positiv und kleiner als M ist, Eine in der rechtwinkligen Sichel holomorphe Potentialfunction, welche längs des Randstückes verschwindet, kann ich aber durch eine in der ganzen Sichel convergente Reihe folgender Gestalt darstellen:

$$G = a_1 r \sin\varphi + a_2 r^2 \sin 2\varphi + a_3 r^3 \sin 3\varphi + \cdots,$$

worin sich die Coefficienten aus den Werthen $\overline{G}$ der Green'schen Function längs des Bogenstückes durch folgende Formel berechnen lassen:

$$a_\nu = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{r_0^\nu} \cdot \int_0^\pi \overline{G} \sin \nu\varphi \cdot d\varphi.$$

Da $\overline{G}$, und also auch der absolute Werth des Integranden im ganzen Integrationsintervall kleiner als M ist, so folgt hieraus

$$|a_\nu| < \frac{2M}{r_0^\nu}.$$

Ich bilde ferner die zu G conjugirte Potentialfunction:

$$H = -a_1 r \cos\varphi - a_2 r^2 \cos 2\varphi - a_3 r^2 \cos 3\varphi - \cdots.$$

$G + iH = P$ ist dann eine analytische Function des complexen Argumentes $Z = r \,.\, e^{i\varphi}$, also auch des complexen Argumentes ζ, und zwar ist

$$P = \frac{a_1}{i} Z + \frac{a_2}{i} Z^2 + \frac{a_3}{i} Z^3 + \cdots, \qquad Z = \pm a i \frac{\zeta - \zeta_0}{\zeta - \overline{\zeta}_0}.$$

Die Ableitung von G nach irgend einer beliebigen Richtung der ζ-Ebene werde mit $\frac{\partial G}{\partial t}$ bezeichnet. Dieselbe muss ihrem absoluten Werthe nach, welches auch die Richtung der Differentiation sein mag, kleiner oder höchstens gleich dem absoluten Werthe der Ableitung von P nach ζ sein, also:

$$\left|\frac{\partial G}{\partial t}\right| \leq \left|\frac{dP}{d\zeta}\right| = \left|\frac{dP}{dZ}\right| \cdot \left|\frac{dZ}{d\zeta}\right|.$$

Nun folgt aus der Reihenentwicklung von P die Reihe:

$$\frac{dP}{dZ} = \frac{a_1}{i} + \frac{2a_2}{i} \cdot Z + \frac{3a_3}{i} \cdot Z^2 + \cdots,$$

mithin, da der absolute Werth einer Summe höchstens gleich der Summe der absoluten Werthe der einzelnen Summanden ist:

$$\left|\frac{dP}{dZ}\right| \leq |a_1| + 2|a_2| \cdot r + 3|a_3| \cdot r^2 + \cdots,$$

also mit Rücksicht auf die oben angegebenen für die Coefficienten a_ν geltenden Ungleichungen:

$$\left|\frac{dP}{dZ}\right| < \frac{2M}{r_0} + 2\,\frac{2M}{r_0^2}\cdot r + 3\,\frac{2M}{r_0^3}\cdot r^2 + \cdots = M\cdot\frac{2r_0}{(r_0-r)^2}.$$

Ferner ist

$$\frac{dZ}{d\zeta} = \pm\, a\, i\,\frac{\zeta_0-\bar{\zeta}_0}{(\zeta-\bar{\zeta}_0)^2}.$$

Hierin ist $|\zeta_0 - \bar{\zeta}_0|$ nichts anderes, als die Entfernung der beiden Punkte ζ_0 und $\bar{\zeta}_0$ von einander, also

$$|\zeta_0 - \bar{\zeta}_0| = a.$$

$|\zeta - \bar{\zeta}_0|$ ist die Entfernung eines Punktes auf dem Kreise r vom Punkte $\bar{\zeta}_0$, also grösser oder gleich der kleinsten Entfernung dieses Kreises vom Punkte $\bar{\zeta}_0$, d. h.

$$|\zeta - \bar{\zeta}_0| \geq \frac{a^2}{a+r}.$$

Aus all diesem ergiebt sich, dass

$$\left|\frac{dZ}{d\zeta}\right| \leq \frac{(a+r)^2}{a^2} = \left(1+\frac{r}{a}\right)^2$$

ist. Dies mit dem für $\left|\frac{dP}{dZ}\right|$ gefundenen Resultat zusammen ergibt den Satz:

Längs des Kreises r genügt der nach irgend einer Richtung t genommene Differentialquotient von G der Ungleichung:

$$\left|\frac{\partial G}{\partial t}\right| < M\cdot\frac{2r_0}{(r_0-r)^2}\left(1+\frac{r}{a}\right)^2.$$

Da die rechte Seite dieser Ungleichung immer kleiner wird, wenn man r verkleinert, so ist dieselbe Ungleichung mit demselben numerischen Werthe der rechten Seite erst recht im Innern des Kreises r gültig. Wähle ich z. B. $r = \vartheta r_0$, unter ϑ irgend einen beliebig gewählten echten Bruch verstanden, so hat man den Satz:

Innerhalb und auf dem Rande des Kreises $r = \vartheta r_0$ gilt überall die Ungleichung:

$$\left|\frac{\partial G}{\partial t}\right| < \frac{2M}{(1-\vartheta)^2}\,\frac{1}{r_0}\left(1+\vartheta\,\frac{r_0}{a}\right)^2.$$

Damit habe ich in der That eine endliche obere Grenze für den absoluten Werth der Ableitung von G innerhalb eines den Punkt ζ_0 umgebenden Gebietes von endlicher Ausdehnung gefunden; denn *der Rand der Kreisfläche $r = r_0$ hat die von* 0 *verschiedene Minimalentfernung*

$$\frac{\vartheta r_0}{1+\vartheta\,\frac{r_0}{a}}$$

vom Punkte ζ_0.

Die gefundene obere Grenze für das Innere des Kreises $r = \vartheta r_0$ heisse g. Dann ist, wie schon zu Anfang dieses Paragraphen bemerkt, *die obere Grenze der Green'schen Function G selbst innerhalb eines Streifens von der Breite ε längs der Innenseite des Randes s, soweit der Streifen den Kreis ϑr_0 durchzieht*, $< \varepsilon g$, sodass damit die Abschätzung von G längs eines endlichen Randstückes zu beiden Seiten des Punktes ζ_0 vollbracht ist.

Sowie zu beiden Seiten des Punktes ζ_0 kann man die Abschätzung von G längs des Randes bis in eine beliebig kleine, nur nicht verschwindende, sondern endliche Entfernung von jeder Ecke durchführen. Jedoch bis in die Ecken selbst hinein kann man auf diese Weise nicht gelangen. Für deren Umgebung ist daher eine besondere Betrachtung nothwendig.

§ 9.

Abschätzung in der Umgebung gewöhnlicher Ecken.

ζ_0 sei jetzt eine Polygonecke mit dem Winkel $\lambda\pi$, wobei λ weder 0 noch eine ganze Zahl sein möge. Die beiden in ζ_0 zusammenstossenden Randkreise des Polygons mögen als erster und zweiter Randkreis unterschieden werden, nach der Reihenfolge, in der man dieselben trifft, wenn man das Polygon im Uhrzeigersinn umläuft. $\bar{\zeta}_0$ sei der andere Schnittpunkt dieser beiden Randkreise, $a = |\zeta_0 - \bar{\zeta}_0|$ die Entfernung der beiden Punkte ζ_0 und $\bar{\zeta}_0$ von einander, welche sicher von 0 verschieden ist, da λ als ein Bruch vorausgesetzt ist, die beiden Kreise sich also wirklich schneiden, nicht berühren. ψ bedeute denjenigen Winkel, welchen die über ζ_0 hinaus verlängerte Verbindungslinie der Punkte $\bar{\zeta}_0$ und ζ_0 mit dem ersten Randkreise bildet, und zwar von diesem Randkreise aus so gemessen, dass die dem Uhrzeigersinn entgegengesetzte Richtung als positiv gilt.

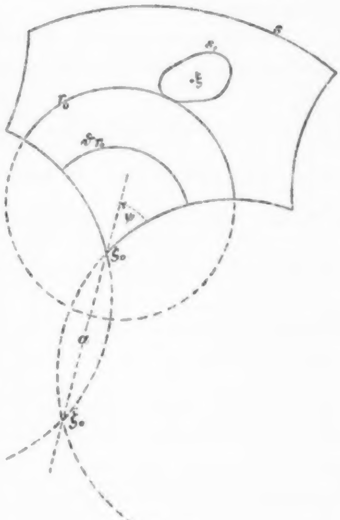


Fig. 4.

Setze ich

$$\frac{\zeta - \zeta_0}{\zeta - \bar{\zeta}_0} = \frac{r e^{i\varphi}}{a e^{i\psi}} = \frac{Z^\lambda}{a e^{i\psi}},$$

so bedeutet $r=\text{const.}$ einen Kreis, welcher die beiden in ζ_0 zusammenstossenden Randkreise orthogonal schneidet und die zwischen 0 und $\lambda\pi$ liegenden Werthe von φ stellen denjenigen Theil dieses Kreises vor, welcher zwischen den Schenkeln des Polygonwinkels liegt.

Ich wähle einen Werth r_0 möglichst gross, aber doch so klein, dass der Kreis $r=r_0$ von dem Gebiet S_1 (vergl. S. 492) ein kreissectorartiges Kreisbogendreieck mit zwei rechten Winkeln und dem einen Winkel $\lambda\pi$ abschneidet.

Die Fläche dieses Kreisbogendreiecks wird durch die Ungleichungen

$$0 \leqq r \leqq r_0, \quad 0 \leqq \varphi \leqq \lambda\pi$$

repräsentirt. Die beiden Seiten des Kreisbogendreiecks, welche dem Winkel $\lambda\pi$ anliegen, welche also zugleich am Rande des Polygons S theilnehmen, mögen als die „Randstücke", die dritte, im Innern des Polygons liegende Seite als das „Bogenstück" benannt werden.

Die Green'sche Function G ist nun in dem ganzen Kreisbogendreieck holomorph, verschwindet längs der beiden Randstücke und besitzt längs des Bogenstückes nur positive Werthe $\overline{G}$, welche kleiner als M sind.

Man kann eine solche Function innerhalb des ganzen Kreisbogendreiecks durch eine Reihe folgender Art darstellen:

$$G = a_1 . r^{\frac{1}{\lambda}} \sin\frac{\varphi}{\lambda} + a_2 r^{\frac{2}{\lambda}} \sin\frac{2\varphi}{\lambda} + a_3 r^{\frac{3}{\lambda}} \cdot \sin\frac{3\varphi}{\lambda} + \cdots,$$

wobei die Coefficienten die Werthe haben:

$$a_\nu = \frac{2}{\lambda\pi} \cdot \frac{1}{r_0^{\frac{\nu}{\lambda}}} \cdot \int_0^{\lambda\pi} \overline{G} \sin\frac{\nu\varphi}{\lambda} \cdot d\varphi .$$

Hieraus folgt:

$$|a_\nu| < \frac{2M}{r_0^{\frac{\nu}{\lambda}}} .$$

Die zu G conjugirte Potentialfunction ist

$$H = -a_1 r^{\frac{1}{\lambda}} \cos\frac{\varphi}{\lambda} - a_2 r^{\frac{2}{\lambda}} \cos\frac{2\varphi}{\lambda} - a_3 r^{\frac{3}{\lambda}} \cdot \cos\frac{3\varphi}{\lambda} - \cdots,$$

und das Integral P heisst also:

$$P = G + iH = \frac{a_1}{i} \mathsf{Z} + \frac{a_2}{i} \mathsf{Z}^2 + \frac{a_3}{i} \mathsf{Z}^3 + \cdots, \quad \mathsf{Z} = \left(a \cdot e^{i\psi} . \frac{\zeta - \zeta_0}{\zeta - \overline{\zeta}_0}\right)^{\frac{1}{\lambda}} .$$

Die weitere Betrachtung verfolgt denselben Gang, wie im vorigen Paragraphen. Es ist:

$$\left|\frac{\partial G}{\partial t}\right| \leq \left|\frac{dP}{d\zeta}\right| = \left|\frac{dP}{dZ}\right| \cdot \left|\frac{dZ}{d\zeta}\right|,$$

$$\frac{dP}{dZ} = \frac{a_1}{i} + \frac{2a_2}{i} Z + \frac{3a_3}{i} Z^2 + \cdots,$$

$$\left|\frac{dP}{dZ}\right| < \frac{2M}{r_0^{\frac{1}{\lambda}}} + 2 \cdot \frac{2M}{r_0^{\frac{2}{\lambda}}} \cdot r^{\frac{1}{\lambda}} + 3 \cdot \frac{2M}{r_0^{\frac{3}{\lambda}}} \cdot r^{\frac{2}{\lambda}} + \cdots,$$

oder

$$\left|\frac{dP}{dZ}\right| < M \cdot \frac{2r_0^{\frac{1}{\lambda}}}{\left(r_0^{\frac{1}{\lambda}} - r^{\frac{1}{\lambda}}\right)^2}.$$

Ferner ist

$$\frac{dZ}{\partial \zeta} = \frac{1}{\lambda} \cdot Z^{1-\lambda} \cdot a e^{i\varphi} \cdot \frac{\zeta_0 - \bar{\zeta}_0}{(\zeta - \bar{\zeta}_0)^2},$$

$$|Z| = r^{\frac{1}{\lambda}}, \quad |\zeta_0 - \bar{\zeta}_0| = a, \quad |\zeta - \bar{\zeta}_0| \geq \frac{a^2}{a+r},$$

also

$$\left|\frac{dZ}{d\zeta}\right| \leq \frac{1}{\lambda} r^{\frac{1}{\lambda}-1} \cdot \left(1 + \frac{r}{a}\right)^2.$$

Es kommt also schliesslich heraus:

$$\left|\frac{\partial G}{\partial t}\right| < M \cdot \frac{2}{\lambda} \cdot \frac{r_0^{\frac{1}{\lambda}} \cdot r^{\frac{1}{\lambda}-1}}{\left(r_0^{\frac{1}{\lambda}} - r^{\frac{1}{\lambda}}\right)^2} \left(1 + \frac{r}{a}\right)^2.$$

Wir haben nun fürs weitere *zwei Fälle* zu unterscheiden, nämlich, ob $\lambda < 1$ oder $\lambda > 1$ ist, d. h. ob wir es mit einem hohlen oder mit einem erhabenen, einem überstumpfen Polygonwinkel zu thun haben.

Im *ersten Fall* $\lambda < 1$ nimmt die rechte Seite der Ungleichung bei abnehmendem r immer ab; dieselbe Ungleichung, wie längs des Kreises r gilt also erst recht im Innern dieses Kreises. Es ergiebt sich in Folge dessen ein ebensolcher Satz, wie für die Umgebung eines gewöhnlichen Punktes, nämlich:

Wenn wir es mit einem hohlen Winkel zu thun haben, so bleibt die Ableitung von G nach irgend einer Richtung innerhalb des Kreises $r = \vartheta r_0$ *unterhalb der endlichen oberen Grenze*

$$g = M \cdot \frac{2 \cdot \vartheta^{\frac{1}{\lambda}}}{\lambda\left(1 - \vartheta^{\frac{1}{\lambda}}\right)^2} \cdot \frac{1}{r_0}\left(1 + \vartheta\, \frac{r_0}{a}\right)^2.$$

Da die geringste Entfernung des Kreises $r = \vartheta r_0$ von der Ecke ζ_0 grösser als

$$\frac{\vartheta r_0}{1+\vartheta\frac{r_0}{a}}$$

ist, so können wir damit G selbst jetzt auch in der Umgebung des hohlen Winkels einschliesslich einer endlichen Strecke zu beiden Seiten des Winkels abschätzen. *Es ist nämlich längs eines Streifens von der Breite ε an der Innenseite von s, soweit derselbe innerhalb des Kreises $r = \vartheta r_0$ liegt,*

$$G < \varepsilon g.$$

Schwieriger dagegen gestaltet sich die Sachlage, wenn $\lambda > 1$ ist; dann ist $\frac{1}{\lambda} - 1$ eine negative Zahl, und, wenn auch alle übrigen Theile unserer für $\left|\frac{\partial G}{\partial t}\right|$ gefundenen Ungleichung mit r abnehmen, so wächst doch der Factor $r^{\frac{1}{\lambda}-1}$ bei abnehmendem r unbegrenzt. Die auf dem Kreise r geltende Ungleichung gilt daher nicht mehr auch im Innern dieses Kreises. Achte ich also z. B. auf den Kreis $r = \vartheta r_0$ und sein Inneres, lasse also $r \leqq \vartheta r_0$ sein, so darf ich zwar im Nenner und im quadratischen Factor des Zählers r durch ϑr_0 ersetzen, nicht aber in dem Factor $r^{\frac{1}{\lambda}-1}$. Ich darf also nur sagen:

Innerhalb des Kreises $r = \vartheta r_0$ ist überall

$$\left|\frac{\partial G}{\partial t}\right| < r^{\frac{1}{\lambda}-1} \cdot \frac{2M}{\lambda\left(1-\vartheta^{\frac{1}{\lambda}}\right)^2} \cdot \frac{1}{r_0^{\frac{1}{\lambda}}}\left(1+\vartheta\frac{r_0}{a}\right)^2.$$

Die obere Grenze für die Ableitung von G ist also hier eine Function, welche beim Hineinrücken in die Ecke unendlich wird.

Um diese gefundene Grenze bequemer für die Abschätzung von G selbst verwenden zu können, will ich statt der Grösse r die wirkliche in der ζ-Ebene gemessene Entfernung von ζ_0 in die Formel einführen, d. h. statt

$$r = \left|(\zeta_0 - \bar{\zeta}_0) \cdot \frac{\zeta - \zeta_0}{\zeta - \bar{\zeta}_0}\right|$$

die Grösse

$$\varrho = |\zeta - \zeta_0|.$$

Ich will dabei voraussetzen, was gewiss immer möglich ist, dass $r_0 < a$ gewählt sei, so dass die Kreisfläche $0 \leqq r \leqq r_0$ sich nicht über das Unendliche hinzieht. Die grösste Entfernung des Kreises r vom Punkt ζ_0 ist dann $= \frac{ar}{a-r}$, wobei natürlich $r < a$ ist, da wir nur von Punkten innerhalb der Kreisfläche $0 \leqq r \leqq r_0$ sprechen. Das heisst aber nichts anderes, als dass für jeden auf dem Kreise r gelegenen Punkt

$$\varrho \leqq \frac{ar}{a-r}$$

ist. Daraus berechnet man umgekehrt:

$$r \geqq \frac{a\varrho}{a+\varrho},$$

und indem man mit der negativen Zahl $\frac{1}{\lambda} - 1$ potenzirt:

$$r^{\frac{1}{\lambda}-1} \leqq \varrho^{\frac{1}{\lambda}-1} \cdot \left(1+\frac{\varrho}{a}\right)^{1-\frac{1}{\lambda}}.$$

Innerhalb und auf dem Rande der Kreisfläche $r = \vartheta r_0$ ist nun aber $r < \vartheta a$, folglich

$$\frac{ar}{a-r} < \frac{\vartheta}{1-\vartheta} \cdot a,$$

und also auch

$$\varrho < \frac{\vartheta}{1-\vartheta} \cdot a,$$

so dass ich statt $1 + \frac{\varrho}{a}$ in der Ungleichung auch $\frac{1}{1-\vartheta}$ schreiben kann:

$$r^{\frac{1}{\lambda}-1} < \varrho^{\frac{1}{\lambda}-1} \cdot (1-\vartheta)^{\frac{1}{\lambda}-1}.$$

Dies in die Ungleichung für $\left|\frac{\partial G}{\partial t}\right|$ eingesetzt, ergiebt

$$\left|\frac{\partial G}{\partial t}\right| < \varrho^{\frac{1}{\lambda}-1} \cdot \frac{2M(1-\vartheta)^{\frac{1}{\lambda}-1}}{\lambda\left(1-\vartheta^{\frac{1}{\lambda}}\right)^2} \cdot \frac{1}{r_0^{\frac{1}{\lambda}}}\left(1+\vartheta\frac{r_0}{a}\right)^2,$$

wofür ich abkürzend

$$\left|\frac{\partial G}{\partial t}\right| < \varrho^{\frac{1}{\lambda}-1} \cdot g'$$

schreiben will.

Ich denke mir nun den Streifen von der verschwindend kleinen Breite ε construirt. Die innere Begrenzung desselben (Fig. 5) besteht einmal aus einem Bogenstück eines Kreises vom Radius ε und mit dem Centrum ζ_0 (BB' der Figur), und aus zwei seitlichen Kreisbogen AB und $B'A'$, welche je mit einem der beiden Randkreise concentrisch sind, aber einen um ε grösseren oder kleineren Radius haben, je nachdem der betr. Randkreis nach aussen concav oder convex ist. Es kommt nun darauf an, den Werth von G längs der Linie $ABB'A'$ abzuschätzen.

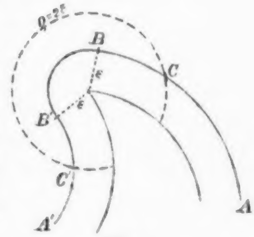


Fig. 5.

Zu dem Zwecke denke ich mir durch einen mit dem Radius 2ε um ζ_0 beschriebenen Kreis die Curve in ein Mittelstück CC' und zwei Seitenstücke AC und $C'A'$ getheilt,

von denen das erstere alle Punkte umfasst, deren Entfernung von ζ_0 kleiner oder gleich 2ε ist, während die Seitenstücke alle übrigen noch im Kreise $\mathfrak{r} = \vartheta r_0$ liegenden Punkte umfassen.

Die Werthe von G längs des Mittelstücks schätze ich durch geradlinige Integration vom Punkte ζ_0 aus ab, die Werthe längs der Seitenstücke aber durch Integration vom nächsten Punkte des zugehörigen Randkreises aus.

Längs des Mittelstücks ergiebt sich so

$$G = \int_0^{\leq 2\varepsilon} \frac{\partial G}{\partial \varrho} \cdot d\varrho < g' \int_0^{\leq 2\varepsilon} \varrho^{\frac{1}{\lambda} - 1} d\varrho,$$

also

$$G < \lambda (2\varepsilon)^{\frac{1}{\lambda}} \cdot g'.$$

Längs des Mittelstücks ist G überall kleiner als die mit ε stetig verschwindende kleine Grösse

$$\varepsilon^{\frac{1}{\lambda}} . \lambda . 2^{\frac{1}{\lambda}} g'.$$

Für die Seitenstücke ist zu bedenken, dass für jeden Punkt des Integrationsweges die Entfernung ϱ von ζ_0 gewiss grösser als ε ist; denn da der Endpunkt desselben eine grössere Entfernung als 2ε hat, und der ganze Integrationsweg nur die Länge ε besitzt, so kann kein Punkt desselben bis auf $2\varepsilon - \varepsilon = \varepsilon$ sich dem Punkte ζ_0 nähern.

Setze ich jetzt

$$G = \int_0^{\varepsilon} \frac{\partial G}{\partial \varepsilon} d\varepsilon,$$

das Integral vom nächsten Randpunkte aus erstreckt, so ist längs des ganzen Integrationsweges

$$\left|\frac{\partial G}{\partial \varepsilon}\right| < \varrho^{\frac{1}{\lambda} - 1} \cdot g' \leq \varrho_0^{\frac{1}{\lambda} - 1} \cdot g',$$

unter ϱ_0 die kleinste Entfernung des Integrationsweges vom Punkte ζ_0 verstanden. Wir haben also

$$G < \varepsilon \, . \, \varrho_0^{\frac{1}{\lambda} - 1} \cdot g',$$

und wegen $\varrho_0 > \varepsilon$

$$G < \varepsilon^{\frac{1}{\lambda}} . g'.$$

Es ergiebt sich also der Satz:

Längs der Seitenstücke ist überall G kleiner als die kleine Grösse

$$\varepsilon \, . \, \varrho_0^{\frac{1}{\lambda}-1} g',$$

unter ϱ_0 *die kleinste Entfernung der auf den Randkreis gefällten Normalen von der Ecke verstanden, und diese obere Grenze bleibt auch in der Nachbarschaft des Mittelstücks immer noch kleiner als die mit* ε *stetig verschwindende Grösse*

$$\varepsilon^{\frac{1}{\lambda}} \, . \, g'.$$

Fassen wir dies mit dem für das Mittelstück gefundenen Resultat zusammen, so sehen wir:

In endlicher — d. h. angebbarer von ε *unabhängiger — Entfernung von der Ecke verschwindet G längs des Streifens von der Breite* ε *wie die erste Potenz von* ε*, multiplicirt mit einer endlichen Grösse, in kleiner, d. h. mit* ε *vergleichbarer Entfernung von der Ecke wenigstens noch wie* $\varepsilon^{\frac{1}{\lambda}}$*, multiplicirt mit einer endlichen Grösse.*

Damit ist die Stetigkeit der Green'schen Function bei Abänderung auch eines Bereichs mit überstumpfen Winkeln oder mit Windungspunkten in den Ecken abgeschätzt. Bei dem Vorhandensein überstumpfer Winkel stellt sich nur die Besonderheit ein, dass die Aenderung der Green'schen Function nicht mehr auf dem ganzen Bereiche Σ mit der Aenderung ε des Bereichs S selbst proportional ist, sondern, wenigstens in der Nähe der überstumpfen Ecken, nur noch einer Wurzel von ε proportional ist.

§ 10.

Abschätzung in der Umgebung parabolischer Spitzen.

Bis jetzt habe ich die Existenz parabolischer Ecken, d. h. solcher Ecken, in denen zwei nicht derselben Kreislinie angehörige Seiten entweder unter dem Winkel 0 oder einem ganzzahligen Multiplum von π zusammenstossen, von der Betrachtung ausgeschlossen. Jetzt sollen auch die Verhältnisse in der Nähe einer solchen Ecke untersucht werden.

Ziemlich einfach gestaltet sich die Untersuchung bei einer Ecke mit verschwindendem Winkel, also bei einer *parabolischen Spitze.*

Es sei ζ_0 eine solche Spitze. Ich wähle dann aus demjenigen durch ζ_0 gehenden Kreisbüschel, welches die beiden sich in ζ_0 berührenden Randkreise orthogonal schneidet, denjenigen Kreis aus, welcher von

dem Bereich S_1 ein möglichst grosses Kreisbogendreieck mit zwei rechten und einem verschwindenden Winkel abschneidet. Es sei α der Schnittpunkt dieses Kreises mit dem ersten Randkreis, β der Schnittpunkt mit dem zweiten Randkreis.

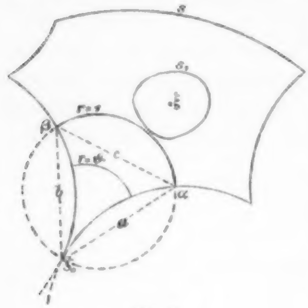


Fig. 6.

Dann stellt

$$\frac{\zeta-\alpha}{\zeta-\zeta_0}=\frac{\beta-\alpha}{\beta-\zeta_0}\cdot\frac{\log r+i\varphi}{i\pi}=\frac{\beta-\alpha}{\beta-\zeta_0}\cdot\frac{\log \mathsf{Z}}{i\pi}$$

für constanten Werth von r einen der Kreise des Orthogonalbüschels zu den beiden Randkreisen vor. Die zwischen 0 und π liegenden Werthe von φ entsprechen denjenigen Punkten dieses Kreises, welche zwischen den Schenkeln des Polygonwinkels liegen.

Die Punkte des abgeschnittenen Kreisbogendreiecks sind durch die Ungleichungen

$$0\leqq r\leqq 1, \qquad 0\leqq\varphi\leqq\pi$$

gegeben.

Die Function G, welche auf dem Kreisbogendreieck holomorph ist, längs der Randstücke verschwindet und längs des Bogenstücks unterhalb der Grenze M bleibt, gestattet eine Entwicklung folgender Art:

$$G=a_1 r\sin\varphi+a_2 r^2\sin 2\varphi+a_3 r^3\sin 3\varphi+\cdots,$$

wobei die Coefficienten durch die längs des Bogenstücks, also längs des Kreises $r=1$ zu erstreckenden Integrale:

$$a_\nu=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \overline{G}\sin\nu\varphi\,d\varphi$$

gegeben sind und daher den Ungleichungen

$$|a_\nu|<2M$$

genügen.

Ich ergänze G zu einer Function P der complexen Variablen Z bezw. ζ, indem ich setze:

$$P=\frac{a_1}{i}\mathsf{Z}+\frac{a_2}{i}\mathsf{Z}^2+\frac{a_3}{i}\mathsf{Z}^3+\cdots,\qquad \mathsf{Z}=e^{i\pi\frac{\zeta-\alpha}{\zeta-\zeta_0}\cdot\frac{\beta-\zeta_0}{\beta-\alpha}}.$$

Es ist nun wieder, wie früher

$$\left|\frac{\partial G}{\partial t}\right|\leqq\left|\frac{dP}{d\mathsf{Z}}\right|\cdot\left|\frac{d\mathsf{Z}}{d\zeta}\right|,$$

$$\frac{dP}{d\mathsf{Z}}=\frac{a_1}{i}+\frac{2a_2}{i}\mathsf{Z}+\frac{3a_3}{i}\mathsf{Z}^2+\cdots,$$

$$\left|\frac{dP}{d\mathsf{Z}}\right|\leqq|a_1|+2|a_2|r+3|a_3|r^2+\cdots<\frac{2M}{(1-r)^2};$$

$$\frac{dZ}{d\zeta} = Z \cdot i\pi \cdot \frac{(\alpha-\zeta_0)(\beta-\zeta_0)}{\beta-\alpha} \cdot \frac{1}{(\zeta-\zeta_0)^2},$$
$$\left|\frac{dZ}{d\zeta}\right| = r \cdot \pi \cdot \frac{|\alpha-\zeta_0| \cdot |\beta-\zeta_0|}{|\beta-\alpha|} \cdot \frac{1}{|\zeta-\zeta_0|^2}.$$

$|\alpha - \zeta_0|$, $|\beta - \zeta_0|$, $|\beta - \alpha|$ sind hierin nichts anderes, als die Seitenlängen des geradlinigen Dreiecks mit den Ecken α, β, ζ_0; dieselben haben angebbare endliche von Null verschiedene Werthe, welche ich abkürzend mit a, b, c bezeichnen will, so dass also

$$\left|\frac{dZ}{d\zeta}\right| = r \cdot \pi \cdot \frac{ab}{c} \cdot \frac{1}{|\zeta-\zeta_0|^2}$$

ist. Es ist nun noch die obere Grenze für $\frac{1}{|\zeta-\zeta_0|^2}$, oder die untere Grenze für die Entfernung eines Punktes ζ vom Punkte ζ_0 abzuschätzen. Aus

$$\frac{\zeta-\alpha}{\zeta-\zeta_0} = \frac{\beta-\alpha}{\beta-\zeta_0} \cdot \frac{\log r + i\psi}{i\pi}$$

folgt

$$\frac{1}{\zeta-\zeta_0} = \frac{\alpha-\beta}{(\alpha-\zeta_0)(\beta-\zeta_0)} \cdot \frac{\log r + i\varphi}{i\pi} + \frac{1}{\alpha-\zeta_0}.$$

Dieser Ausdruck kann, wenn man φ zwischen 0 und π variiren lässt, das Maximum seines absoluten Werthes nur entweder bei $\varphi = 0$ oder bei $\varphi = \pi$ annehmen. Für diese beiden Grenzen besitzt er aber die Werthe

für $\varphi = 0$ $$\frac{\alpha-\beta}{(\alpha-\zeta_0)(\beta-\zeta_0)} \cdot \frac{\log r}{i\pi} + \frac{1}{\alpha-\zeta_0},$$

für $\varphi = \pi$ $$\frac{\alpha-\beta}{(\alpha-\zeta_0)(\beta-\zeta_0)} \cdot \frac{\log r}{i\pi} + \frac{1}{\beta-\zeta_0}.$$

Der absolute Werth dieser beiden Ausdrücke ist aber für $r < 1$ höchstens gleich

$$\frac{c}{ab} \cdot \frac{\log \frac{1}{r}}{\pi} + \frac{1}{a},$$

bezw.

$$\frac{c}{ab} \cdot \frac{\log \frac{1}{r}}{\pi} + \frac{1}{b},$$

also in jedem Falle kleiner als

$$\frac{c}{ab}\,\frac{\log \frac{1}{r}}{\pi} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{c}{\pi \cdot ab}\left(\log \frac{1}{r} + \pi \cdot \frac{a+b}{c}\right).$$

Es ist also für alle in Betracht kommenden Punkte

$$\frac{1}{|\zeta-\zeta_0|} < \frac{c}{\pi \cdot ab}\left(\log \frac{1}{r} + \pi \cdot \frac{a+b}{c}\right).$$

Alles zusammen ergiebt

$$\left|\frac{\partial G}{\partial t}\right| < M \cdot \frac{2c}{\pi ab} \cdot \frac{r\left(\log\frac{1}{r} + \pi \cdot \frac{a+b}{c}\right)^2}{(1-r)^2}.$$

Man sieht leicht ein, dass der Ausdruck auf der rechten Seite dieser Ungleichung, wenn man r von 1 bis 0 abnehmen lässt, monoton von $+\infty$ bis 0 abnimmt. Denn für Werthe von r, die der 1 sehr nahe kommen, ist der Ausdruck sehr gross und positiv, für sehr kleine positive Werthe sehr klein und positiv und verschwindet für $r = 0$. Ferner existirt in dem Intervall $0 < r < 1$ keine Unstetigkeitsstelle des Ausdrucks, und kein Maximum oder Minimum; denn ein solches könnte nur an den Stellen liegen, welche einer der folgenden beiden Gleichungen genügen:

$$\text{(1)} \qquad \log\frac{1}{r} + \pi \cdot \frac{a+b}{c} = 0,$$

$$\text{(2)} \qquad (1+r)\left(\log\frac{1}{r} + \pi \cdot \frac{a+b}{c}\right) - 2(1-r) = 0.$$

Eine Lösung der Gleichung (1) kann aber für $0 < r < 1$ nicht existiren, da in diesem Intervall $\log\frac{1}{r}$ durchweg positiv ist. Die Gleichung (2) schreibe ich in der Form

$$\log\frac{1}{r} = \frac{4}{1+r} - 2 - \pi \cdot \frac{a+b}{c}.$$

Nun ist aber in dem ganzen Intervall $\frac{4}{1+r} < 4$, und da a, b, c Dreiecksseiten sind, also $a + b \geqq c$ ist, $\pi \cdot \frac{a+b}{c} \geqq \pi$. Folglich müsste

$$\log\frac{1}{r} < 2 - \pi$$

sein, was für $0 < r < 1$ unmöglich ist, da die rechte Seite dieser Ungleichung negativ ist.

Wenn wir also für r immer kleinere Werthe setzen, so muss die rechte Seite der für $\left|\frac{\partial G}{\partial t}\right|$ angegebenen Ungleichung immer abnehmen. In Folge dessen gilt die Ungleichung, wenn sie auf einem bestimmten Kreise r gilt, erst recht auch im ganzen Innern des Kreises.

Ich setze nun $r \leqq \vartheta$ und bekomme so den Satz:

Innerhalb und auf der Peripherie des Kreises $r = \vartheta$ gilt die Ungleichung:

$$\left|\frac{\partial G}{\partial t}\right| < \frac{2Mc \cdot \vartheta}{\pi ab(1-\vartheta)^2}\left(\log\frac{1}{\vartheta} + \pi \cdot \frac{a+b}{c}\right)^2.$$

Das Gebiet, für welches diese obere Grenze besteht, besitzt eine angebbare endliche Ausdehnung, da die Minimalentfernung des Kreises $r = \vartheta$ von der Ecke ζ_0, soweit er überhaupt im Polygon liegt, grösser als

$$\frac{\pi \, . \, ab}{c\left(\log \frac{1}{\vartheta} + \pi \cdot \frac{a+b}{c}\right)}$$

ist.

Damit ist auch der Fall einer parabolischen Spitze erledigt; denn die weitere Schlussfolgerung in Betreff der Abschätzung von G selbst ist genau dieselbe, wie für eine Ecke mit einem nicht verschwindendem Winkel, der $< \pi$ ist.

§ 11.

Abschätzung in der Umgebung parabolischer Ecken mit nicht verschwindendem Winkel.

Wenn in einer Ecke des Bereichs zwei nicht derselben Kreislinie angehörige Kreisbogen unter einem Winkel zusammenstossen, welcher ein von 0 verschiedenes Multiplum von π ist, dann stellt sich die Schwierigkeit ein, dass man keinen beide Randkreise orthogonal schneidenden Kreis construiren kann, der vom Bereiche ein nicht zerfallendes die Ecke enthaltendes Flächenstück abschnitte. Wir müssen uns in diesem Falle zur Abschneidung der Ecke transcendenter Curven bedienen, welche beide Randkreise orthogonal schneiden und in möglichst einfacher Weise eine conforme Abbildung des abgeschnittenen Stücks auf einen Halbkreis und damit eine Fourier'sche Entwicklung gestatten.

ζ_0 sei die Ecke, der Winkel $\lambda\pi$, unter λ jetzt eine ganze positive Zahl verstanden. Man muss jedoch bei gleichem Werth der Zahl λ immer noch zwei ganz verschiedene Arten von Winkeln unterscheiden, die man durch keine lineare Transformation des ζ mit einander zur Deckung bringen kann. Ich will sie als Winkel erster und zweiter Art benennen und unterscheide sie in folgender Weise: Die parabolische Ecke soll eine solche der ersten Art heissen, wenn der zweite Randkreis links vom ersten Randkreis liegt, dagegen eine solche der zweiten Art, wenn der zweite Randkreis rechts vom ersten liegt, den ersten Randkreis immer so durchlaufen gedacht, dass die Polygonfläche zur Rechten liegt.

Es sei nun α derjenige Punkt des ersten Randkreises, welcher der Ecke ζ_0 diametral gegenüberliegt, β der ζ_0 diametral gegenüberliegende Punkt des zweiten Randkreises. Ich setze dann:

$$(1) \qquad \frac{\zeta - \alpha}{\zeta - \zeta_0} = \frac{1}{i\pi} \cdot \frac{\beta - \alpha}{\beta - \zeta_0}\left\{\pm \frac{1}{\lambda} Z^{-\lambda} + \log Z\right\} \quad Z = r \, . \, e^{i\varphi},$$

mit der Massgabe, dass das obere oder das untere Vorzeichen für das erste Glied in der Klammer zu wählen ist, je nachdem man es mit einer Ecke der ersten oder der zweiten Art zu thun hat.

Von den Curven $r = \text{const.}$ sind es diejenigen, die man für $0 \leq r \leq 1$ erhält, die an Stelle der früher benutzten Orthogonalkreise

zur Abschneidung der Ecke dienen. Die Curven $r =$ const. < 1 stehen auf beiden Randkreisen senkrecht und winden sich für $0 < r$ in durchweg endlicher Entfernung vom Punkte ζ_0 durch alle Blätter des Winkels

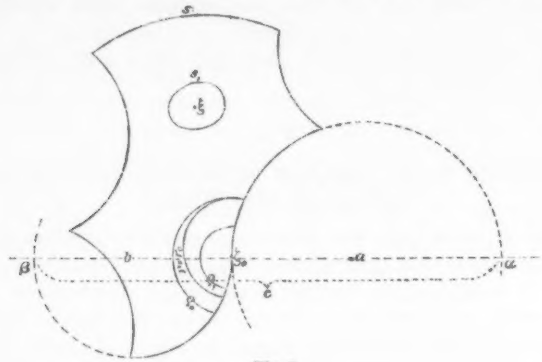


Fig. 7.

hindurch vom ersten bis zum zweiten Randkreis; nur die Curve $r = 1$ kann einen oder beide Randkreise berühren, statt orthogonal zu schneiden. Wenn $r_1 < r_2$ ist, so verläuft die Curve $r = r_1$ ganz innerhalb des durch die Curve $r = r_2$ abgeschnittenen Flächenstücks.

Durch Z als Function von ζ wird das durch eine Curve $r =$ const. abgeschnittene Stück des Polygons immer auf einen Halbkreis vom Radius r conform abgebildet, und zwar so, dass der Eckpunkt dem Kreiscentrum, die beiden Randstücke den beiden Hälften des Durchmessers, das Bogenstück dem Halbkreisbogen entspricht.

Es ist nun für unsere Abschätzungsaufgabe unbedingt nöthig, einerseits eine untere und eine obere Grenze für den Abstand ϱ einer Curve $r =$ const. vom Punkte ζ_0 anzugeben, andererseits für einen Punkt, der im selben Blatt gemessen den Abstand ϱ von ζ_0 besitzt, eine obere und eine untere Grenze für den zugehörigen Werth von r zu bestimmen. Beides muss für eine endliche Umgebung der Ecke ζ_0 ausgeführt werden.

Die Lösung dieser beiden Aufgaben bietet keinerlei principielle Schwierigkeit, ist aber doch mit so umständlichen Rechnungen verknüpft, dass ich diesen Paragraphen ungebührlich in die Länge ziehen müsste, wollte ich die Rechnungen selbst hier wiedergeben. Ich beschränke mich daher auf die Angabe des Resultats:

Es werde

$$a = |\alpha - \zeta_0|,$$
$$b = |\beta - \zeta_0|,$$
$$c = |\alpha - \beta|$$

gesetzt. Es bedeute ferner R die zwischen 0 und 1 gelegene reelle Wurzel der transcendenten Gleichung:

$$\lambda \,.\, R^{\lambda}\left(\log \frac{1}{R} + \pi \cdot \frac{a+b}{c}\right) = 1 .$$

Dann hat man zunächst folgende beiden Sätze:

Im ganzen Intervall $0 \leqq r \leqq 1$ *gilt die Ungleichung:*

$$(\alpha) \qquad \varrho > \lambda \pi \cdot \frac{ab}{c} \cdot \frac{r^{\lambda}}{1 + \lambda r^{\lambda}\left(\log \frac{1}{r} + \pi \cdot \frac{a+b}{c}\right)},$$

im Intervall $0 \leqq r \leqq R$ *die Ungleichung:*

$$(\beta) \qquad \varrho < \lambda \pi \cdot \frac{ab}{c} \cdot \frac{r^{\lambda}}{1 - \lambda r^{\lambda}\left(\log \frac{1}{r} + \pi \cdot \frac{a+b}{c}\right)}.$$

Es bedeute ferner ϑ irgend einen beliebig gewählten ächten Bruch und R_1 die zwischen 0 und R liegende reelle Wurzel der transcendenten Gleichung

$$\lambda R_1^{\lambda}\left(\log \frac{1}{R_1} + \pi \cdot \frac{a+b}{c}\right) = \vartheta .$$

Dann besteht der Satz:

Für alle in der Umgebung der Ecke ζ_0 *liegenden Punkte, deren Entfernung von der Ecke* ζ_0

$$\varrho \leqq \lambda \pi \cdot \frac{ab}{c} \cdot \frac{R_1^{\lambda}}{1+\vartheta}$$

ist, gilt die doppelte Ungleichung:

$$(\gamma) \qquad \varrho^{\frac{1}{\lambda}} \cdot \left(\frac{1-\vartheta}{\lambda \pi} \cdot \frac{c}{ab}\right)^{\frac{1}{\lambda}} < r < \varrho^{\frac{1}{\lambda}} \left(\frac{1+\vartheta}{\lambda \pi} \cdot \frac{c}{ab}\right)^{\frac{1}{\lambda}} \leqq R_1 .$$

Nach diesen vorbereitenden Sätzen können wir die Aufgabe, eine obere Grenze für $\left|\frac{\partial G}{\partial t}\right|$ innerhalb einer endlichen Umgebung der Ecke anzugeben, leicht durchführen.

Ich denke mir um ζ_0 als Centrum einen Kreis beschrieben, dessen Radius ϱ_0 so gross ist, als es nur mit den beiden Bedingungen vereinbar ist, dass er von S_1 ein die Ecke ζ_0 enthaltendes Kreisbogendreieck abschneiden soll, und dass

$$\varrho_0 \leqq \lambda \pi \cdot \frac{ab}{c} \cdot \frac{R_1^{\lambda}}{1+\vartheta}$$

ist.

Nun wähle ich von den Curven $r = \text{const.}$ die äusserste nicht aus dem Kreise ϱ_0 austretende aus. Dieselbe sei

$$r = r_0.$$

Es ist dann, da mindestens ein Punkt dieser Curve die Entfernung ϱ_0 von ζ_0 besitzt, für r_0 eine untere und eine obere von 0 verschiedene Grenze durch folgende doppelte Ungleichung gegeben, welche unmittelbar aus (γ) folgt:

$$(\gamma') \qquad \varrho_0^{\frac{1}{\lambda}} \left(\frac{1-\vartheta}{\lambda\pi} \cdot \frac{c}{ab}\right)^{\frac{1}{\lambda}} < r_0 < \varrho_0^{\frac{1}{\lambda}} \left(\frac{1+\vartheta}{\lambda\pi} \cdot \frac{c}{ab}\right)^{\frac{1}{\lambda}} \leqq R_1.$$

Die Green'sche Function G, welche längs der Randstücke des durch die Curve $r = r_0$ abgeschnittenen Bereichs verschwindet und längs des Bogenstückes unterhalb der endlichen oberen Grenze M bleibt, gestattet eine Entwicklung

$$G = a_1 r \sin \varphi + a_2 r^2 \sin 2\psi + a_3 r^3 \sin 3\varphi + \cdots,$$

worin

$$|a_\nu| < \frac{2M}{r_0^\nu}$$

ist. Es ergiebt sich wie früher

$$\left|\frac{\partial G}{\partial t}\right| \leqq \left|\frac{dP}{dZ}\right| \cdot \left|\frac{dZ}{d\zeta}\right|.$$

$$\left|\frac{dP}{dZ}\right| \leqq |a_1| + 2|a_2| r + 3\,|a_3| \cdot r^2 + \cdots < \frac{2Mr_0}{(r_0 - r)^2}.$$

Ferner findet man

$$\left|\frac{dZ}{d\zeta}\right| \leqq \pi \cdot \frac{ab}{c} \cdot \frac{r^{\lambda+1}}{1 - r^\lambda} \cdot \frac{1}{\varrho^2}.$$

Alles zusammen ergiebt das Resultat:

Für jeden innerhalb der Curve $r = r_0$ gelegenen Punkt gilt die Ungleichung

$$\left|\frac{\partial G}{\partial t}\right| < M \cdot 2\pi \cdot \frac{ab}{c} \cdot \frac{r_0 \cdot r^{\lambda+1}}{(r_0 - r)^2 (1 - r^\lambda)} \cdot \frac{1}{\varrho^2}.$$

Diese Ungleichung gilt zwar auf der ganzen Curve r, nicht aber auch innerhalb des ganzen durch dieselbe abgeschnittenen Gebiets, da $\frac{1}{\varrho^2}$ beim Zuschreiten auf ζ_0 immer grösser wird.

Aber man kann wenigstens einen Theil der r enthaltenden Factoren durch Constanten ersetzen, wenn man nicht für das ganze Gebiet

$0 \leqq r \leqq r_0$ eine obere Grenze verlangt, sondern sich auf das kleinere Gebiet $0 \leqq r \leqq \varkappa r_0$ beschränkt, wobei $\varkappa$, wie oben ϑ, irgend einen willkürlich gewählten echten Bruch bedeutet. Dann ist

$$\frac{r_0}{(r_0 - r)^2} \leqq \frac{1}{r_0(1-\varkappa)^2} < \varrho_0^{-\frac{1}{\lambda}} \cdot \frac{1}{(1-\varkappa)^2} \cdot \left(\frac{\lambda\pi}{1-\vartheta} \cdot \frac{ab}{c}\right)^{\frac{1}{\lambda}}, \quad \text{(nach } \gamma')$$

$$\frac{1}{1 - r^\lambda} \leqq \frac{1}{1 - \varkappa^\lambda r_0^\lambda} < \frac{1}{1 - \varkappa^\lambda R_1^\lambda}, \quad \text{(nach } \gamma')$$

$$r^{\lambda+1} < \left(\frac{1+\vartheta}{\lambda\pi} \cdot \frac{c}{ab}\right)^{1+\frac{1}{\lambda}} \cdot \varrho^{1+\frac{1}{\lambda}}. \quad \text{(nach } \gamma)$$

Alles zusammengefasst ergiebt

$$\left|\frac{\partial G}{\partial t}\right| < M \cdot \frac{2(1+\vartheta)^{1+\frac{1}{\lambda}}}{\lambda(1-\vartheta)^{\frac{1}{\lambda}}(1-\varkappa)^2(1-\varkappa^\lambda R_1^\lambda)} \cdot \frac{1}{\varrho_0^{\frac{1}{\lambda}}} \cdot \varrho^{\frac{1}{\lambda}-1}.$$

Diese Ungleichung gilt für jeden Punkt innerhalb und auf der Curve $r = \varkappa r_0$. Es ist zu zeigen, dass dies ein endliches Gebiet ist, d. h. dass die Minimalentfernung ϱ_1 dieser Curve vom Punkte ζ_0 eine angebbare endliche Grösse ist. In der That findet man durch wiederholte Anwendung der Ungleichung γ, dass

$$\varrho_1 > \frac{1-\vartheta}{1+\vartheta} \cdot \varkappa^\lambda \cdot \varrho_0$$

ist.

Damit sind wir am Ziele. Wir haben in der That für eine endliche angebbare Umgebung der Ecke ζ_0 eine ebensolche Function des Abstandes als obere Grenze für $\left|\frac{\partial G}{\partial t}\right|$ gefunden, wie für eine gewöhnliche Ecke mit überstumpfem Winkel. Ich will nur zum Schluss alle zur Abschätzung dienenden Operationen noch einmal kurz zusammenfassen.

Es sei ζ_0 die Ecke, α ihr Gegenpunkt auf dem ersten, β ihr Gegenpunkt auf dem zweiten Randkreise; es sei ferner a die Entfernung der Punkte α und ζ_0, b diejenige der Punkte β und ζ_0, c diejenige der Punkte α und β von einander.

Es sei ferner ϑ ein irgendwie gewählter echter Bruch, R_1 die zwischen 0 *und* 1 *liegende reelle Wurzel der Gleichung:*

$$\lambda R_1^\lambda \left(\log\frac{1}{R_1} + \pi \cdot \frac{a+b}{c}\right) = \vartheta.$$

Man construire dann einen Kreis mit dem Centrum ζ_0, welcher von dem Gebiet S_1 ein möglichst grosses die Ecke ζ_0 enthaltendes Kreisbogendreieck abschneidet, dessen Radius ϱ_0 aber doch

$$\leqq \lambda\pi \cdot \frac{ab}{c} \cdot \frac{R_1^\lambda}{1+\vartheta}$$

ist.

Bedeutet nun $\varkappa$ einen zweiten beliebig gewählten echten Bruch, so gilt innerhalb und auf dem Rande eines mit dem Radius $\varrho_1 = \frac{1-\vartheta}{1+\vartheta} \cdot \varkappa^\lambda \cdot \varrho_0$ um ζ_0 beschriebenen Kreises die Ungleichung:

$$\left|\frac{\partial G}{\partial t}\right| < M \frac{2(1+\vartheta)^{1+\frac{1}{\lambda}}}{\lambda(1-\vartheta)^{\frac{1}{\lambda}}(1-\varkappa)^2\left(1-\varkappa^\lambda R_1^\lambda\right)} \cdot \frac{1}{\varrho_0^{\frac{1}{\lambda}}} \cdot \varrho^{\frac{1}{\lambda}-1} = g' \cdot \varrho^{\frac{1}{\lambda}-1}.$$

Die weiteren Schritte betreffend die Abschätzung von G selbst sind genau dieselben, wie für gebrochene λ, welche $\geqq 1$ sind.

Die parabolischen Ecken mit nicht verschwindenden Winkeln bieten also nur in der Herleitung des Resultats Besonderheiten, während das Resultat selbst genau von derselben Art ist, wie bei gewöhnlichen Ecken.

Die nichtparabolischen Ecken mit ganzzahligem Werthe von λ, bei denen also die beiden Randkreise zusammenfallen, erledigen sich vollständig nach § 9 wie gewöhnliche Ecken; man hat als Punkt $\bar{\zeta}_0$ nur den dem Punkte ζ_0 auf dem Randkreise diametral gegenüberliegenden Punkt zu nehmen.

§ 12.

Abschätzung in der Umgebung von Ecken mit rein imaginären Winkeln.

Man spricht von einem rein imaginären Polygonwinkel, wenn zwei aufeinanderfolgende Seiten des Polygons sich überhaupt nicht schneiden, sondern statt einer eigentlichen Ecke zwischen sich ein von der Polygonfläche auslaufendes und unendlich oft sich zwischen ihnen hindurchwindendes Kreisband enthalten. Man vergleiche hierüber die Arbeit von Schilling: Beiträge zur geometrischen Theorie der Schwarz'schen s-Function, Math. Ann. Bd. 44. 1894, insbesondere wegen der imaginären Winkel § 13.

Es liege jetzt eine solche Ecke mit rein imaginärem Winkel vor. Wir sprechen wieder, wie früher, von einem ersten und einem zweiten Randkreise, die nur jetzt vollständig von einander getrennt liegen. Die beiden Randkreise gehören einem bestimmten Kreisbüschel an, dessen Grenzpunkte ζ_1 und ζ_2 heissen mögen, und zwar so, dass ζ_1

auf der Seite des ersten, ζ_2 auf der des zweiten Randkreises liegt. Wir denken uns nun einen solchen durch ζ_1 und ζ_2 gehenden und also die beiden Randkreise orthogonal schneidenden Kreis construirt, welcher

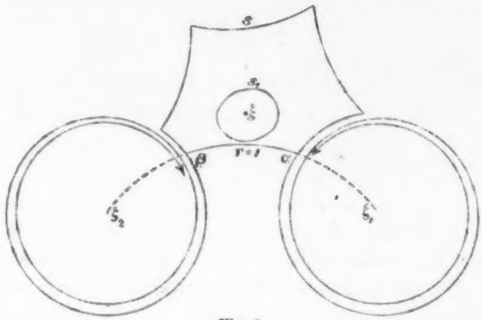


Fig. 8.

von der Fläche S_1 ein möglichst grosses einseitig begrenztes nach der andern Seite unendlich oft zwischen den beiden Randkreisen herumlaufendes Band abtrennt. Der Schnittpunkt dieses Kreises mit dem ersten Randkreise sei α, mit dem zweiten Randkreise β. Der rein imaginäre Winkel der Ecke ist dann durch die Formel gegeben:

$$\lambda\pi = i \cdot \log \frac{\alpha - \zeta_2}{\alpha - \zeta_1} \cdot \frac{\beta - \zeta_1}{\beta - \zeta_2},$$

worin für den Logarithmus der Hauptwerth zu setzen ist.

Setzt man

$$\lambda = i\lambda',$$

so hat λ' den reellen positiven Werth:

$$\lambda' = \frac{1}{\pi} \log \frac{\alpha - \zeta_2}{\alpha - \zeta_1} \cdot \frac{\beta - \zeta_1}{\beta - \zeta_2},$$

Nun setze man

$$\frac{\zeta - \zeta_2}{\zeta - \zeta_1} = \frac{\alpha - \zeta_2}{\alpha - \zeta_1} Z^{i\lambda'}, \quad Z = r . e^{i\varphi}.$$

Dann bildet Z das durch den Kreis $\alpha\beta$ abgeschnittene unendliche Kreisband auf einen Halbkreis vom Radius 1 in der Weise ab, dass der Bogen $\alpha\beta$ dem Halbkreisbogen und die beiden von α bezw. β aus unendlich oft zu durchlaufenden Randkreise den beiden Hälften des Durchmessers entsprechen. $r =$ const. bedeutet dabei in der ζ-Ebene einen Kreis des durch ζ_1 und ζ_2 hindurchgehenden Büschels, und durch $0 \leqq \varphi \leqq \pi$ ist dasjenige Stück eines solchen Kreises gegeben, welches zwischen den beiden Randkreisen liegt.

In dem ganzen durch den Kreisbogen $\alpha\beta$ abgeschnittenen Kreisband gilt die Entwicklung

$$G = a_1 r \sin\varphi + a_2 r^2 \sin 2\varphi + a_3 r^3 \sin 3\varphi + \cdots,$$

worin

$$|a_\nu| < 2M$$

ist. Man schliesst wie früher

$$\left|\frac{dP}{dZ}\right| < 2M\cdot\frac{1}{(1-r)^2},$$

$$\left|\frac{dZ}{d\zeta}\right| = \frac{r}{\lambda'}\cdot\frac{|\zeta_1-\zeta_2|}{|\zeta-\zeta_1|\cdot|\zeta-\zeta_2|}.$$

Es bezeichne $c = |\zeta_1 - \zeta_2|$ die gegenseitige Entfernung der beiden Punkte ζ_1 und ζ_2, ferner a die Minimalentfernung des ersten Randkreises vom Punkte ζ_1, b die Minimalentfernung des zweiten Randkreises von ζ_2.

Dann ist jedenfalls in dem ganzen Kreisband

$$|\zeta-\zeta_1| \geqq a, \qquad |\zeta-\zeta_2| \geqq b,$$

ohne dass aber die Gleichheitszeichen in beiden Ungleichungen gleichzeitig sich einstellen können. Also ist

$$\left|\frac{dZ}{d\zeta}\right| < \frac{1}{\lambda'}\cdot\frac{c}{ab}\cdot r$$

und folglich

$$\left|\frac{\partial G}{\partial t}\right| < M\cdot\frac{2c}{\lambda' ab}\cdot\frac{r}{(1-r)^2}.$$

Die rechte Seite dieser Ungleichung nimmt in dem Intervall $0 \leqq r < 1$ mit r monoton ab, und sie gilt daher nicht nur für r selbst, sondern mit demselben numerischen Werthe der rechten Seite erst recht für alle kleineren Werthe von r, d. h. nicht nur für den Kreisbogen r, der das unendliche Kreisband überquert, sondern für das ganze durch ihn vom Bereiche abgeschnittene unendliche einseitig begrenzte Kreisband.

Setze ich z. B. $0 \leqq r \leqq e^{-\frac{2\pi}{\lambda'}}$, so erhält man ein Kreisband, welches scheinbar ebenso, wie das Band $0 \leqq r \leqq 1$ durch den Bogen $\alpha\beta$ begrenzt ist, aber einen gerade einmal umlaufenden Kreisring weniger enthält, als das letztere.

Innerhalb und auf der Grenze des eben beschriebenen Kreisbandes gilt also für $\left|\frac{\partial G}{\partial t}\right|$ *die Ungleichung*

$$\left|\frac{\partial G}{\partial t}\right| < M\cdot\frac{2c}{\lambda' ab}\cdot\frac{e^{\frac{2\pi}{\lambda'}}}{\left(e^{\frac{2\pi}{\lambda'}}-1\right)^2} = g.$$

Das weitere Verfahren für die Abschätzung von G selbst ist dann genau dasselbe, wie bei einem gewöhnlichen Randpunkte oder bei einer Ecke mit hohlem Winkel.

§ 13.

Abschätzung der Aenderung von G im Innern des Polygons bei Einengung desselben um die kleine Grösse ε.

Das Endergebniss der Betrachtungen von § 5 bis § 12 ist das folgende:

Engt man ein durch eine endliche Anzahl von Kreisbogenstücken mit endlicher Krümmung begrenztes Polygon dadurch ein, dass man längs des ganzen Randes einen Flächenstreifen von der beliebig klein zu machenden Breite ε abtrennt, so vermindert sich die Green'sche Function des Bereichs nur um eine in dem verkleinerten Polygon durchweg positive holomorphe Potentialfunction, — die ich η nennen will —, deren Werthe auf dem Rande des verkleinerten Bereichs überall kleiner sind als $\varepsilon . g$.

Dabei sind die Werthe g, wenn kein Winkel des ursprünglichen Kreisbogenpolygons grösser als π ist, durch eine endliche Anzahl geometrischer Constructionen und Abmessungen abschätzbare längs des ganzen Randes endliche von ε unabhängige Werthe.

Besitzt aber der ursprüngliche Bereich Winkel $\lambda\pi$, welche grösser als π sind, so ist g zwar bis in beliebige, wenn nur endlich und von ε unabhängig vorgegebene Nähe dieser Winkelpunkte von ε unabhängig, endlich und durch eine endliche Anzahl von Schritten abschätzbar, verhält sich jedoch in der Umgebung einer solchen Ecke selbst wie

$$\varrho^{\frac{1}{\lambda}-1} g',$$

unter ϱ den Abstand von der Ecke und unter g' wieder eine endliche abschätzbare Grösse verstanden.

Man kann in der Umgebung einer solchen Ecke mit überstumpfem Winkel $\lambda\pi$ daher keine von ε unabhängige endliche Grösse g angeben, so dass η längs des Randes des verkleinerten Polygons auch in der Umgebung der Ecke $< \varepsilon g$ bliebe; wohl aber kann man eine endliche von ε unabhängige Grösse g' angeben von der Bedeutung, dass auch in der Nähe der Ecke überall $\eta < \varepsilon^{\frac{1}{\lambda}} . g'$ ist.

Aus diesen beiden Sätzen über die Werthe von η auf dem Rande des eingeengten Bereichs können wir sofort folgende beiden Sätze über die Werthe von η im Innern und auf dem Rande folgern:

1) *Wenn kein Winkel des ursprünglichen Polygons grösser als* π *ist, so beträgt die Aenderung* η *der Green'schen Function bei Einengung des Bereichs um einen Streifen von der beliebig klein zu machenden Breite* ε *im Innern und auf dem Rande des eingeengten Bereichs überall weniger als* εg, *wobei* g *eine endliche von* ε *unabhängige durch eine endliche Anzahl von Schritten abschätzbare Grösse ist.*

2) *Wenn ein oder mehrere Polygonwinkel grösser als* π *sind, und* $\lambda\pi$ *der grösste unter ihnen ist, so ist die Aenderung* η *der Green'schen Function im Innern und auf dem Rande des verkleinerten Bereichs überall kleiner als* $\varepsilon^{\frac{1}{\lambda}} . g'$, *unter* g' *eine abschätzbare von* ε *unabhängige Grösse verstanden*, nämlich den Werth g', welcher sich nach § 9 für die Ecke $\lambda\pi$ ergiebt, bezw., wenn mehrere Ecken den Winkel $\lambda\pi$ haben, der grösste der zugehörigen Werthe g'.

Damit ist die Stetigkeit der Green'schen Function bei Einengung des Bereichs nicht nur bewiesen, sondern es ist auch der Betrag der Aenderung abgeschätzt.

Insbesondere sieht man, dass *in jedem Falle die Aenderung der Green'schen Function im ganzen eingeengten Gebiet einschliesslich des Randes gleichmässig und stetig mit* ε *verschwindet, sei es proportional mit* ε *selbst, sei es mit einer Wurzelgrösse* $\varepsilon^{\frac{1}{\lambda}}$.

Wenn wir nun auf den Satz 2) und seine Beweisgründe besonders achten, so drängt sich uns nothwendig die Frage auf, *ob denn* η *auch im Innern des Bereiches* Σ *nothwendig überall nur in der Ordnung* $\frac{1}{\lambda}$ *verschwindet, oder ob sich die Angabe des Satzes* 2) *nicht vielleicht nur auf die unmittelbare Umgebung der Ecke* $\lambda\pi$ *bezieht, während in endlicher Entfernung von derselben* η *stärker verschwindet, etwa von der ersten Ordnung, wie* ε *selbst?* Es wird diese Vermuthung um so wahrscheinlicher, als ja längs des Randes η thatsächlich nur in der Nähe der Ecken in der Ordnung $\frac{1}{\lambda}$, in endlicher Entfernung von denselben aber in der ersten Ordnung verschwindet.

Aber die Vermuthung ist nur theilweise richtig, nämlich nur dann, wenn alle Winkel $< 2\pi$ sind. Giebt es dagegen Ecken mit $\lambda > 2$, dann erhöht sich zwar in endlicher Entfernung von der Ecke die Ordnung des Verschwindens auch noch, aber nicht von $\frac{1}{\lambda}$ auf 1, sondern nur auf $\frac{2}{\lambda}$. Ist $\lambda = 2$, so verschwindet η in endlicher Entfernung von den Ecken wie $\varepsilon \log \frac{1}{\varepsilon}$. Diese vorläufigen Angaben sollen in den nächsten Paragraphen bewiesen werden.

§ 14.

Ansatz zur genaueren Abschätzung.

Um die am Schlusse des letzten Paragraphen ausgesprochenen Sätze zu beweisen, werde ich folgendes Verfahren einschlagen:

Es mögen die Werthe von η längs des Randes σ von Σ mit $\bar{\eta}$ bezeichnet werden; für dieselben ist an jeder Stelle eine obere Grenze abgeschätzt. Es kommt nun darauf an, die im ganzen Bereich Σ holomorphe Potentialfunction η für irgend einen im Innern des Bereiches gelegenen Punkt ζ abzuschätzen, wobei wir uns auf die bereits ausgeführte Abschätzung der Randwerthe $\bar{\eta}$ zu stützen haben.

Es sei Γ_ζ^ξ die Green'sche Function des Bereichs Σ mit der Unstetigkeitsstelle ζ und der laufenden Variablen ξ, $\frac{\partial \Gamma_\zeta^\xi}{\partial n}$ ihre Ableitung nach der Normale des Randes, die Normale nach Innen gerechnet. Dann ist der Werth von η in irgend einem Punkte ζ im Innern des Bereichs durch die bekannte Formel gegeben:

$$\eta(\zeta) = \frac{1}{2\pi}\int \bar{\eta} \cdot \frac{\partial \Gamma_\zeta^\xi}{\partial n} \cdot d\sigma,$$

das Integral um den ganzen Rand σ erstreckt gedacht.

Von diesem Integrale wissen wir, in welcher Weise $\bar{\eta}$ in den einzelnen Punkten des Randes mit ε verschwindet. Um die Grössenordnung des Integrals abzuschätzen, müssen wir also noch untersuchen, wie sich $\frac{\partial \Gamma_\zeta^\xi}{\partial n}$ als Function von ε längs des Randes verhält.

Diese Discussion würde sehr einfach sein, wenn der Bereich Σ nur von Kreisbogen mit endlicher Krümmung begrenzt wäre und zudem keine überstumpfen Winkel besässe. Dann wäre $\frac{\partial \Gamma}{\partial n}$ längs des ganzen Randes kleiner als eine endliche angebbare von ε unabhängige Grösse, und es käme nur noch auf das Integral $\int \bar{\eta}\, d\sigma$ an, welches in der Ordnung ε verschwindet. Das ist jedoch nur der Fall, wenn kein Winkel $\lambda\pi$ des ursprünglichen Polygons S grösser als π ist.

Im Falle aber, wo S überstumpfe Winkel hat, hat zwar Σ keine überstumpfen Winkel, wohl aber Kreisbogen mit einem sehr kleinen Krümmungsradius, nämlich um jede überstumpfe Ecke des Bereichs S herum einen Kreisbogen vom Radius ε und mit der Winkelöffnung $(\lambda - 1)\pi$. Längs dieser Kreisbogenstücke und auch schon in der Nachbarschaft derselben auf den anstossenden Kreisbogen von endlicher Krümmung wird aber $\frac{\partial \Gamma}{\partial n}$ bei verschwindendem ε unendlich. Es ist

näher zu untersuchen, in welcher Ordnung dieses Unendlichwerden eintritt.

Ich theile nun zuerst den Rand und entsprechend das gesuchte Potential η in eine gewisse Zahl einzelner Bestandtheile, von denen immer einer der Umgebung je einer überstumpfen Ecke entspricht und einer allen den Randtheilen, welche um mehr als eine gewisse endliche Strecke von jeder überstumpfen Ecke entfernt sind. Nämlich ich construire um jede überstumpfe Ecke ζ_ν des Bereichs S als Mittelpunkt einen Kreis von einem endlichen Radius ϱ_ν, den ich mir jedoch vorbehalte so klein zu machen, als es das Bedürfniss verlangt; jedenfalls soll er wenigstens so klein sein, dass er ausser der Ecke ζ_ν keine weitere Ecke des Bereichs S umfasst, und dass er mit keinem der anderen construirten Kreise collidirt. Dasjenige Stück der Curve σ, welches innerhalb dieses Kreises liegt, heisse σ_ν und die Gesammtheit aller Stücke, welche von der Curve σ nach Abschneidung aller Stücke σ_ν übrig bleiben, heisse σ_0, so dass ich also, wenn m überstumpfe Ecken vorhanden sind, σ in $m+1$ Bestandtheile zerlegt habe:

$$\sigma = \sigma_0 + \sigma_1 + \sigma_2 + \cdots + \sigma_m.$$

Entsprechend denke ich mir das Potential η in eine Summe

$$\eta = \eta_0 + \eta_1 + \eta_2 + \cdots + \eta_m$$

zerlegt, indem η_ν $(\nu = 0, 1, 2, \ldots, m)$ dadurch definirt wird, dass es längs σ_ν die dort vorgeschriebenen Werthe $\bar{\eta}$ besitzt, längs der übrigen Stücke von σ aber verschwindet.

Was zunächst η_0 betrifft, so kann ich durch Anwendung der früher für den Bereich S entwickelten Methoden auf den Bereich Σ für die Randstücke σ_0, welche ja keiner überstumpfen Ecke unendlich nahe kommen, eine endliche Grösse g_0 angeben, so dass die Werthe von $\bar{\eta}$ längs aller Stücke σ_0 durchweg kleiner als εg_0 sind. Dann muss auch $\eta_0(\zeta)$, welches längs σ_0 mit $\bar{\eta}$ übereinstimmt, längs der übrigen Randstücke von Σ verschwindet, im Innern von Σ überall derselben Ungleichung, wie seine Randwerthe genügen:

$$\eta_0(\zeta) < \varepsilon g_0.$$

Mithin verschwindet η_0 für jeden innern Punkt ζ mit ε in der ersten Ordnung, und zwar so, dass man bei jeder Lage von ζ den Werth des Proportionalitätsfactors abschätzen kann.

Für die Abschätzung der übrigen Theilpotentiale, z. B. η_1 hat man nur einfach die in § 8 und § 11 angegebenen Formeln statt auf die Begrenzung s von S auf die Begrenzung σ von Σ anzuwenden. Dabei braucht man in η_1 nur das in der Umgebung der Ecke ζ_1

liegende Curvenstück σ_1 zu berücksichtigen, welches aus 3 Theilen (Fig. 9) besteht, nämlich aus zwei endlichen Seitenstücken AB, $B'A'$ von endlicher Krümmung und dem Mittelstück BB' mit dem Radius ε und der Winkelöffnung $(\lambda - 1)\pi$. B und B' sind parabolische Ecken mit Winkeln π.

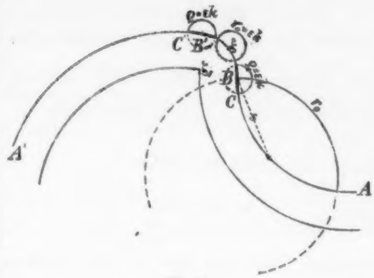


Fig. 9.

Zuerst werde ich $\frac{\partial \overline{\Gamma}}{\partial n}$ in der Umgebung der Punkte B und B' abschätzen, dann längs derjenigen Punkte von BB', welche nicht schon mit den Punkten B und B' erledigt sind, und dann längs derjenigen Theile von AB und $A'B'$, für welche die Abschätzung nicht schon bei B und B' mit ausgeführt ist.

Bei diesen Abschätzungen ist jedesmal zu beachten, wie gross die in den Formeln § 8 und § 11 vorkommenden Grössen r_0 und ϱ_0 hier werden, und wie gross M, das Maximum von Γ auf dem Kreise r_0 bez. ϱ_0, sein kann.

Schliesslich hat man die für $\frac{\partial \overline{\Gamma}}{\partial n}$ gefundenen Resultate mit den für $\overline{\eta}$ bekannten zusammenzusetzen und die Integration auszuführen.

§ 15.

Abschätzung von $\frac{\partial \overline{\Gamma}}{\partial n}$ in der Umgebung einer Ecke.

1) Für die Umgebung von B (oder B') sind die Formeln § 11 anzuwenden.

Es sei R der Krümmungsradius des dem Bogen AB parallelen Randkreises von S, $R \pm \varepsilon$ also der Krümmungsradius des Bogens AB. Ich will nun voraussetzen, dass ε immer so klein gewählt sei, dass $\frac{\varepsilon}{R} \leqq 0,1$ ist.

Die Grössen ϑ und $\varkappa$ in den Formeln sollen $= \frac{1}{2}$ angenommen werden, λ ist $= 1$ zu setzen. Ausserdem ist

$$a = 2\varepsilon, \quad b = 2(R \pm \varepsilon), \quad c = 2R, \quad \frac{a+b}{c} = 1 + 2\,\frac{\varepsilon}{R} \text{ oder } = 1,$$

also

$$1 \leqq \frac{a+b}{c} \leqq 1,2.$$

Daraus folgt

$$0{,}0793 \leq R_1 \leq 0{,}0901.$$

Um B als Centrum ist jetzt ein Kreis zu construiren, welcher weder die Ecke B' mit einschliesst, noch einen grösseren Radius als $\pi \cdot \frac{ab}{c} \cdot \frac{R_1}{1+\vartheta} = \frac{4}{3}\pi\left(1 \pm \frac{\varepsilon}{R}\right) R_1 \cdot \varepsilon$ hat. Diesen Bedingungen wird gerade genügt, indem man setzt

$$\varrho_0 = 0{,}299 \, . \, \varepsilon, \qquad \text{wenn} \quad \lambda \geqq 1{,}0955 \quad \text{ist},$$

$$\varrho_0 = 2 \sin \frac{(\lambda - 1)\pi}{2} \cdot \varepsilon, \qquad „ \quad \lambda < 1{,}0955 \quad „ \, .$$

Endlich hat man für M, den grössten Werth von Γ längs des Kreises ϱ_0, zu berücksichtigen, dass sich dieser Kreis höchstens bis auf die Entfernung

$$\varrho_0 + \varepsilon = 1{,}299 \cdot \varepsilon \quad \text{bezw.} \quad = \left(1 + 2 \sin \frac{(\lambda - 1)\pi}{2}\right) \varepsilon$$

von ξ_1 entfernt, dass also G_ζ^ξ, die Green'sche Function von S, längs des Kreises ϱ_0 kleiner ist, als eine kleine abschätzbare Grösse

$$(\varrho_0 + \varepsilon)^{\frac{1}{\lambda}} \, . \, g = \varepsilon^{\frac{1}{\lambda}} \, . \, g',$$

und dass Γ_ζ^ξ gewiss kleiner als G_ζ^ξ ist. Es ist folglich

$$M < g' \, . \, \varepsilon^{\frac{1}{\lambda}},$$

wobei g' eine abschätzbare endliche Grösse ist.

Aus allem folgt, dass innerhalb eines mit dem Radius $\varrho_1 = \frac{1}{6}\varrho_0 = k\varepsilon$ um B beschriebenen Kreises $\left|\frac{\partial \Gamma}{\partial t}\right|$ und also auch $\frac{\partial \bar{\Gamma}}{\partial n}$ der Ungleichung genügt:

$$\frac{\partial \bar{\Gamma}}{\partial n} < 6{,}283 \cdot \frac{g'}{k} \, \varepsilon^{\frac{1}{\lambda} - 1}.$$

Innerhalb eines Kreises mit dem Radius $k\varepsilon$ um B als Centrum ist

$$\frac{\partial \bar{\Gamma}}{\partial n} < g \cdot \varepsilon^{\frac{1}{\lambda} - 1},$$

worin k und g von ε unabhängige angebbare endliche Grössen sind.

2) Von dem Bogen BB' brauche ich die Abschätzung nur noch für diejenigen Punkte auszuführen, welche um mehr als $k \, . \, \varepsilon$ von den Endpunkten B und B' entfernt sind.

Für irgend einen solchen Punkt ξ ist die Formel von S. 494 an-

zuwenden; dabei setze ich $\vartheta = 0$, indem dann die Abschätzung immer nur für den betreffenden Randpunkt selbst gilt. Es wird so:

$$\left|\frac{\partial \Gamma}{\partial t}\right| < \frac{2M}{r_0}.$$

Wenn ich $r_0 = k\varepsilon$ setze, so schliesst der Kreis $r = r_0$ keinen der Punkte B und B' ein, da der Punkt ξ ja um mehr als $k\varepsilon$ von B und B' entfernt ist, während die Schnittpunkte des Kreises $k\varepsilon$ mit dem Bogen BB' nur die kleinere Entfernung $\dfrac{k\varepsilon}{\sqrt{1+\left(\frac{k}{2}\right)^2}}$ von ξ besitzen. Ich kann also für jeden noch in Betracht kommenden Punkt des Bogens BB'

$$r_0 = k\varepsilon$$

setzen. Die Maximalentfernung des Kreises $r = r_0$ von der Ecke ξ_1 ist

$$\frac{2+k}{2-k}\cdot\varepsilon,$$

folglich ist G, also auch Γ längs des ganzen Kreisbogens $r = r_0$ kleiner als

$$\left(\frac{2+k}{2-k}\right)^{\frac{1}{\lambda}}\cdot g'\cdot\varepsilon^{\frac{1}{\lambda}},$$

oder

$$M < g\cdot\varepsilon^{\frac{1}{\lambda}},$$

worin g eine abschätzbare endliche Grösse ist; also ist

$$\left|\frac{\partial \Gamma}{\partial t}\right| < \frac{2g}{k}\cdot\varepsilon^{\frac{1}{\lambda}-1},$$

und wir haben den Satz:

Auch längs des noch übrigen Theils von BB' ist überall

$$\frac{\partial \overline{\Gamma}}{\partial n} < g\cdot\varepsilon^{\frac{1}{\lambda}-1},$$

worin g eine von ε unabhängige angebbare endliche Grösse ist.

3) Auf die Punkte von AB und $A'B'$ sind die Formeln von § 8 anzuwenden, worin ich wieder $\vartheta = 0$ setze, so dass ich allerdings die Abschätzung für jeden Punkt besonders ausgeführt denken muss, dafür aber eine einfachere Formel habe.

Es ist $a = 2(R \pm \varepsilon)$ zu setzen. r_0 wähle ich so gross, dass der Kreis $r = r_0$ gerade durch den Endpunkt B der Linie AB geht, indem ich zugleich voraussetze, dass das Stück σ_1, so klein gewählt sei, dass für alle Punkte ξ der Linie AB auch wirklich der Kreis r_0 so gross, wie angegeben, gewählt werden kann, ohne mit dem Rand oder dem um ξ auszuschliessenden Gebiet in Conflict zu kommen.

Bedeutet ϱ den Abstand des Punktes ξ von der Ecke ζ_1, so ist der Maximalabstand des Kreises r_0 von der Ecke ζ_1 höchstens gleich

$$\varrho + \frac{r_0}{1 - \frac{r_0}{2(R \pm \varepsilon)}},$$

und es ist nach derselben Schlussweise wie in 1) und 2)

$$M < \left(\varrho + \frac{r_0}{1 - \frac{r_0}{2(R \pm \varepsilon)}}\right)^{\frac{1}{\lambda}} \cdot g'$$

zu setzen, und also

$$\frac{\partial \bar{\Gamma}}{\partial n} < \frac{2}{r_0}\left(\varrho + \frac{r_0}{1 - \frac{r_0}{2(R \pm \varepsilon)}}\right)^{\frac{1}{\lambda}} \cdot g'.$$

Es bedeute ferner s den Abstand des Punktes ξ von dem Punkte B. Ich will ϱ und r_0 durch s ausdrücken.

Es sei vorausgesetzt, dass der Radius ϱ_1 des σ_1 ausschneidenden Kreises um ζ_1 höchstens $= R$ gewählt sei, ferner dass $\frac{\varepsilon}{R} \leqq 0{,}1$ sei. Ausserdem bedenke man, dass nur noch solche Punkte ξ in Betracht zu ziehen sind, für welche $s > \varepsilon k$ ist:

$$\varrho \leqq R, \quad s > \varepsilon k, \quad \frac{\varepsilon}{R} \leqq 0{,}1.$$

r_0 und ϱ drücken sich folgendermassen durch s aus:

$$r_0 = \frac{s}{\sqrt{1 - \left(\frac{s}{2(R \pm \varepsilon)}\right)^2}}, \qquad \varrho = \sqrt{\varepsilon^2 + \frac{s^2}{1 \pm \frac{\varepsilon}{R}}}.$$

Hieraus folgen mit Hülfe der für ϱ, s, ε angegebenen Ungleichungen die folgenden Ungleichungen:

$$\varepsilon k < s < R \cdot \sqrt{1{,}1},$$
$$s \leqq r_0 \leqq s \cdot 1{,}230,$$
$$\frac{s}{\sqrt{1{,}1}} < \varrho \leqq s \cdot \sqrt{\frac{1}{R^2} + \frac{1}{0{,}9}},$$
$$\frac{r_0}{1 - \frac{r_0}{2(R \pm \varepsilon)}} < s \cdot 0{,}435,$$
$$\frac{\partial \bar{\Gamma}}{\partial n} < s^{\frac{1}{\lambda} - 1} \cdot 2\left(0{,}435 + \sqrt{1{,}111 + \frac{1}{k^2}}\right)^{\frac{1}{\lambda}} \cdot g'.$$

Wir haben also den Satz:

Längs des Bogenstücks AB (und entsprechend längs $A'B'$) bis

auf die Entfernung εk an den Punkt B heran ist, unter s die Entfernung vom Punkte B verstanden,

$$\frac{\partial \overline{\Gamma}}{\partial n} < g_1 \cdot s^{\frac{1}{\lambda}-1},$$

worin g_1 eine angebbare endliche von ε und s unabhängige Grösse ist.

§ 16.

Definitive Abschätzung von η im Innern von Σ.

Um das Integral

$$\eta_1 = \frac{1}{2\pi}\int \overline{\eta} \cdot \frac{\partial \overline{\Gamma}_\xi^\xi}{\partial n}\, d\sigma_1$$

auszuwerthen, theile ich den Curvenzug $ABB'A'$ in der Weise in ein Mittelstück CC' und zwei Seitenstücke AC und $C'A'$, dass ich zum Mittelstück ausser dem Bogen BB' noch je eine kleine Strecke CB und $B'C'$ bis auf die Entfernung εk rechts und links hinzunehme (Fig. 9).

Längs des Mittelstücks CC', welches die Gesammtlänge

$$\varepsilon\big((\lambda - 1)\pi + 2k\big)$$

besitzt, verhält sich, wie wir von früher wissen, $\overline{\eta}$ wie $\varepsilon^{\frac{1}{\lambda}}$, $\frac{\partial \overline{\Gamma}}{\partial n}$ nach dem vorigen Paragraphen wie $\varepsilon^{\frac{1}{\lambda}-1}$, jedes multiplicirt mit einer angebbaren endlichen von ε unabhängigen Grösse. Daraus schliesst man ohne Weiteres:

Der längs CC' zu erstreckende Theil des Integrals η_1 ist kleiner als $\varepsilon^{\frac{2}{\lambda}} \cdot g$, worin g eine angebbare endliche von ε unabhängige Grösse ist.

Weniger einfach gestaltet sich die Abschätzung für die Seitenstücke AC und $C'A'$. Hier muss ich erst die auf S. 501 für $\overline{\eta}$ angegebene obere Grenze

$$\varepsilon \cdot \varrho_0^{\frac{1}{\lambda}-1} \cdot g',$$

durch s, die Entfernung des Punktes ξ vom Punkte B bezw. B', ausdrücken.

ϱ_0, die kürzeste Entfernung des vom Punkte ξ auf den zugehörigen Randkreis von S gefällten Lotes vom Punkte ζ_1, ist gewiss nicht kleiner als die von ζ_1 aus gemessene kleinste Entfernung des zu ξ gehörigen Radiusvectors des Kreisbogens AB.

Diese Entfernung ist aber

$$\frac{s}{1 \pm \frac{\varepsilon}{R}} \sqrt{1 - \left(\frac{s}{2(R \pm \varepsilon)}\right)^2},$$

woraus ich mit Rücksicht auf die Ungleichungen

$$1{,}9 \leqq 1 \pm \frac{\varepsilon}{R} \leqq 1{,}1, \qquad s < R \cdot \sqrt{1{,}1}$$

erhalte:

$$\varrho_0 > s \cdot \frac{\sqrt{1 - \frac{1{,}1}{4 \cdot 0{,}9^2}}}{1{,}1} = s \cdot 0{,}722.$$

Folglich ist

$$\bar{\eta} < \varepsilon \cdot s^{\frac{1}{\lambda} - 1} \cdot (0{,}722)^{\frac{1}{\lambda} - 1} g',$$

und wir haben so den Satz:

Längs des ganzen Seitenstückes AC (und entsprechend längs $C'A'$) ist

$$\bar{\eta} < \varepsilon \cdot s^{\frac{1}{\lambda} - 1} \cdot g_2,$$

unter g_2 eine angebbare endliche von ε und s unabhängige Grösse verstanden.

Endlich drücke ich noch $d\sigma_1$ durch ds aus. Man bekommt

$$d\sigma_1 = \frac{|ds|}{\sqrt{1 - \left(\frac{s}{2(R \pm \varepsilon)}\right)^2}},$$

und hieraus

$$d\sigma_1 < \mp ds \cdot 1{,}230,$$

mit dem Vorzeichen $-$ längs AC, dem Zeichen $+$ längs $C'A'$.

Der Werth s_1 von s an der Integrationsgrenze A bezw. A' genügt ferner noch der Ungleichung:

$$s_1 < R \cdot \sqrt{1{,}1},$$

und der Werth von s an der andern Integrationsgrenze C bezw. C' ist $= \varepsilon . k$.

Es ist also, wenn $\lambda \gtrless 2$ ist:

$$\frac{1}{2\pi} \int_A^C \bar{\eta} \frac{\partial \bar{\Gamma}}{\partial n} d\sigma_1 < -\frac{1}{2\pi} \int_{R\sqrt{1,1}}^{\varepsilon k} \varepsilon s^{\frac{1}{\lambda} - 1} g_2 \cdot s^{\frac{1}{\lambda} - 1} g_1 \cdot ds \cdot 1{,}230$$

$$= g_1 g_2 \cdot \frac{1{,}230}{2\pi} \cdot \varepsilon \int_{\varepsilon k}^{R\sqrt{1,1}} s^{\frac{2}{\lambda} - 2} \cdot ds,$$

also, wenn $\lambda \gtrless 2$ ist:

$$< g_1 g_2 \frac{1{,}230}{2\pi} \cdot \frac{\sqrt{1{,}1}^{\frac{2}{\lambda} - 1}}{\frac{2}{\lambda} - 1} \cdot R^{\frac{2}{\lambda} - 1} \cdot \varepsilon - g_1 g_2 \cdot \frac{1{,}230}{2\pi} \cdot \frac{k^{\frac{2}{\lambda} - 1}}{\frac{2}{\lambda} - 1} \cdot \varepsilon^{\frac{2}{\lambda}},$$

wenn dagegen $\lambda = 2$ ist:

$$< g_1 g_2 \cdot \frac{1{,}230}{2\pi} \log R\sqrt{1{,}1} \cdot \varepsilon - g_1 g_2 \frac{1{,}230}{2\pi} \cdot \varepsilon \log \varepsilon k.$$

Den entsprechenden Ausdruck denke ich mir für $C'A'$ berechnet und zugefügt, ferner nehme ich das für CC' gefundene Resultat hinzu, und bekomme, wenn ich alles zusammenfasse, schliesslich einen Ausdruck folgender Art:

wenn $\lambda \gtrless 2$ ist:

$$\eta_1 < g_1 \varepsilon + g_2 \varepsilon^{\frac{2}{\lambda}}, \tag{1}$$

wenn $\lambda = 2$ ist:

$$\eta_1 < g_1 \varepsilon + g_2 \cdot \varepsilon \log \frac{R}{\varepsilon}, \tag{2}$$

wobei g_1, g_2 angebbare endliche positive Grössen sind, und R den kleineren von den Krümmungsradien der beiden Randkreise von S bedeutet.

Wenn $\lambda < 2$ ist, hat auf der rechten Seite von (1) das erste Glied den kleineren Exponenten, so dass man ε absondern kann; zugleich schreibe ich folgendermassen um:

$$\eta_1 < \varepsilon\left(g_1 + g_2 \cdot \varepsilon^{\frac{2}{\lambda}-1}\right) \leq \varepsilon\left(g_1 + g_2 \cdot (R \cdot 0{,}1)^{\frac{2}{\lambda}-1}\right),$$
$$\eta_1 < \varepsilon \cdot g.$$

In gleicher Weise findet man für $\lambda > 2$:

$$\eta_1 < \varepsilon^{\frac{2}{\lambda}}\left(g_2 + g_1 \cdot \varepsilon^{1-\frac{2}{\lambda}}\right) \leq \varepsilon^{\frac{2}{\lambda}}\left(g_2 + g_1 \cdot (R \cdot 0{,}1)^{1-\frac{2}{\lambda}}\right),$$
$$\eta_1 < \varepsilon^{\frac{2}{\lambda}} \cdot g,$$

und für $\lambda = 2$:

$$\eta_1 < \varepsilon \log \frac{R}{\varepsilon}\left(g_2 + \frac{g_1}{\log \frac{R}{\varepsilon}}\right) \leq \varepsilon \log \frac{R}{\varepsilon} \cdot \left(g_2 + \frac{g_1}{\log 10}\right),$$
$$\eta_1 < \varepsilon \log \frac{R}{\varepsilon} \cdot g.$$

Was wir so für η_1 und früher schon für η_0 ausgeführt haben, denken wir uns in gleicher Weise für $\eta_2, \eta_3, \ldots \eta_m$ gemacht und alles addirt.

Dann kann man sich wieder die niedrigste Potenz von ε herausgesetzt denken, mit Hülfe der Voraussetzung $\frac{\varepsilon}{R} \leq 0{,}1$ den übrig

bleibenden Klammerausdruck abschätzen, und bekommt so folgende abschliessende Resultate:

1) *$\eta(\zeta)$ verschwindet mit ε gleichmässig stetig überall im Innern und auf dem Rande des eingeengten Polygons.*

2) *Wenn alle Winkel des Polygons $\leqq \pi$ sind, so ist überall im Innern und auf dem Rande des eingeengten Polygons*
$$\eta(\zeta) < \varepsilon g.$$

3) *Wenn der grösste Winkel $\lambda\pi$ des Polygons $> \pi$ aber $< 2\pi$ ist, so gilt für jeden Punkt ζ im Innern und auf dem Rande des eingeengten Polygons, der sich in angebbarer endlicher Entfernung von jeder überstumpfen Ecke befindet, eine Ungleichung:*
$$\eta(\zeta) < \varepsilon g,$$
für die unmittelbare Umgebung einer überstumpfen Ecke $\lambda\pi$ aber nur eine Ungleichung
$$\eta(\zeta) < \varepsilon^{\frac{1}{\lambda}} \cdot g,$$

4) *Wenn der grösste Winkel des Polygons $= 2\pi$ ist, so gilt für jeden Punkt im Innern des eingeengten Polygons, der sich in angebbarer Entfernung von jeder überstumpfen Ecke befindet, eine Ungleichung*
$$\eta(\zeta) < \varepsilon \log \frac{R}{\varepsilon} \cdot g,$$
für jeden Punkt des Randes, der sich in angebbarer Entfernung von jeder überstumpfen Ecke befindet, eine Ungleichung:
$$\eta(\zeta) < \varepsilon \cdot g,$$
und für jeden Punkt im Innern und auf dem Rande, der in der unmittelbaren Umgebung einer überstumpfen Ecke $\lambda\pi$ liegt, eine Ungleichung:
$$\eta(\zeta) < \varepsilon^{\frac{1}{\lambda}} \cdot g.$$

5) *Wenn der grösste Polygonwinkel $\lambda\pi > 2\pi$ ist, so gilt für jeden Punkt ζ im Innern des eingeengten Polygons, der sich in angebbarer Entfernung von jeder solchen überstumpfen Ecke $\lambda_1\pi$ befindet, deren Winkel $\lambda_1\pi \geqq \frac{\lambda}{2}\pi$ ist, eine Ungleichung*
$$\eta(\zeta) < \varepsilon^{\frac{2}{\lambda}} \cdot g,$$
für diejenigen Punkte des Innern, welche in der unmittelbaren Umgebung einer solchen überstumpfen Ecke liegen, deren Winkel $\lambda_1\pi \geqq \frac{\lambda}{2}\pi$ ist, eine Ungleichung

$$\eta(\zeta) < \varepsilon^{\frac{1}{\lambda_1}} . g,$$

für diejenigen Punkte des Randes, welche in angebbarer endlicher Entfernung von jeder überstumpfen Ecke liegen, eine Ungleichung:

$$\eta(\zeta) < \varepsilon g,$$

und für diejenigen Randpunkte, welche in der unmittelbaren Umgebung einer beliebigen überstumpfen Ecke $\lambda_2 \pi$ liegen, eine Ungleichung:

$$\eta(\zeta) < \varepsilon^{\frac{1}{\lambda_2}} . g.$$

Dass die in vorstehenden Sätzen angegebenen Ordnungen des Verschwindens von η mit ε im Allgemeinen wirklich erreicht werden, und dass die wahre Ordnung des Verschwindens nicht noch höher ist als angegeben, um das zu beweisen, genügt es, die Sätze an irgend einem speciellen Beispiel, etwa an einem Zweieck mit den Winkeln $\lambda \pi$ zu bestätigen. In der That findet man dabei genaue Uebereinstimmung mit meinen Angaben, sowohl für $\lambda \lesseqgtr 2$, wie für $\lambda = 2$.

§ 17.

Stetigkeit der Green'schen Function bei allgemeiner Abänderung des Kreisbogenpolygons.

Ich habe bewiesen, dass die Green'sche Function sich stetig ändert, wenn man von dem Polygon einen Randstreifen von der überall gleichen Breite ε abtrennt.

Der Satz gilt erst recht, wenn man den Bereich nicht überall um ε, sondern um eine längs des Randes variable, nur ε nicht übersteigende Strecke einengt; denn dann muss die Green'sche Function dieses eingeengten Polygons gewiss dem Werthe nach immer zwischen der Function G des ursprünglichen Polygons S und der Function $\Gamma = G - \eta$ des um ε eingeengten Polygons Σ liegen, und zwar für alle Punkte des Bereiches Σ, also

$$G > G' > G - \eta$$

oder

$$0 < G - G' < \eta.$$

Denkt man sich nun irgend zwei Bereiche gegeben, beide von einer endlichen Zahl Kreisbogen mit endlicher Krümmung begrenzt, und stetig auseinander hervorgehend; dieselben mögen S und S' heissen, ihre Ränder s und s'. Ihr Unterschied sei die beliebig klein zu machende Strecke ε, d. h. kein Randpunkt eines der beiden Polygone

sei vom nächsten Randpunkt des andern Polygons weiter als um die Strecke ε entfernt.

Engt man nun irgend einen der beiden Bereiche, etwa S, um einen überall gleich breiten Streifen ε ein, so liegt der eingeengte Bereich Σ nicht nur ganz innerhalb von S, sondern auch ganz innerhalb von S'. Genau dasselbe gilt von dem Bereich Σ', den man durch Einengung des Bereichs S' um einen Streifen von der überall gleichen Breite ε erhält. In Folge dessen liegt auch sowohl Σ wie Σ' innerhalb eines Gebiets, welches S und S' mit einander gemein haben, und welches ich T nennen will.

Da die Begrenzung des gemeinsamen Gebietes T hiernach zwischen der Begrenzung von S und derjenigen von Σ liegt, und höchstens mit der letzteren vollständig zusammenfällt, so muss auch die Green'sche Function von T, welche ich Γ nennen will, in ganz T einschliesslich des Randes kleiner als die Green'sche Function G des Bereichs S, und in ganz Σ einschliesslich des Randes grösser oder höchstens gleich der Green'schen Function $G - \eta$ des Bereichs Σ sein. Es ist demnach

$$0 < G - \Gamma \leqq \eta,$$

und zwar so, dass das Vorzeichen $<$ links im Innern und auf dem Rande des ganzen Bereichs T, das Zeichen $\leqq$ rechts dagegen im Innern und auf dem Rande von Σ gilt.

Genau ebenso muss Γ zwischen der Green'schen Function G' des Bereiches S' und der Function $G' - \eta'$ des Bereiches Σ' eingeschlossen sein, also die Ungleichung

$$0 < G' - \Gamma \leqq \eta'$$

gelten, indem die linke Hälfte der Ungleichung in ganz T, die rechte in ganz Σ' gilt, jedesmal mit Einschluss des Randes.

Durch Verbindung der beiden Ungleichungen entsteht

$$-\eta' < G - G' < +\eta.$$

Wir haben also den Satz:

Sind zwei Bereiche S und S' nur um eine beliebig klein zu machende Grösse ε verschieden, und nimmt die Green'sche Function G des Bereiches S bei Einengung ihres Bereichs um einen Streifen von der überall gleichen Breite ε um η, die Green'sche Function G' des Bereichs S' um η' ab, so ist der Unterschied der beiden Green'schen Functionen zwischen folgenden Grenzen eingeschlossen:

$$-\eta' < G - G' < +\eta,$$

und zwar so, dass die rechte Seite der doppelten Ungleichung im Innern und auf dem Rande des Gebietes Σ, die linke Seite im Innern und auf dem Rande des Gebietes Σ' gilt.

Da man η und η' nach den vorhergegangenen Paragraphen durch eine endliche Anzahl von Schritten abschätzen kann, so ist hiermit

auch die Abschätzung der Aenderung der Green'schen Function bei Aenderung ihres Bereichs erledigt.

Für die praktische Ausführung der Abschätzung wird man natürlich den Umstand berücksichtigen, dass bei unserm Abschätzungsverfahren η sich schliesslich immer als eine stetige Function der geometrischen Bestimmungsstücke des Bereichs herausstellt, deren Aenderung beim Uebergang von S zu S' leicht abzuschätzen ist. Man braucht daher das von mir angewendete umständliche Abschätzungsverfahren nur zur Bestimmung etwa von η; η' findet man dann sofort durch Abänderung der in η eingehenden Parameter. Ja wenn man keinen Werth darauf legt, zu wissen, bis zu welchen endlichen Werthen von ε die Abschätzung richtig bleibt, kann man η' direct durch η ersetzen, da ja η ohnehin gewiss um ein im Verhältniss zum wahren Werthe endliches Stück zu gross abgeschätzt ist.

§ 18.

Die analytische Fortsetzung der Green'schen Function.

Die analytische Fortsetzung der Green'schen Function über den Rand ihres Bereiches hinaus geschieht bekanntlich nach dem Symmetrieprincip, indem man das gegebene Kreisbogenpolygon an irgend einer seiner Seiten durch reciproke Radien spiegelt, natürlich mit Wiedergabe aller Selbstüberdeckungen des Bereichs, und indem man dann der Green'schen Function in dem neuen Polygon an jedem Punkte denselben Werth, nur mit entgegengesetztem Vorzeichen, wie in dem entsprechenden Punkte des Ausgangsbereichs zuertheilt. Diesen Process der Spiegelung an den einzelnen Seiten kann man sich nun auch an jeder Seite aller neuentstandenen Polygone ausgeführt denken u. s. f., so dass sich an die ursprüngliche Polygonmembran eine unbegrenzte Reihe abwechselnd congruenter und symmetrisch congruenter Polygonmembranen anhängen — wenn ich solche Figuren, die durch Kreisverwandtschaft ohne oder mit Umlegung der Winkel auseinander hervorgehen, congruent bezw. symmetrisch-congruent nennen darf —. Dabei werde ich aber, um vollständige Freiheit in der Abänderung des Ausgangsbereichs zu haben, im Gegensatz zu dem gewönlich in der Theorie der automorphen Functionen üblichen Verfahren jedes neue Polygon, auch wenn es mit einem früheren sich ganz genau decken sollte, doch von diesem als verschieden ansehen, so dass jedes Polygon nur durch eine einzige ganz bestimmte Reihenfolge von Spiegelungen aus dem Ausgangspolygon zu gewinnen ist.

Die Gesammtheit der Kreisverwandtschaften, welche von dem Ausgangspolygon zu irgend einem andern Polygon führen, bilden eine Gruppe, deren Erzeugende die Spiegelungen des Ausgangspolygons an

seinen einzelnen Seiten sind; die letzteren seien $\mathsf{A}_1, \mathsf{A}_2, \ldots$. Der analytische Ausdruck einer einzelnen Spiegelung, etwa $\mathsf{A}_\varkappa$, hat folgende Gestalt:

$$\zeta' = \frac{\alpha_\varkappa \bar{\zeta} + \beta_\varkappa}{\gamma_\varkappa \bar{\zeta} + \delta_\varkappa},$$

worin $\bar{\zeta}$ den zu ζ conjugirten complexen Werth bezeichnet. Durch die Bestimmungsstücke des Spiegelkreises, den Radius $R_\varkappa$ und die Mittelpunktscoordinaten $a_\varkappa, b_\varkappa$, drücken sich die Coefficienten der Substitution aus, wie folgt:

$$\alpha_\varkappa = \frac{i}{R_\varkappa}(a_\varkappa + ib_\varkappa), \qquad \beta_\varkappa = \frac{i}{R_\varkappa}\left(R_\varkappa^2 - (a_\varkappa^2 + b_\varkappa^2)\right),$$

$$\gamma_\varkappa = \frac{i}{R_\varkappa}, \qquad \delta_\varkappa = \frac{i}{R_\varkappa}(-a_\varkappa + ib_\varkappa).$$

Hierbei sind die absoluten Werthe der $\alpha_\varkappa, \beta_\varkappa, \gamma_\varkappa, \delta_\varkappa$, auf deren Verhältniss es ja eigentlich nur ankommt, so eingerichtet, dass die Relation

$$\alpha_\varkappa \delta_\varkappa - \beta_\varkappa \gamma_\varkappa = 1$$

erfüllt ist.

Combinirt man eine endliche Anzahl solcher Spiegelungen, so erhält man einen ebenso gebauten Ausdruck:

$$\zeta' = \frac{\alpha\zeta + \beta}{\gamma\zeta + \delta} \quad \text{oder} \quad \zeta' = \frac{\alpha\bar{\zeta} + \beta}{\gamma\bar{\zeta} + \delta},$$

mit ζ oder mit $\bar{\zeta}$ gebildet, je nachdem man eine gerade oder ungerade Anzahl von Spiegelungen combinirt hat. Die $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ kann man dabei immer so einrichten, dass wieder

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1$$

ist; dann sind es ganze rationale Functionen aus den Coefficienten oder den conjugirten Werthen der Coefficienten der einzelnen zusammensetzenden Substitutionen sind, und zwar in den Coefficienten jeder einzelnen linear und homogen.

Ich ziehe nun im Folgenden nur solche stetige Abänderungen des Polygons S in Betracht, bei denen die einzelnen Randstücke ihre Lage jedes als Ganzes stetig ändern, in der Weise, dass auch der ganze Spiegelkreis seinen Radius und Mittelpunkt stetig verändert. Dabei ist nicht ausgeschlossen, dass auf einer Seite sich Knickungen einstellen — wenn nur in endlicher Anzahl und in endlicher Entfernung von einander und von den Enden der Seite —: man hat dann nur die betreffende Seite des Polygons sich schon von vornherein in einzelne Stücke zerlegt zu denken, die nur unter gestrecktem Winkel zusammenstossen. Vom Auftreten solcher Seiten, deren Radius und Länge mit ε verschwindet, will ich hier absehen. Wenn sie bei der Abänderung

nur in endlicher Anzahl zwischen die endlichen Seiten eingeschoben sich einstellen, wenn sie insbesondere nicht ein ganzes Randstück von endlicher Grösse erfüllen, dann bewirken sie nur eine unwesentliche Modification der folgenden Betrachtungen, indem man dann nämlich nur solche analytische Fortsetzungen zu vergleichen hat, bei denen keine dieser unendlich kleinen Seiten überschritten wird.

Es werde jetzt das Polygon S stetig in das unendlich wenig verschiedene Polygon S' abgeändert. Da in jeder einzelnen Substitution $\mathsf{A}_\varkappa$ sich die Grössen $R_\varkappa$, $a_\varkappa$, $b_\varkappa$ in geometrisch bestimmter Weise stetig ändern, *so ändern sich auch die Coefficienten* $\alpha_\varkappa$, $\beta_\varkappa$, $\gamma_\varkappa$, $\delta_\varkappa$ *in angebbarer Weise stetig.* Dasselbe gilt dann auch von jeder Substitution A, die aus einer endlichen angebbaren Anzahl von Spiegelungen zusammengesetzt ist, da ja ihre Coefficienten α, β, γ, δ ganze rationale Functionen der $\alpha_\varkappa$, $\beta_\varkappa$, $\gamma_\varkappa$, $\delta_\varkappa$ von endlichem Grade sind; dasselbe ist natürlich bei der zu A inversen Substitution A^{-1} der Fall, welche sich von A nur durch die umgekehrte Aufeinanderfolge der zusammensetzenden Spiegelungen unterscheidet.

Daraus folgt aber, *wenn man irgend einen Punkt* ζ', *der aus einem Punkt* ζ *des Ausgangspolygons durch eine endliche Anzahl von Spiegelungen hervorgeht, festhält, dass dann bei dem stetigen Uebergang von* S *zu* S' *auch der Ausgangspunkt* ζ *seine Lage in angebbarer Weise stetig ändert,* mit alleiniger Ausnahme des Falls, dass ζ gerade im Unendlichfernen liegt. Aber auch diese Ausnahme ist unwesentlich; denn wenn man die ζ-Ebene durch eine ζ-Kugel ersetzt und die Entfernungen auf dieser, statt in der ζ-Ebene, misst, so ist die Aenderung des Punktes ζ ausnahmslos stetig, wo er auch liegen mag. Da es aber zu Umständlichkeiten führen würde, die Strecken auf der Kugel zu messen, so will ich, wie ich es auch früher schon gethan habe, lieber von den Strecken der ζ-Ebene sprechen, dann aber den Fall ausschliessen, dass ein Punkt, von dem ich gerade spreche, in's Unendliche fällt, indem ich mir vorbehalte, immer die Figur einer solchen linearen Transformation zu unterwerfen, dass die gedachte Voraussetzung erfüllt ist. In diesem Sinne gilt also der Satz:

Gehen zwei Punkte ζ, *der eine durch eine aus einer endlichen Anzahl von Spiegelungen des Polygons* S *bestehende Transformation* A, *der andere durch die entsprechende zum Polygon* S' *gehörige Transformation* A' *in ein und denselben Punkt* ζ' *über, so ist die gegenseitige Entfernung der beiden Punkte* ζ *von einander eine angebbare mit* ε *stetig verschwindende Grösse* δ.

Es kommt uns nun darauf an, die Green'schen Functionen G und G' des ursprünglichen und des abgeänderten Polygons nicht nur in solchen Punkten mit einander zu vergleichen, welche im Ausgangspolygon S und S' liegen, sondern auch für alle solche Punkte, zu

denen man erst nach Durchsetzung einer beliebigen endlichen Anzahl von weiteren Polygonen gelangt. Man darf natürlich in irgend einem Punkte nur solche Werthe von G und G' mit einander vergleichen, die aus den Werthen G und G' in den Ausgangsbereichen S und S' durch analytische Fortsetzung auf entsprechenden Wegen gewonnen werden, d. h. auf Wegen, die in den beiden Polygonnetzen immer entsprechende Polygonseiten überschreiten. Man darf also den Weg der analytischen Fortsetzung insbesondere niemals zwischen zwei entsprechenden (bei der Abänderung auseinander hervorgegangenen) Ecken zweier entsprechenden Polygone hindurchführen. Dies wird vermieden, wenn man festsetzt, dass der Weg der simultanen analytischen Fortsetzung in angebbarer von ε unabhängiger Entfernung von jeder Ecke des Polygonnetzes verläuft, welches zu S gehört. Dann wird man, wie viele Polygone, wenn nur eine endliche Anzahl, der Weg durchsetzt, stets den Betrag ε der Aenderung von S so klein annehmen können, dass bei der Aenderung keine Ecke des Netzes den Weg überschreitet.

§ 19.

Stetigkeit der analytischen Fortsetzung.

Es sei jetzt ζ irgend ein beliebiger Punkt des zu S gehörigen Polygonnetzes, zu dem man von S nach Durchsetzung einer endlichen Anzahl von Polygonen gelangt. Demselben entspricht ein bestimmter Punkt ζ_0 im Ausgangspolygon, welcher aus ζ durch eine bestimmte aus einer endlichen Anzahl von Spiegelungen des Polygons S bestehende Operation A^{-1} hervorgeht. Bei stetigem Uebergang von S zu S' ändert sich A^{-1} stetig in A'^{-1}. Es werde dann mit ζ_0' derjenige Punkt bezeichnet, welcher aus ζ durch die Operation A'^{-1} hervorgeht. Nach dem Satze des vorigen Paragraphen ist dann

$$|\zeta_0 - \zeta_0'| = \delta$$

eine angebbare mit ε stetig verschwindende Grösse.

Der Werth von G im Punkte ζ ist derselbe oder der entgegengesetzte, wie der Werth von G im Punkte ζ_0, welchen ich G_0 nennen will, ebenso ist der Werth von G' im Punkte ζ derselbe oder der entgegengesetzte, wie der Werth G_0' im Punkte ζ_0', also

$$G = \pm G_0, \quad G' = \pm G_0',$$

und zwar so, dass beidemal dasselbe Vorzeichen gilt. Folglich ist

$$G - G' = \pm (G_0 - G_0').$$

Es sei nun ζ_0, also auch ζ, in einer angebbaren endlichen Entfernung von jeder Ecke sowie von der nächsten Unstetigkeitsstelle der Green'schen Function G gelegen — natürlich immer nur im selben Blatte gemessen. —

Ich denke mir nach § 7 um die in S gelegene Unstetigkeitsstelle ξ der Green'schen Function G eine geschlossene Curve s_1 construirt, längs deren ich eine obere Grenze M für den Werth von G abschätzen kann, und zwar wähle ich die Curve s_1 so eng, dass der Punkt ζ_0 in angebbarer endlicher Entfernung ausserhalb derselben liegt. Die nach Symmetrie genau entsprechenden Curven denke ich mir um alle transformirten Punkte von ξ, d. h. um alle andern Unstetigkeitspunkte von G construirt. Ausserhalb dieser Curven und auf dem Rande derselben bleibt dann G seinem absoluten Werthe nach überall unterhalb M.

Ich kann nun um ζ_0 als Centrum, da dieser Punkt in endlicher Entfernung von jeder der construirten Curven, sowie von jeder Ecke des Polygonnetzes liegt, einen Kreis von endlichem angebbarem Radius R construiren, der keine Ecke einschliesst und in keines der um die Unstetigkeitspunkte von G ausgeschlossenen Gebiete eindringt. Innerhalb und auf dem Rande dieses Kreises ist G holomorph und dem absoluten Werthe nach kleiner als M. Sind r und φ Polarcoordinaten in Bezug auf den Punkt ζ_0 als Centrum, so giebt es also für G eine in dem ganzen Kreise R gültige Entwicklung

$$G = a_0 + a_1 r \cos\varphi + a_2 r^2 \cos 2\varphi + a_3 r^3 \cos 3\varphi + \cdots$$
$$+ b_1 r \sin\varphi + b_2 r^2 \sin 2\varphi + b_3 r^3 \sin 3\varphi + \cdots,$$

wobei

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overline{G}\, d\varphi = G_0,$$

$$a_\nu = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{R^\nu}\int_0^{2\pi}\overline{G}\cos\nu\varphi\, d\varphi, \quad b_\nu = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{R^\nu}\int_0^{2\pi}\overline{G}\sin\nu\varphi\, d\varphi$$

ist, unter $\overline{G}$ die Werthe von G längs des Kreises R verstanden. Da längs dieses Kreises überall $|\overline{G}| < M$ ist, so folgt

$$|a_\nu| < \frac{2M}{R^\nu}, \qquad |b_\nu| < \frac{2M}{R^\nu}.$$

Hieraus folgt, dass in der Entfernung r vom Punkte ζ_0 überall

$$|G - G_0| < 4M\left(\frac{r}{R} + \frac{r^2}{R^2} + \frac{r^3}{R^3} + \cdots\right) = 4M\cdot\frac{r}{R-r}$$

ist.

Jetzt bezeichne G_1 den Werth von G im Punkte ζ_0', welcher ja von ζ_0 nur die angebbare kleine mit ε stetig verschwindende Entfernung δ besitzt. Jedenfalls kann ich ε so klein wählen, dass $\delta < R$ ist, dass also G_1 in der obigen Weise entwickelbar ist. Dann ist

$$|G_1 - G_0| < 4M\cdot\frac{\delta}{R-\delta}.$$

Nun habe ich den Werth G_1 von G im Punkte ζ_0' mit dem Werthe G_0' von G' im selben Punkte ζ_0' zu vergleichen. Ich mache zu dem Zwecke zunächst die später wieder zu beseitigende Voraussetzung, dass der Punkt ζ_0 sich im Innern von S in angebbarer Entfernung vom Rande des Polygons S befinde. Dann kann man die Aenderung ε des Bereichs S jedenfalls so klein machen, dass auch ζ_0' im Innern des Polygons in angebbarer Entfernung vom Rande liegt, und dass man auf die Aenderung von G im Punkte ζ_0' das in § 17 geschilderte Abschätzungsverfahren anwenden kann. Man bekomme so

$$|G_1 - G_0'| < \eta_0,$$

wobei η_0 eine angebbare mit ε stetig verschwindende Grösse bedeutet. Dies Resultat mit dem oben gefundenen

$$|G_1 - G_0| < 4M \cdot \frac{\delta}{R-\delta}$$

zusammen ergiebt

$$|G_0 - G_0'| < \eta_0 + \delta \cdot \frac{4M}{R-\delta},$$

oder, da sowohl η_0 wie δ mit ε stetig verschwindet, folglich die ganze rechte Seite stetig verschwindet, ist

$$|G_0 - G_0'| < \eta,$$

unter η eine angebbare mit ε stetig verschwindende Grösse verstanden. Da nun $|G - G'| = |G_0 - G_0'|$ ist, so hat man den Satz bewiesen: *In einem beliebigen Punkte ζ des Polygonnetzes S, welcher vom Ausgangspolygone aus mit Ueberschreitung einer endlichen Anzahl von Polygonseiten erreicht werden kann, und welcher in angebbarer endlicher Entfernung von jedem (im selben Blatte gelegenen) Unstetigkeitspunkt der zu S gehörigen Green'schen Function liegt, ändert sich die Green'sche Function bei Abänderung des Polygons S stetig, so dass*

$$|G - G'| < \eta$$

ist, wobei η eine mit der Aenderung ε des Bereichs S stetig verschwindende angebbare Grösse ist.

Dieser Satz ist freilich vorerst nur unter der Voraussetzung bewiesen, dass ζ_0, oder was dasselbe heisst, ζ sich im Innern eines Polygons in angebbarer Entfernung vom Rande befinde. Ich sagte schon oben, dass diese Einschränkung nur unwesentlich ist und beseitigt werden kann.

Wenn nämlich ζ_0 nicht in angebbarer Entfernung vom Rande liegt, so liegt es auf dem Rande selbst. Dann ist aber $G_0 = 0$. Der Punkt ζ_0' hat nun aber höchstens die angebbare mit ε stetig verschwindende Entfernung δ vom Punkte ζ_0, und der nächste Randpunkt von S' hat von ζ_0 höchstens die Entfernung ε. Folglich ist der Punkt ζ_0' höchstens um die Strecke $\varepsilon + \delta$ vom Rande des Polygons S' ent-

fernt. Liegt nun ζ_0' innerhalb von S' selbst, so wissen wir, dass der Werth G_0' positiv und kleiner als eine mit der Entfernung $\varepsilon + \delta$ vom Rande, also auch mit ε stetig verschwindende angebbare kleine Grösse η ist; folglich ist

$$|G_0 - G_0'| = G_0' < \eta$$

in der That eine mit ε stetig verschwindende Grösse.

Liegt ferner ζ_0' zwar in der kleinen Entfernung $\varepsilon + \delta$ vom Rande des Polygons S', aber ausserhalb desselben, so möge es erstens keiner Polygonecke unendlich benachbart sein; dann liegt es in unendlicher Nähe einer Polygonseite, und sein Spiegelpunkt in Bezug auf diese Seite liegt innerhalb des Polygons S' und ebenfalls in einer mit ε stetig verschwindenden Entfernung vom Rande, nämlich

$$\frac{R}{R-(\varepsilon+\delta)} \cdot (\varepsilon + \delta).$$

Der Werth von G' in diesem Spiegelpunkte ist daher positiv und kleiner als eine angebbare mit ε stetig verschwindende Grösse η, folglich der Werth G_0' in ζ_0' selbst negativ und grösser als $-\eta$, und

$$|G_0 - G_0'| = -G_0' < \eta.$$

Liegt endlich ζ_0' ausserhalb von S', aber in der Nähe einer Ecke mit nicht verschwindendem Winkel, so liegt jedenfalls irgend einer seiner Spiegelpunkte in Bezug auf eine der beiden in der Ecke zusammenstossenden Polygonseiten im Innern von S' und in einer mit ε stetig verschwindenden angebbaren Entfernung vom Rande. Es gilt dann wieder die gewöhnliche Schlussweise.

Dagegen versagt der Schluss in der Umgebung einer parabolischen Spitze, und thatsächlich ist die Abänderung der Green'schen Function in der Umgebung einer solchen auch nicht stetig. Dies hat seinen tieferen Grund in folgendem Satze:

Der Stetigkeitssatz gilt nur für solche Punkte des Polygonnetzes S, welche in angebbarer endlicher von ε unabhängiger Entfernung von allen Unstetigkeitspunkten der Green'schen Function G liegen. Die Convergenz von G' gegen G, wenn man S' in S stetig übergehen lässt, ist in der Umgebung der Unstetigkeitsstellen im Allgemeinen eine ungleichmässige, d. h. je näher man an eine solche Unstetigkeitsstelle herangeht, um so kleiner muss man ε wählen, damit $|G - G'|$ noch unterhalb einer kleinen oberen Grenze η bleibt.

In der Umgebung einer parabolischen Spitze liegen nun in der That in beliebiger Nähe derselben immer noch unendlich viele Unstetigkeitspunkte der Green'schen Function, so dass also in der Umgebung einer parabolischen Ecke die Convergenz nothwendig ungleichmässig sein muss.

Ebenso muss die Stetigkeit natürlich auch in der Umgebung sonstiger Grenzpunkte, d. h. Häufungsstellen des Polygonnetzes, ungleichmässig werden.

§ 20.

Stetigkeit des symmetrischen Integrals 3. Gattung.

Das zu der Green'schen Function G_ξ^ζ conjugirte Potential H_ξ^ζ gewinnt man, indem man das Integral

$$H_\xi^\zeta = -\int \frac{\partial G}{\partial n}\, ds$$

von irgend einem fest gewählten Anfangspunkt aus bis zu der variablen Stelle ζ erstreckt, die Normalenrichtung n immer links zur Fortschreitungsrichtung s genommen.

Bildet man dasselbe Integral für den abgeänderten Bereich S'

$$H_\xi'^\zeta = -\int \frac{\partial G'}{\partial n}\, ds$$

auf demselben Wege, so wird

$$H - H' = -\int \frac{\partial (G - G')}{\partial n}\, ds = -\int \frac{\partial \eta}{\partial n}\, ds.$$

η ist aber in jedem Punkte des Polygonnetzes, der in angebbarer endlicher Entfernung von jeder Unstetigkeitsstelle der Green'schen Function liegt, holomorph und dem absoluten Werthe nach unterhalb einer abschätzbaren mit ε stetig verschwindenden oberen Grenze gelegen.

Es sei nun ζ ein Punkt des Polygonnetzes, der in angebbarer endlicher Entfernung nicht nur von allen Unstetigkeitspunkten der Green'schen Function, sondern auch von jeder Ecke des Polygonnetzes gelegen ist. Dann lässt sich um ζ als Centrum ein Kreis von angebbarem endlichen Radius ϱ beschreiben, der ebenfalls noch in angebbarer endlicher Entfernung von jeder Ecke des Polygonnetzes und von jeder Unstetigkeitsstelle der Green'schen Function bleibt. Längs des Randes von diesem Kreise besitzt daher η eine abschätzbare obere Grenze η_0 seines absoluten Werthes, welche eine mit ε stetig verschwindende Grösse ist, und innerhalb des ganzen Kreises eine Entwicklung

$$\begin{aligned}\eta = a_0 &+ a_1 r \cos\varphi + a_2 r^2 \cos 2\varphi + a_3 r^3 \cos 3\varphi + \cdots\\ &+ b_1 r \sin\varphi + b_2 r^2 \sin 2\varphi + b_3 r^3 \sin 3\varphi + \cdots,\end{aligned}$$

wobei insbesondere

$$a_1 = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{\varrho}\int_0^{2\pi} \bar{\eta} \cos\varphi\, d\varphi, \qquad b_1 = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{\varrho}\int_0^{2\pi} \bar{\eta} \sin\varphi\, d\varphi$$

ist, und also wegen $|\bar{\eta}| < \eta_0$

$$a_1 < \frac{2\eta_0}{\varrho}, \qquad b_1 < \frac{2\eta_0}{\varrho}.$$

Im Mittelpunkte des Kreises, d. h. im Punkte ζ ist aber

$$\left|\frac{\partial \eta}{\partial n}\right| \leq \sqrt{a_1^2 + b_1^2},$$

also auch

$$\left|\frac{\partial \eta}{\partial n}\right| < \frac{\eta_0}{\varrho} \cdot 2\sqrt{2} = \eta'.$$

Wählt man also den Integrationsweg von dem festen Ausgangspunkte bis zum Punkte ζ so, dass er überall in endlicher angebbarer Entfernung von jeder Unstetigkeitsstelle der Green'schen Function sowie von jeder Ecke des Polygonnetzes bleibt, so kann man für jeden Punkt des Weges s eine mit ε stetig verschwindende obere Grenze η' für $\left|\frac{\partial \eta}{\partial n}\right|$ bestimmen. Sei dann η' der grösste dieser Werthe längs des Weges, s die Länge des Integrationsweges, so ist im Punkte ζ

$$|H - H'| < s \cdot \eta'.$$

Also hat man den Satz bewiesen:

Bestimmt man die conjugirten Potentiale H und H' der zu S und S' gehörigen Green'schen Functionen G und G' so, dass sie etwa in irgend einem festen Punkte des Ausgangsbereiches denselben Werth haben, so unterscheiden sie sich in irgend einem Punkte des Polygonnetzes, der in angebbarer endlicher Entfernung von jeder Unstetigkeitsstelle der Green'schen Function liegt, und den man mit Durchsetzung einer endlichen Anzahl von Polygonen erreichen kann, nur um eine angebbare mit ε stetig verschwindende Grösse.

Zunächst habe ich den ausgesprochenen Satz nur erst für solche Punkte ζ bewiesen, die in angebbarer endlicher Entfernung von jeder Ecke des Polygonnetzes sich befinden. Aber diese Beschränkung lässt sich leicht beseitigen, mit Ausnahme natürlich der parabolischen Spitzen.

Es sei α die betreffende Ecke des Polygonnetzes S, β der andere Schnittpunkt der in α zusammenstossenden Seiten. Setze ich dann, wie in § 9, mit derselben Bedeutung von a und ψ,

$$\frac{\zeta - \alpha}{\zeta - \beta} = \frac{(re^{i\varphi})^\lambda}{ae^{i\psi}},$$

und wähle ich den Orthogonalkreis $r = R$ möglichst gross, aber doch so, dass er noch in endlicher angebbarer Entfernung vom nächsten Unstetigkeitspunkt des G bleibt, so gilt für H innerhalb des ganzen Kreises $r = R$ eine Entwicklung:

$$H = a_0 + a_1 r \cos\varphi + a_2 r^2 \cos 2\varphi + \cdots,$$

wobei

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \overline{H}\, d\varphi$$

ist.

Dieselbe Construction mache ich für die entsprechende Ecke α' des Polygonnetzes S', wähle aber dabei $R' = R$. Ich bekomme so

$$H' = a_0' + a_1' r' \cos\varphi' + a_2' r'^2 \cos 2\varphi' + \cdots,$$

$$a_0' = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \overline{H}'\, d\varphi'.$$

Nun bedenke ich, dass die Grössen α, β, a, ψ beim Uebergang von S zu S' sich in angebbarer Weise stetig ändern, dass also, wenn man $r = r'$, $\varphi = \varphi'$ setzt, die beiden Punkte r, φ und r', φ' nur eine angebbare stetig mit ε verschwindende Entfernung von einander haben. H und H' besitzen aber in solchen Punkten eine Differenz, die dem absoluten Werthe nach unterhalb einer angebbaren mit ε stetig verschwindenden Grösse liegt. Es ist folglich auch

$$a_0 - a_0' = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (\overline{H} - \overline{H}')\, d\varphi$$

dem absoluten Werthe nach unterhalb einer angebbaren mit ε stetig verschwindenden Grösse gelegen. Also:

Der Werth von H in einer Ecke des Polygonnetzes S und der Werth von H' in der entsprechenden Ecke des Polygonnetzes S' unterscheiden sich nur um eine Grösse, die unterhalb einer angebbaren mit ε stetig verschwindenden oberen Grenze liegt.

Nun ist aber H sowohl, wie H', wie man mit Hülfe der hingeschriebenen Reihenentwicklungen leicht beweist, in der ganzen Umgebung der Ecke α bez. α' stetig, wenn auch verzweigt. Da die Ecken α und α' nur eine mit ε stetig verschwindende Entfernung von einander besitzen, so sind also nicht allein der Werth von H in α und der Werth von H' in α', sondern auch die Werthe von H und H' im selben Punkte α oder α' nur um eine mit ε stetig verschwindende Grösse unterschieden. Diese Schlussweise versagt selbstverständlich für parabolische Spitzen, lässt sich aber auf andere parabolische Ecken mit einigen Modificationen des Beweises übertragen. Wir haben also das Resultat:

Die Aenderung von G ist auch in den Ecken des Polygonnetzes mit Ausnahme der parabolischen Spitzen stetig.

Fasse ich jetzt die beiden Functionen G und H zu dem „symmetrischen Integral dritter Gattung" zusammen

$$P_\xi^\zeta = G_\xi^\zeta + i H_\xi^\zeta,$$

so haben wir für dieses den Satz:

Bei stetiger Abänderung des Polygons S um eine beliebig klein zu machende Grösse ε ändert sich das symmetrische Integral dritter Gattung, wenn man eine in S gelegene Unstetigkeitsstelle ξ sowie den Werth seines imaginären Theils in einem beliebigen Punkte von S festhält, in jedem Punkte des Polygonnetzes, den man mit Durchsetzung nur einer endlichen Zahl von Polygonen erreichen kann, und der in angebbarer endlicher Entfernung vom nächsten Unstetigkeitspunkt des Integrals liegt, nur um eine angebbare mit ε stetig verschwindende kleine Grösse.

Es ist dann auch sofort die Richtigkeit folgenden Satzes einzusehen:

Die sämmtlichen $2p$ (rein imaginären) Perioden des symmetrischen Integrals P_ξ^ζ ändern sich stetig bei stetiger Abänderung des Bereichs s.

Man erhält nämlich die Perioden von P_ξ^ζ theils, indem man ζ im Ausgangspolygon S selbst einen geschlossenen Weg beschreiben lässt, der nicht auf einen nichtsingulären Punkt zusammengezogen werden kann, theils, indem man ζ von einem Punkte des Ausgangspolygons zu dem entsprechenden Punkte eines solchen Polygons wandern lässt, welches durch zweimalige Spiegelung aus S entsteht. In beiden Fällen reproducirt sich G, während iH um eine rein imaginäre Constante wachsen kann, von denen man $2p$ linear unabhängige als primitives Periodensystem auswählen mag. (Von der Periode $2\pi i$, die bei Umlauf um den Unstetigkeitspunkt in S entsteht, sehe ich ab, da ja diese überhaupt ungeändert bleibt).

Irgend eine Periode möge durch einen geschlossenen Umlauf in S entstehen. Ich kann den Weg in dem festen Punkte, wo $H = H'$ ist, beginnen und endigen lassen. Dann zeigt der Satz der vorigen Seite ohne Weiteres, da der Weg der analytischen Fortsetzung allen gestellten Bedingungen genügt, dass am Ende des Weges $H - H'$ unterhalb einer angebbaren mit ε stetig verschwindenden Grösse liegen muss. $H - H'$ ist also nur um eine unendlich kleine Grösse gewachsen, H und H' also nur um unendlich wenig verschiedene Grössen, w. z. b. w.

Eine Periode, die ich durch Laufenlassen des ζ zu einem congruenten Punkte in einem andern Polygon erhalte, kann ich, da der Ausgangspunkt beliebig ist, wieder von dem Punkte $H = H'$ beginnen lassen. Dieser Punkt heisse ζ_0. Ist ζ der ihm entsprechende Endpunkt im Polygonnetz S, so ist der entsprechende Endpunkt ζ' im Polygonnetz S' von ζ nur um eine mit ε stetig verschwindende Grösse δ entfernt. Ich führe nun H von ζ_0 bis ζ, und gleichzeitig H' auf demselben Wege von ζ_0 nach ζ, dann aber noch H' allein auf dem kürzesten Wege von ζ nach ζ'; die Differenz der beiden so er-

haltenen Werthe von H und H' wird, mit dem Factor i versehen, die Differenz der Perioden von P und P' sein.

Auf dem Wege von ζ_0 bis ζ erlangt zuerst $H - H'$ nach unserm früheren Satze einen mit ε stetig verschwindenden Werth. Führe ich dann noch H' allein von ζ nach ζ' längs der mit ε stetig verschwindenden Strecke δ, so kommt nur noch eine ebenfalls mit ε stetig verschwindende kleine Grösse hinzu, da ja H' in der Umgebung des Punktes ζ stetig ist. Für beide Theiländerungen lässt sich eine mit ε stetig verschwinde obere Grenze angeben, also auch für die Gesammtänderung. Damit ist alles bewiesen.

§ 21.

Stetigkeit der symmetrischen Integrale 2. Gattung.

Aus der Green'schen Function mit einem logarithmischen singulären Punkte $\xi' + i\xi''$ im Polygon leiten sich durch Differentiation nach den Coordinaten des Unstetigkeitspunktes zwei Green'sche Functionen mit einem algebraischen Unendlichkeitspunkt erster Ordnung ab:

$$\frac{\partial G_\xi^\zeta}{\partial \xi'}, \quad \frac{\partial G_\xi^\zeta}{\partial \xi''},$$

aus denen sich die allgemeinste Green'sche Function dieser Art linear zusammensetzt.

Wie ändern sich nun diese Functionen bei Abänderung des Polygons S ab?

Man kann diese Frage auf zwei verschiedene Arten beantworten. Die eine Methode wäre folgende:

Man denkt sich die Green'sche Function mit algebraischer Unstetigkeitsstelle statt durch Differentiation von G vielmehr direct nach dem Schwarz-Neumann'schen Verfahren dargestellt. Da ich den Convergenzfactor des Verfahrens abschätzen, d. h. eine obere Grenze für denselben angeben kann, so habe ich damit die Möglichkeit, für eine den Unstetigkeitspunkt umschliessende Curve eine obere Grenze auch für den absoluten Werth dieser zweiten Green'schen Function anzugeben. Vermittelst dieser oberen Grenze kann man die Werthe der Green'schen Function in der Nähe des Randes ihrem absoluten Werthe nach abschätzen, und damit den absoluten Werth der Aenderung der Green'schen Function bei Einengung des Bereichs um eine kleine Grösse ε. Nun kann man den Bereich S und S' beide durch eine unendlich kleine Abänderung in einen dritten beiden gemeinsamen Bereich Σ verwandeln, mit dessen Green'scher Function man die Green'schen Functionen von S und S' vergleicht. Man kann so den absoluten Werth der Differenz der zu S und S' gehörigen Green'schen Functionen abschätzen, zunächst für ein beiden Bereichen gemeinsames

Gebiet. Dann erweitert man die Abschätzung genau wie bei der Green'schen Function G auf beliebige Punkte des Polygonnetzes, und kommt so zu denselben Sätzen, wie sie im vorigen Paragraphen für die Green'sche Function mit logarithmischem Unstetigkeitspunkte und für das symmetrische Integral 3. Gattung und dessen Perioden bewiesen worden sind, jetzt für die Green'sche Function mit algebraischem Unstetigkeitspunkt, sowie für das symmetrische Integral 2. Gattung und dessen Perioden.

Die andere Beweismethode, die ich hier ausführlicher auseinandersetzen will, geht von der für die Green'sche Function mit logarithmischer Unstetigkeitsstelle ausgeführten Abschätzung aus.

Es ist bekanntlich identisch

$$G_\xi^\zeta = G_\zeta^\xi .$$

Wir erhalten sonach die Ableitungen $\frac{\partial G_\xi^\zeta}{\partial \xi'}$ und $\frac{\partial G_\xi^\zeta}{\partial \xi''}$, indem wir erst $\frac{\partial G_\zeta^\xi}{\partial \zeta'}$ und $\frac{\partial G_\zeta^\xi}{\partial \zeta''}$ bilden und dann ζ und ξ vertauschen.

Nun habe ich schon im vorigen Paragraphen gezeigt, dass $\frac{\partial G}{\partial \zeta'}$ und $\frac{\partial G}{\partial \zeta''}$, wie überhaupt der Differentialquotient nach irgend einer beliebigen Richtung der ζ-Ebene bei Abänderung des Bereichs sich angebbar stetig ändern, vorausgesetzt nur, dass ζ in einer angebbaren Entfernung von ξ und von allen Transformirten des Punktes ξ liegt. In diesem Satze brauche ich nur ξ mit ζ zu vertauschen, und zu beachten, dass es auf dasselbe hinauskommt, ob ich sage, ζ liege in angebbarer Entfernung von ξ und allen Transformirten von ξ, oder ob ich sage, ξ liege in angebbarer Entfernung von ζ und allen Transformirten des Punktes ζ. Man erhält so den Satz:

Die Green'schen Functionen mit algebraischem Unstetigkeitspunkt ξ ändern sich bei Abänderung des Bereiches S um eine kleine Grösse ε in jedem Punkte ζ, der in angebbarer endlicher Entfernung von allen Unstetigkeitspunkten liegt, um eine Grösse, die dem absoluten Werthe nach unterhalb einer angebbaren mit ε stetig verschwindenden oberen Grenze liegt.

Dabei ist allerdings zunächst vorausgesetzt, dass der Punkt ζ (früher ξ) im Innern des Polygons S in angebbarer Entfernung vom Rande liegt, während die Unstetigkeitsstelle ξ, die bei der Abänderung des Bereichs festgehalten wird, ganz beliebige Lage im Polygonnetz haben kann, nur in endlicher Entfernung von jeder Ecke (damit man um ξ einen Kreis von endlichem Radius beschreiben kann, innerhalb dessen eine Entwicklung von G als Function von ξ existirt). Die genannte Einschränkung der Lage von ζ ist aber unwesentlich; dieselbe kann auf genau dieselbe Weise aufgehoben werden, wie die ent-

sprechende Einschränkung für G selbst auf S. 535 ff. beseitigt wird. Ich brauche die Betrachtungen nicht zu wiederholen.

Wie ist's dagegen, wenn ξ auf den Rand eines Polygons rückt?

Wenn ξ auf eine Polygonseite rückt, aber in angebbarer Entfernung von der nächsten Ecke bleibt, so liegt offenbar kein Hinderniss für die Abschätzung vor. Es ist nur zu bemerken, dass dabei die Unstetigkeitsstelle ξ mit ihrer symmetrischen im Nachbarpolygon zusammenrückt, indem sich die beiden Unstetigkeiten aufheben, wenn die Differentiation gerade in der Richtung des Randes vorgenommen ist, und sich addiren, wenn die Differentiation normal zum Rande gerichtet ist.

Rückt aber die Unstetigkeitsstelle ξ in eine Polygonecke, so ist es verschieden, je nachdem der betreffende Polygonwinkel kleiner oder grösser als π ist. Im ersten Falle wird $\frac{\partial G}{\partial \xi}$ selbst in jedem Punkte ζ, der in endlicher Entfernung von ξ liegt, unendlich klein, und die Stetigkeit der Abänderung bleibt daher bestehen. Im zweiten Falle dagegen wird $\frac{\partial G}{\partial \xi}$ überall unendlich gross, verliert also seinen Sinn. Man muss überhaupt in der Nähe einer Ecke anders differenziren; aber ich kann für meine Ziele den Fall, dass der Unstetigkeitspunkt in der Nähe einer Ecke liegt, überhaupt ausschliessen. Also sage ich:

Der Stetigkeitssatz auf S. 539 behält seine Gültigkeit für jede Lage des Punktes ζ, die man mit Durchsetzung nur einer endlichen Zahl von Polygonen erreicht, und welche eine angebbare Entfernung von der nächsten Unstetigkeitsstelle hat, und für jede derselben Bedingung genügende Lage der festgehaltenen Unstetigkeitsstelle ξ, vorausgesetzt nur, dass ξ sich in angebbarer endlicher Entfernung von der nächsten Polygonecke befindet.

Unter diesen selben Voraussetzungen gelten dann, wie man nach der Schlussweise des letzten Paragraphen folgert, die Sätze:

1) *Das conjugirte Potential*

$$\frac{\partial H_\xi^\zeta}{\partial \xi'} \quad \textit{bezw.} \quad \frac{\partial H_\xi^\zeta}{\partial \xi''}$$

ändert sich bei stetiger Abänderung des Polygons S um eine mit ε stetig verschwindende abschätzbare kleine Grösse.

2) *Das Integral 2. Gattung*

$$\frac{\partial P_\xi^\zeta}{\partial \xi'} \quad \textit{bezw.} \quad \frac{\partial P_\xi^\zeta}{\partial \xi''}$$

ändert sich bei stetiger Abänderung des Polygons S um eine mit ε stetig verschwindende abschätzbare kleine Grösse.

3) *Die sämmtlichen $2p$ (rein imaginären) Perioden jedes Integrals 2. Gattung ändern sich bei stetiger Abänderung des Polygons S um je eine mit ε stetig verschwindende abschätzbare kleine Grösse.*

§ 22.

Stetigkeit der automorphen Functionen.

Aus den symmetrischen Integralen zweiter Gattung setzt man symmetrische automorphe Functionen zusammen, indem man

$$F(\zeta) = ib_0 + \sum_{\nu=1}^{\nu=m} \left(a_\nu \cdot \frac{\partial P_{\xi_\nu}^{\zeta}}{\partial \xi_\nu'} + b_\nu \cdot \frac{\partial P_{\xi_\nu}^{\zeta}}{\partial \xi_\nu''} \right)$$

ansetzt und, unter $A_\varkappa$, $B_\varkappa$ ($\varkappa = 1, 2, \ldots 2p$) $2p$ linear unabhängige Perioden von $\frac{\partial P}{\partial \xi'}$ und $\frac{\partial P}{\partial \xi''}$ verstanden, die Coefficienten den $2p$ Bedingungen unterwirft:

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=m} \left(a_\nu A_\varkappa(\xi_\nu) + b_\nu B_\varkappa(\xi_\nu) \right) = 0.$$

Ich wähle, damit diese Bedingungen gewiss mit einander verträglich sind, $m \geqq p$.

Man kann dann a_ν und b_ν jedenfalls als rationale ganze Functionen der $4mp$ Grössen $A_\varkappa(\xi_\nu)$, $B_\varkappa(\xi_\nu)$ und von $2m - 2p$ willkürlichen Parametern ausdrücken.

Aendert man jetzt den Bereich S stetig ab, so dass er in S' übergeht, und hält dabei die Punkte ξ_ν sowie die $2m - 2p$ willkürlichen Parameter fest, so ändern sich die a_ν, b_ν gewiss in abschätzbarer Weise stetig, da es rationale ganze Functionen der sich stetig ändernden Perioden $A_\varkappa$, $B_\varkappa$ sind.

Hält man ausserdem noch die Constante b_0 und die imaginären Theile aller Integrale zweiter Gattung in einem beliebigen Punkte fest, so muss auch $F(\zeta)$ in jedem mit Durchsetzung einer endlichen Zahl von Polygonen erreichbaren Punkte, der in angebbarer Entfernung von allen Unstetigkeitspunkten ξ_ν und deren Transformirten liegt, sich stetig ändern, da ja sowohl die a_ν, b_ν wie die Integrale sich stetig ändern. Damit haben wir das Resultat:

Wir können die symmetrische automorphe Function $F(\zeta)$, wenn sie mindestens p Unendlichkeitspunkte im Innern des Polygons S hat, immer so einrichten, dass sie sich in jedem Punkte ζ, den man mit Durchsetzung nur einer endlichen Anzahl von Polygonen vom Ausgangspolygone aus erreicht, und der in angebbarer Entfernung von jedem Unstetigkeitspunkte derselben liegt, bei stetiger Abänderung des Polygons S in abschätzbarer Weise stetig ändert.

Dasselbe gilt, wenn man noch einen oder mehrere auf dem Polygonrande liegende Unstetigkeitspunkte hinzufügt.

Ich kann so beliebig viele symmetrische automorphe Functionen bilden, die sich sämmtlich in angebbarer Weise stetig ändern.

Von allen diesen wähle ich irgend zwei solche aus, welche einer primitiven Gleichung des algebraischen Gebildes genügen — ich brauche z. B. nur dafür zu sorgen, dass die Anzahlen der ∞-Stellen im Vollbereiche theilerfremd zu einander sind. — Diese Functionen nenne ich x und y. Jede andere symmetrische oder unsymmetrische automorphe Function drückt sich dann rational durch x und y aus. Dann brauche ich nur bei Abänderung des Bereichs die Coefficienten dieser rationalen Function von x und y festzuhalten, um eine stetige Aenderung auch der allgemeinsten automorphen Function in allen Punkten ζ zu erhalten, welche in angebbarer Entfernung von den Unstetigkeitsstellen derselben liegen:

Man kann alle automorphen Functionen des Bereichs gleichzeitig so einrichten, dass sich jede bei stetiger Abänderung des Bereichs in allen Punkten ζ, die man mit Durchsetzung nur einer endlichen Zahl von Polygonen vom Ausgangspolygon aus erreicht, und welche in angebbarer Entfernung von jedem Unendlichkeitspunkt der Function liegen, in abschätzbarer Weise stetig ändert.

Man könnte noch zweifeln, ob dieser Satz auch für solche Punkte ζ gilt, welche zwar in angebbarer Entfernung von jedem ∞-Punkte der Function $F(\zeta) = R(x, y)$ liegen, aber mit einer ∞-Stelle von x oder von y zusammenfallen, da ja in solchen Punkten x bezw. y sich nicht stetig ändert. Dies Bedenken erledigt sich aber einfach dadurch, dass man die betreffende Stelle in eine geschlossene Contur einschliesst, welche keine Unstetigkeitsstelle der Function z und der abgeänderten Function z' enthält, oder einer solchen unendlich nahe kommt. Dann ist $z - z'$ innerhalb dieser Contur holomorph und auf der Contur selbst, folglich auch im Innern einschliesslich des fraglichen Punktes dem absoluten Werthe nach unterhalb einer abschätzbaren mit ε stetig verschwindenden oberen Grenze gelegen, w. z. b. w.

Jetzt lässt sich auch leicht der weitere in § 2 ausgesprochene Satz beweisen:

Man kann zu jeder zwischen zwei automorphen Functionen x, y des einen Bereichs bestehenden algebraischen Gleichung, deren Grad in x, y bis zur Werthigkeit von y, x ansteigt, eine von ihr abschätzbar unendlich wenig verschiedene algebraische Gleichung bestimmen, die zu zwei automorphen Functionen x', y' des abgeänderten Bereichs gehört.

Seien etwa x und y zwei automorphe Functionen des Bereiches S, die nicht nothwendig symmetrisch zu sein brauchen, und zwar soll x

$n\ \infty$-Stellen, $y\ m\ \infty$-Stellen im Vollbereich haben. x und y genügen dann einer algebraischen Gleichung von der Gestalt:

$$\sum_{\mu=0,\nu=0}^{\mu=m,\nu=n} a_{\mu\nu}\, x^\mu\, y^\nu = 0.$$

Die Coefficienten, $(m+1)(n+1)$ an Zahl, kann man so bestimmen, dass man die Gleichung mit unbestimmten Coefficienten ansetzt, und in x und y gleichzeitig $(m+1)$, $(n+1)$ solche verschiedene Werthe $\zeta_1, \zeta_2, \ldots \zeta_{(m+1)(n+1)}$ nach einander einsetzt, welche sämmtlich in angebbarer Entfernung von jeder ∞-Stelle sowohl der Function x, wie der Function y liegen. So bekommt man eine hinreichende Anzahl linearer homogener Gleichungen für die $a_{\mu\nu}$, aus denen man dieselben mit Unterdrückung eines allen gemeinsamen willkürlichen Factors als ganze Functionen der Werthe von x und von y in den Punkten $\zeta_1, \zeta_2, \ldots \zeta_{(m+1)(n+1)}$ bestimmen kann.

Aendere ich nun den Bereich stetig ab und halte dabei die Punkte $\zeta_1, \zeta_2, \ldots \zeta_{(m+1)(n+1)}$ fest, so ändern sich die x und y in jedem dieser Punkte in angebbarer Weise stetig, folglich ändern sich auch die $a_{\mu\nu}$ als ganze Functionen dieser Werthe angebbar stetig, womit der Satz bewiesen ist.

Hieraus folgt dann auch unmittelbar der Schlusssatz des § 2:

Man kann zu jeder zum Bereiche S gehörigen geschlossenen Riemann'schen Fläche eine geschlossene Riemann'sche Fläche des Bereiches S' construiren, welche denselben Blätterzusammenhang besitzt, deren Verzweigungspunkte aber um je eine mit ε stetig verschwindende abschätzbare Grösse verschoben sind.

Denn die Bestimmung der Verzweigungspunkte hängt nur noch von der Auflösung algebraischer Gleichungen ab, deren Coefficienten sich in angebbarer Weise stetig ändern.

Göttingen, Juni 1894.

Inhaltsverzeichniss.

Die Raumcurve sechster Ordnung vom Geschlechte 1 als Erzeugniss trilinearer Grundgebilde.

Von

Franz London in Breslau.

In der nachstehenden Arbeit sollen meine Untersuchungen über die trilineare Verwandtschaft*) fortgesetzt und vor Allem für das Studium der Erzeugnisse trilinearer Grundgebilde verwendet werden. Zunächst werden die ∞^1 gemeinsamen Tripel zweier trilinearen Beziehungen, deren Gesammtheit als „bicursale Tripelreihe" bezeichnet wird, betrachtet und ihre Eigenschaften untersucht; dabei ergiebt sich, dass die Strahlentripel, welche die Punkte einer ebenen Curve III. O. mit drei festen Punkten derselben verbinden, ebenso wie die Ebenentripel, welche die Punkte einer Raumcurve 4ter, 5ter, 6ter Ordnung vom Geschlechte 1 aus resp. 3 ihrer Bi-, Tri-, Quadri-Secanten projiciren, Tripelreihen der betrachteten Art bilden, so dass man auf diesem Wege zu einer *gemeinsamen* Erzeugung dieser einfachsten ebenen, wie räumlichen elliptischen Curven gelangt. Der zweite Paragraph beschäftigt sich mit den Eigenschaften der 6 gemeinsamen Tripel dreier trilinearer Beziehungen, welche ein merkwürdiges und bisher wohl wenig untersuchtes System associirter Elemente in dem Sinne bilden, dass jede trilineare Beziehung, welcher 5 der 6 Tripel angehören, auch das 6te Tripel enthält, so dass durch 5 dieser Tripel das 6te eindeutig bestimmt ist. Für dieses 6te eindeutig bestimmte Tripel wird eine einfache lineare Construction angegeben und gezeigt, dass die wichtigen associirten Systeme, die von den 9 Schnittpunkten zweier Curven IIIter O., von den 8 Schnittpunkten dreier Flächen IIter O., von den 6 gemeinsamen Nullpaaren von 4 Reciprocitäten u. s. w. gebildet werden, sämmtlich auf das hier betrachtete System von 6 associirten Tripeln zurückführbar sind, so dass sich für alle diese geometrischen Abhängigkeiten das letzte durch die übrigen eindeutig

*) cf. Math. Ann. Bd. 44, p. 375—412. Diese Arbeit werde fortan mit „*T. V.*" citirt.

bestimmte Element durch unsere Construction des 6[ten] associirten Tripels auffinden lässt, und daher alle diese Constructionen *auf eine einzige* sich reduciren lassen. Die beiden letzten Paragraphen verwenden die erlangten Resultate für die Untersuchung der Raumcurven 6[ter] Ordnung vom Geschlechte 1, R_6^1. Man erkennt, dass ebenso, wie für die Raumcurven 4[ter] O. erster Art die 4 Spitzen der sie enthaltenden Kegel, auch für die R_6^1 4 Hauptpunkte auftreten, welche eine wichtige Rolle in der Geometrie der R_6^1 zu spielen berufen sind. Durch jeden dieser 4 Hauptpunkte $S_i (i = 1, 2, 3, 4)$ gehen 3 Trisecanten von R_6^1, und jeder Punkt S_i ist Doppelpunkt einer die R_6^1 enthaltenden cubischen Fläche. Es sind aber auch gleichzeitig die 4 Punkte S_i die dreifachen Punkte von 4 Steiner'schen Flächen, auf welchen R_6^1 gelegen ist, und deren 3 Doppelgeraden durch die 3 durch den betreffenden Hauptpunkt gehenden Trisecanten von R_6^1 gebildet werden. Aus dem Studium der auf R_6^1 befindlichen Systeme von 6 associirten Punkten ergiebt sich ferner, dass jedem Hauptpunkt ein System von Punkttripeln auf R_6^1 zugeordnet ist, und dass diese 4 Tripelsysteme auf R_6^1 dieselbe wichtige Rolle spielen, wie die 4 Tripelsysteme auf der ebenen Curve III[ter] O., welche von den Punktetripeln gebildet werden, in welchen die Geraden der Ebene die C_3 schneiden, und in welchen Kegelschnitte die C_3 (dreimal) berühren, so dass man zu einer weitgehenden Analogie der Geometrie auf der R_6^1 und der C_3 geführt wird, und zwar bewegt sich diese Analogie in einer Richtung, die wir bei den elliptischen Raumcurven 4[ter] und 5[ter] O. noch nicht vorfinden. Zuletzt wird das Problem der Auffindung der Tritangentialebenen, d. h. derjenigen Ebenen, welche R_6^1 in 3 verschiedenen Punkten berühren, und welche in endlicher Anzahl vorhanden sein müssen, behandelt. Dieses Problem, welches im Raume dem Problem der Doppeltangenten ebener Curven entspricht, führt zu dem interessanten Ergebniss, dass genau 16 Tritangentialebenen von R_6^1 existiren, welche sich — den 4 Hauptpunkten entsprechend — in 4 Gruppen anordnen lassen. Die 4 Tetraeder, deren Seitenflächen von den Tritangentialebenen derselben Gruppe gebildet werden, sind nichts anderes als die Tetraeder der Doppelebenen der 4 die R_6^1 enthaltenden Steiner'schen Flächen, ein Zusammenhang, welcher eine Reihe wichtiger Eigenschaften von R_6^1 erschliesst.

§ 1.

Die bicursalen Tripelreihen.

1) Sind die Elemente ξ, η, ζ dreier einstufiger Grundgebilde $\Xi, \mathrm{H}, \mathrm{Z}$ durch *zwei* trilineare Beziehungen

$$f(\xi,\eta,\zeta)=\sum_{i,k,l} a_{ikl}\xi_i\eta_k\zeta_l=0,\quad f'(\xi,\eta,\zeta)=\sum_{i,k,l} a'_{ikl}\xi_i\eta_k\zeta_l=0 \quad (i,k,l=1,2)$$

verbunden, so besitzen die beiden Tripelfelder F_T, F'_T, deren Gleichungen

$$f(\xi\eta\zeta)=0, \quad f'(\xi\eta\zeta)=0$$

sind, eine einfache Mannigfaltigkeit gemeinsamer Tripel; jedes Element ξ von Ξ wird durch 2 Elementepaare η, ζ; η', ζ' zu einem gemeinsamen Tripel von F_T, F'_T ergänzt, so dass, wenn ξ das ganze Gebilde Ξ durchläuft, die Paare η, ζ, welche ξ zu einem gemeinsamen Tripel von F_T, F'_T ergänzen, die Gebilde H, Z *zweimal* durchlaufen; aus diesem Grunde bezeichneten wir die Gesammtheit der gemeinsamen Tripel zweier Tripelfelder als *bicursale Tripelreihe* R_T^2 (cf. T. V. § 1. 2), p. 378). Jedes Tripelfeld des durch F_T und F'_T bestimmten Büschels $f+kf'=0$ enthält ebenfalls die R_T^2, und jedes Tripelfeld, welches R_T^2 enthält, gehört jenem Büschel an, so dass wir R_T^2 nicht nur durch F_T, F'_T, sondern durch irgend 2 beliebige Tripelfelder des Büschels $f+kf'=0$ definiren dürfen.

2) Bicursale Tripelreihen (R_T^2) treten regelmässig bei Curven (und ebenso bei Kegeln, Developpablen, Regelflächen) *vom Geschlechte* 1 auf und geben zur Erzeugung dieser Gebilde Veranlassung; hier seien einige der wichtigsten solcher Fälle hervorgehoben. *Die Strahlentripel, welche drei feste Punkte P_ξ, P_η, P_ζ einer ebenen Curve III. O.* (C_3) *mit deren sämmtlichen Punkten verbinden, bilden eine bicursale Tripelreihe.* Denn diese Strahlentripel gehören zunächst derjenigen reducirt-trilinearen Beziehung F'_T (cf. T. V. § 1. 5), p. 381) der 3 Strahlenbüschel P_ξ, P_η, P_ζ an, welche gebildet wird von je 3 Strahlen ξ, η, ζ, die sich in einem Punkte schneiden. Zweitens wollen wir nun zeigen, dass sie aber auch derjenigen eindeutig bestimmten trilinearen Beziehung F_T angehören, welche bestimmt ist durch die 6 Tripel ξ_i, η_i, ζ_i $(i=1,2,\ldots 6)$, welche 6 beliebige Punkte $P_i (i=1,2,\ldots 6)$ von C_3 mit P_ξ, P_η, P_ζ verbinden, und ein beliebiges Tripel von 3 Strahlen, welche sich nicht in einem Punkte schneiden. Das durch diese 7 Tripel eindeutig bestimmte Tripelfeld F_T hat mit der zuerst genannten reducirt-trilinearen Beziehung F'_T eine R_T^2 gemein, bei welcher die 3 Strahlen eines Tripels, da dieses F'_T angehört, sich in einem Punkte schneiden. Diese zu den sämmtlichen Tripeln von R_T^2 gehörigen Schnittpunkte erfüllen eine ebene Curve, welche offenbar mit C_3 identisch ist. Denn einerseits ist sie von der dritten Ordnung; es sind nämlich die Schnittpunkte einer beliebigen Geraden g mit ihr die 3 Punkte, in welchen sich die Strahlen der 3 gemeinsamen Tripel (cf. T. V. § 2. 1), p. 386) von F_T mit der unicursalen Tripelreihe der Strahlentripel, welche die Punkte von g mit P_ξ, P_η, P_ζ verbinden, schneiden. Andererseits enthält diese Curve III. O. offenbar die 3 Scheitel P_ξ, P_η, P_ζ und die 6 Punkte $P_1, P_2, \ldots, P_6$, hat also mit C_3 9 beliebige Punkte gemein, und ist somit mit C_3 identisch; daher bilden die Tripel, welche die

Punkte von C_3 mit den 3 beliebigen Punkten P_ξ, P_η, P_ζ verbinden, die bicursale Tripelreihe R_T^2. Gleichzeitig ergiebt sich aus dem Beweisgange der Satz: *Sind die 3 Strahlenbüschel P_ξ, P_η, P_ζ in zweifacher Weise trilinear bezogen, und enthält das von diesen beiden trilinearen Beziehungen $f(\xi\eta\zeta)=0$, $f'(\xi\eta\zeta)=0$ bestimmte Büschel $f+kf'=0$ die reducirt-trilineare Beziehung, bei der sich die 3 Strahlen eines Tripels stets in einem Punkte treffen, so besteht die allen trilinearen Beziehungen dieses Büschels gemeinsame bicursale Tripelreihe R_T^2 aus lauter Tripeln, deren 3 Strahlen sich in einem Punkte schneiden, und es erfüllen diese Schnittpunkte eine ebene Curve III. O., welche auch die 3 Scheitel P_ξ, P_η, P_ζ der 3 Büschel enthält.* Oder mit anderen Worten: *Sind 3 Strahlenbüschel P_ξ, P_η, P_ζ trilinear bezogen, so giebt es eine einfache Mannigfaltigkeit von Tripeln dieser Beziehung, welche aus je 3 Strahlen durch einen Punkt bestehen. Diese Tripel erzeugen durch die Schnittpunkte ihrer 3 Strahlen eine allgemeine ebene Curve III. O., welche auch die Scheitel der 3 Büschel enthält.**) Auf diese Weise gelangen wir zu einer höchst brauchbaren Erzeugung der ebenen Curven III. O., auf welche sich die *Chasles'sche Erzeugung* der C_3 aus einem Strahlenbüschel und einem dazu projectiven Kegelschnittbüschel unmittelbar zurückführen lässt. Denn ist ξ ein beliebiger Strahl durch P_ξ, so bilden die Strahlenpaare, welche ξ zu einem Tripel der trilinearen Beziehung ergänzen, entsprechende Elemente projectiver Strahlenbüschel (cf. T. V. § 1. 1), p. 377). Die Schnittpunkte entsprechender Strahlen erzeugen einen Kegelschnitt K_ξ, der ξ in 2 Punkten Q, R schneidet, welche mit P_η, P_ζ verbunden, diejenigen beiden Strahlenpaare liefern, welche mit ξ je ein Tripel der trilinearen Beziehung bilden, dessen 3 Strahlen sich in einem Punkte schneiden. Es sind also Q, R die beiden von P_ξ verschiedenen Punkte auf ξ, in welchen ξ die zu erzeugende C_3 schneidet, und man erkennt, dass diese Punktepaare von C_3 auf den Strahlen ξ des Strahlenbüschels P_ξ auch ausgeschnitten werden von den Kegelschnitten K_ξ, welche ein zu dem Strahlenbüschel P_ξ projectives Kegelschnittbüschel bilden (cf. T. V. § 1. 1), p. 378), wodurch wir direct zur Chasles'schen Erzeugung geführt werden. —

Ist auf 3 beliebigen einstufigen Grundgebilden Ξ, H, Z eine bicursale Tripelreihe R_T^2 gegeben, und sind F_T, F'_T 2 die R_T^2 enthaltende Tripelfelder, so lassen sich stets (cf. T. V. § 1. 6), p. 381) 3 in derselben Ebene befindliche zu Ξ, H, Z resp. *projective* Strahlenbüschel $\mathfrak{P}_\xi$, $\mathfrak{P}_\eta$, $\mathfrak{P}_\zeta$ angeben derart, dass die den Tripeln von F_T in $\mathfrak{P}_\xi$, $\mathfrak{P}_\eta$, $\mathfrak{P}_\zeta$ projectiven Tripel die reducirt-trilineare Beziehung bilden,

*) cf. Le Paige et M. F. Folie: Mémoire sur les courbes de troisième ordre, Mém. de l'acad. roy. de Belg. Tome 45.

d. h. die 3 Strahlen eines solchen Tripels sich in einem Punkte treffen; wir bezeichnen dieses dem Tripelfeld F_T projectiv zugeordnete Tripelfeld durch $\mathfrak{F}_T$, es ist dann $\mathfrak{F}_T$ in reducirter Lage befindlich. Den Tripeln des zweiten, R_T^2 enthaltenden Tripelfeldes F_T' entsprechen in $\mathfrak{P}_\xi$, $\mathfrak{P}_\eta$, $\mathfrak{P}_\zeta$ Strahlentripel, welche ebenfalls ein Tripelfeld $\mathfrak{F}_T'$ bilden, bei welchem sich jedoch im Allgemeinen die 3 Strahlen desselben Tripels nicht in einem Punkte schneiden. Den Tripeln von R_T^2 entsprechen dann die gemeinsamen Tripel von $\mathfrak{F}_T$ und $\mathfrak{F}_T'$, welche eine bicursale Tripelreihe $\mathfrak{R}_T^2$ bilden; diese $\mathfrak{R}_T^2$ ist allen trilinearen Beziehungen eines Büschels gemeinsam, dem auch die reducirt-trilineare Beziehung $\mathfrak{F}_T$ angehört, also schneiden sich nach dem vorangehenden Satze je 3 Strahlen eines Tripels von R_T^2 in einem Punkte, und diese Schnittpunkte erfüllen eine ebene C_3, welche auch $\mathfrak{P}_\xi$, $\mathfrak{P}_\eta$, $\mathfrak{P}_\zeta$ enthält. Also ergiebt sich: *Ist in 3 einstufigen Grundgebilden* Ξ, H, Z *eine bicursale Tripelreihe* R_T^2 *gegeben, so lassen sich stets 3 zu resp.* Ξ, H, Z *projective Strahlenbüschel* $\mathfrak{P}_\xi$, $\mathfrak{P}_\eta$, $\mathfrak{P}_\zeta$ (*in derselben Ebene*) *angeben, derart dass die den Tripeln von* R_T^2 *in* $\mathfrak{P}_\xi$, $\mathfrak{P}_\eta$, $\mathfrak{P}_\zeta$ *projectiven Tripel eine bicursale Tripelreihe* $\mathfrak{R}_T^2$ *bilden, bei welcher sich je 3 Strahlen eines Tripels in einem Punkte schneiden, und wo diese Schnittpunkte eine ebene* C_3 *erfüllen, welche auch die 3 Scheitel* $\mathfrak{P}_\xi$, $\mathfrak{P}_\eta$, $\mathfrak{P}_\zeta$ *enthält. Es lassen sich demnach stets die Tripel einer bicursalen Tripelreihe auf die Punkte einer ebenen* C_3 *umkehrbar eindeutig abbilden*, eine Thatsache, welche für die Erforschung der Eigenschaften einer R_T^2 von ausschlaggebender Bedeutung ist.

3) Es seien Ξ, H, Z drei Ebenenbüschel mit 3 windschiefen Axen g_ξ, g_η, g_ζ und seien die Ebenen ξ, η, ζ von resp. Ξ, H, Z durch 2 trilineare Beziehungen $f(\xi\eta\zeta) = 0$, $f'(\xi\eta\zeta) = 0$ verbunden; die Tripel dieser beiden Beziehungen bilden 2 Tripelfelder F_T, F_T', und die diesen gemeinsamen Tripel eine bicursale Tripelreihe R_T^2. Die Punkte, in denen sich die Tripel von F_T schneiden, erfüllen eine Fläche III. O. F_3 (cf. T. V. § 4. 1), und die Schnittpunkte der Ebenentripel von F_T' eine ebensolche F_3'; F_3 und F_3' enthalten die 3 Axen g_ξ, g_η, g_ζ; ausserdem haben F_3, F_3' eine Raumcurve 6ter Ordnung gemein, deren Punkte die Schnittpunkte von je 3 Ebenen eines Tripels von R_T^2 sind, *also erfüllen die Punkte, in welchen sich die 3 Ebenen eines Tripels dreier bicursaler Ebenenbüschel schneiden, eine Raumcurve 6ter O., welche der Durchschnitt zweier Flächen III. O. ist, die ausserdem noch 3 windschiefe Geraden, die Axen der 3 Ebenenbüschel, gemein haben.* Die Raumcurve 6ter O., welche 2 Flächen III. O., abgesehen von 3 windschiefen Geraden, gemein haben, ist aber *vom Geschlechte* 1, und besitzt diese 3 Geraden zu Quadrisecanten.*) Andererseits besitzt

---

*) cf. Sturm: Flächen III. Ordnung, p. 201 und 222.

jede Raumcurve 6^{ter} O. vom Geschlechte 1 drei und nur drei Quadrisecanten und alle Flächen III. O., welche durch sie hindurchgehen, bilden ein Büschel, dessen Basiscurve von der Raumcurve 6^{ter} O. und deren 3 Quadrisecanten gebildet wird.*) Daraus ergiebt sich, wenn wir noch eine Raumcurve 6^{ter} O. vom Geschlechte 1 durch R_6^1 bezeichnen: *Die Ebenentripel, welche die Punkte einer R_6^1 aus ihren 3 Quadrisecanten projiciren, bilden eine bicursale Tripelreihe R_T^2. Demnach lässt sich jede R_6^1 mittels bicursaler Ebenenbüschel, welche die 3 Quadrisecanten zu Axen haben, erzeugen.*

4) Sind die beiden trilinearen Beziehungen $f = 0$, $f' = 0$, welche zwischen den Ebenentripeln ξ, η, ζ der 3 Büschel g_ξ, g_η, g_ζ bestehen, so beschaffen, dass ein gemeinsames Tripel von $f = 0$, $f' = 0$, also ein Tripel der von ihnen erzeugten R_T^2, aus 3 Ebenen durch eine Gerade g besteht, so zerfällt die R_6^1 in diese Gerade g und eine Raumcurve 5^{ter} O. vom Geschlechte 1 ($R_5{}^1$), welche g_ξ, g_η, g_ζ zu Trisecanten hat; denn die beiden Flächen III. O., welche durch $f = 0$, $f' = 0$ erzeugt werden, haben alsdann die 3 windschiefen Geraden g_ξ, g_η, g_ζ und die jene 3 schneidende Gerade g gemein, die übrigen, beiden Flächen gemeinsamen Punkte erfüllen eine $R_5{}^1$**). Umgekehrt gilt ebenfalls: *Jede $R_5{}^1$ wird aus 3 windschiefen Trisecanten g_ξ, g_η, g_ζ durch 3 bicursale Ebenenbüschel projicirt; wobei ein Tripel existirt, dessen 3 Ebenen durch eine Gerade gehen.* Denn betrachten wir den 10^{ten} Schnittpunkt P des Hyperboloids $(g_\xi g_\eta g_\zeta)$ mit $R_5{}^1$ (d. h. den nicht auf g_ξ, g_η, g_ζ gelegenen), und ist g die eindeutig bestimmte durch ihn gehende Gerade, welche g_ξ, g_η, g_ζ schneidet, und seien diese Schnittpunkte P_1, P_2, P_3, dann geht durch $R_5{}^1$ und P_1, P_2, P_3 ein Büschel von Flächen III. O., da eine $R_5{}^1$***) für die Bestimmung einer cubischen Fläche die Bedeutung von 15 Punkten hat; alle Flächen dieses Büschels enthalten die 4 Geraden $g_\xi, g_\eta, g_\zeta, g$. Sind F_3, F_3' zwei solcher Flächen, so werden die Punkte von F_3 aus g_ξ, g_η, g_ζ durch 3 trilineare Ebenenbüschel projicirt, ebenso die Punkte von F_3'; die gemeinsamen Tripel dieser beiden trilinearen Beziehungen erzeugen die $R_5{}^1$ (sammt der Geraden g), sie bilden eine R_T^2, so dass in der

---

*) cf. Emil Weyr: Ueber Raumcurven 6^{ter} Ordnung vom Geschlechte 1; Sitzungsberichte der Wiener Academie, Mathem. naturw. Classe, Bd. 99, 1890, p. 936), sowie Nöther: Zur Grundlegung der Theorie der alg. Raumcurven, § 16, Abh. d. Berl. Acad. 1882.

**) cf. Sturm: Flächen III. Ordnung: Capitel V, 66, ε p. 211; unter den dort aufgeführten Fall subsumirt sich, wie man leicht erkennt, der hier betrachtete speciellere; im Uebrigen ergiebt sich, da R_T^2, wie in (2) gezeigt, sich auf die ebene C_3 abbilden lässt, dass auch die Punkte der hier auftretenden Raumcurve 5^{ter} O. sich auf die Punkte einer ebenen C_3 umkehrbar eindeutig beziehen lassen, so dass also das Geschlecht von R_5 jedenfalls $= 1$ ist.

***) cf. Sturm: l. c. p. 234.

That die R_5^1 aus g_ξ, g_η, g_ζ durch eine R_T^2 projicirt wird. — Ganz analog beweist man: *Drei bicursale Ebenenbüschel, welche 2 Tripel enthalten, deren 3 Ebenen sich in je einer Geraden schneiden, erzeugen eine Raumcurve 4ter O. vom Geschlechte 1 (R_4^1), welche die Axen der 3 Büschel zu Secanten hat*, und umgekehrt: *Jede R_4^1 wird aus 3 windschiefen Secanten g_ξ, g_η, g_ζ durch 3 bicursale Ebenenbüschel projicirt, bei welchen 2 Tripel aus je 3 Ebenen durch eine Gerade bestehen.* — Schneiden sich insbesondere die 3 Secanten g_ξ, g_η, g_ζ von R_4^1 in 3 Punkten:

$$(g_\eta g_\zeta) = P_\xi, \quad (g_\zeta g_\xi) = P_\eta, \quad (g_\xi g_\eta) = P_\zeta$$

und sind F_2, F_2' zwei durch R_4^1 gehende Flächen II. O., so werden die Punkte von F_2 aus g_ξ, g_η, g_ζ durch 3 trilineare Ebenenbüschel projicirt, für welche die in der Ebene $(g_\xi g_\eta g_\zeta)$ vereinigt gelegenen Ebenen der 3 Büschel ein Tripel bilden (cf. T. V. § 4. 9), p. 411), und ebenso die Punkte von F_2'; die gemeinsamen Tripel dieser beiden trilinearen Beziehungen bestehen aus je 3 Ebenen, die sich in den Punkten von R_4^1 schneiden, also: *Sind P_ξ, P_η, P_ζ 3 Punkte einer R_4^1, so wird die R_4^1 aus den 3 Secanten*

$$g_\xi = P_\eta P_\zeta, \quad g_\eta = P_\zeta P_\xi, \quad g_\zeta = P_\xi P_\eta$$

durch 3 bicursale Ebenenbüschel projicirt, bei denen ein Tripel aus den 3 in $(P_\xi P_\eta P_\zeta)$ vereinigten Ebenen besteht. —

5) Wir haben gezeigt, dass eine R_T^2 durch 6 ihrer Tripel bestimmt ist (cf. T. V. § 1. 2), und haben gelehrt, wie man aus 6 gegebenen Tripeln alle weiteren Tripel der R_T^2 construiren kann (cf. T. V. § 3. 5), p. 402), diese Construction löst nun unmittelbar die folgenden Aufgaben:

a) *Eine ebene C_3 aus 9 ihrer Punkte $P_\xi, P_\eta, P_\zeta, P_1, \ldots P_6$ zu construiren;* man construire die R_T^2, welche durch die 6 Tripel

$$\xi_i = (P_\xi P_i), \quad \eta_i = (P_\eta P_i), \quad \zeta_i = (P_\zeta P_i) \quad (i = 1, 2, \ldots 6)$$

bestimmt ist.

b) *Eine R_4^1 aus 8 Punkten $P_\xi, P_\eta, P_\zeta, P_1, \ldots P_5$ zu construiren;* man construire diejenige R_T^2, welche durch die 6 Tripel

$$\xi_i = (P_\eta P_\zeta P_i), \quad \eta_i = (P_\zeta P_\xi P_i), \quad \zeta_i = (P_\xi P_\eta P_i) \quad (i = 1, 2, \ldots 5)$$

und

$$(P_\eta P_\zeta P_\xi) = \alpha, \quad (P_\zeta P_\xi P_\eta) = \beta, \quad (P_\xi P_\eta P_\zeta) = \gamma$$

bestimmt ist.

c) *Eine R_6^1 aus den 3 Quadrisecanten g_ξ, g_η, g_ζ und 6 ihrer Punkte $P_1, \ldots P_6$ zu construiren;* man construire diejenige R_T^2, welche durch die 6 Tripel

$$\xi_i = (g_\xi P_i), \quad \eta_i = (g_\eta P_i), \quad \zeta_i = (g_\zeta P_i) \quad (i = 1, 2, \ldots 6)$$

bestimmt ist. — Alle diese Aufgaben werden durch *dieselbe Construction* der R_T^2 aus 6 ihrer Tripel vollzogen. — Wir erkennen somit, dass

die bicursalen Tripelreihen eine gemeinsame Erzeugung der C_3, sowie der $R_4{}^1, R_5{}^1, R_6{}^1$ liefern, und dass man aus dem Studium der R_T^2 gleichzeitig zu Eigenschaften dieser Curvenclassen gelangen wird. —

6) Wir betrachten noch eine wichtige Ausartung der R_T^2, bei welcher R_T^2 in 2 R_T^1, welche zwei Tripel gemein haben, zerfällt. *Es bilden nämlich 2 unicursale Tripelreihen R_T^1 und $\overline{R}_T^1$, welche 2 Tripel $\alpha\beta\gamma$, $\alpha'\beta'\gamma'$ gemein haben, eine R_T^2, d. h.* sie bestehen aus den gemeinsamen Tripeln zweier trilinearer Beziehungen. Denn sind $\xi\eta\zeta$, $\xi_1\eta_1\zeta_1$ 2 beliebige Tripel von R_T^1, $\xi'\eta'\zeta'$, $\xi_1'\eta_1'\zeta_1'$ 2 solche von $\overline{R}_T^1$, so enthält jede trilineare Beziehung, welcher die 6 Tripel $\alpha\beta\gamma$, $\alpha'\beta'\gamma'$, $\xi\eta\zeta$, $\xi_1\eta_1\zeta_1$, $\xi'\eta'\zeta'$, $\xi_1'\eta_1'\zeta_1'$ angehören, die beiden unicursalen Tripelreihen R_T^1, $\overline{R}_T^1$, da sie von jeder derselben 4 Tripel enthält (cf. T. V. § 2. 1), p. 386); also haben alle Tripelfelder, welche diese 6 Tripel enthalten, die beiden unicursalen Tripelreihen R_T^1, $\overline{R}_T^1$ gemein; es giebt aber durch jene 6 Tripel ein Büschel von Tripelfeldern, so dass offenbar R_T^1 und $\overline{R}_T^1$ zusammen eine bicursale Tripelreihe bilden. Zwei R_T^1, welche *ein* Tripel gemeinsam haben, bestimmen, wie man in gleicher Weise erkennt, genau eine trilineare Beziehung, die die beiden R_T' enthält; 2 beliebige R_T^1 sind in keinem Tripelfelde enthalten, wie sich aus dem früher (cf. T. V. § 2. 2), p. 390) bewiesenen Satze ergiebt, dass 2 in einem Tripelfelde enthaltenen R_T^1 stets 1 oder 2 Tripel gemeinsam haben. Beispiele solcher reducibler R_T^2 bilden die Strahlentripel, welche die Punkte eines Kegelschnitts und einer in seiner Ebene gelegenen Geraden mit 3 festen Punkten P_ξ, P_η, P_ζ dieses Kegelschnittes verbinden. Oder: *Die Punkte zweier Raumcurven dritter Ordnung, welche 2 Punkte gemeinsam haben, werden aus den in diesem Falle vorhandenen*) 3 gemeinsamen Secanten durch Ebenentripel einer in 2 R_T^1 zerfallenden R_T^2 projicirt.*

7) Die singulären Elemente der eine R_T^2 enthaltenden Tripelfelder. Jede R_T^2 ist in einem Büschel von Tripelfeldern F_T enthalten; jedes Tripelfeld F_T, welchem 6 beliebige Tripel von R_T^2 angehören, enthält die ganze R_T^2. Es sei nun F_T ein nicht singuläres Tripelfeld, welches R_T^2 enthält, und seien mit α_1, α_2; β_1, β_2; γ_1, γ_2 die singulären Elemente von F_T bezeichnet, wobei $\alpha_1\beta_2$, $\beta_1\gamma_2$, $\gamma_1\alpha_2$; $\alpha_2\beta_1$, $\beta_2\gamma_1$, $\gamma_2\alpha_1$ die 6 singulären Paare bedeuten (cf. T. V. § 1. 3). Jedes dieser singulären Paare, z. B. $\alpha_1\beta_2$, wird durch ein Element γ_{12} des dritten Grundgebildes Z zu einem Tripel von R_T^2 ergänzt; denn ist F_T' ein zweites R_T^2 enthaltendes Tripelfeld, und bezeichnen wir mit γ_{12} dasjenige Element, welches $\alpha_1\beta_2$ zu einem Tripel von F_T

*) cf. Sturm: Combien y a-t-il de sécantes communes à deux cubiques gauches? Annali di matematica. Serie II, Tome III, art. VII, p. 90.

ergänzt, so bildet $\alpha_1\beta_2\gamma_{12}$ ein Tripel von F'_T, und ebenso von F_T, da $\alpha_1\beta_2$ als singuläres Paar von F_T durch jedes Element von Z zu einem Tripel von F_T ergänzt wird; also ist $\alpha_1\beta_2\gamma_{12}$ ein gemeinsames Tripel von F_T und F'_T, mithin ein Tripel von R_T^2. Somit lassen sich alle singulären Paare eines R_T^2 enthaltenden F_T durch ein Element des dritten Grundgebildes zu einem Tripel von R_T^2 ergänzen; wir erhalten also auf diese Weise aus den 6 singulären Tripeln eines jeden, R_T^2 enthaltenden Tripelfeldes F_T 6 Tripel von R_T^2, die wir folgendermassen bezeichnen:

$$\alpha_1\beta_2\gamma_{12},\quad \beta_2\gamma_1\alpha_{21},\quad \gamma_1\alpha_2\beta_{12},\quad \alpha_2\beta_1\gamma_{21},\quad \beta_1\gamma_2\alpha_{12},\quad \gamma_2\alpha_1\beta_{21};$$

bei diesen 6 Tripeln stimmt stets das erste Element mit dem zweiten Element des vorangehenden überein, so dass man jedes Tripel aus dem vorangehenden nach derselben Vorschrift ableiten kann; auf diese Weise gelangt man nach 6 Schritten zum Ausgangstripel zurück. Diese 6 Tripel bilden also einen Cyklus in dem Sinne, dass man von dem einen der beiden Tripel, welche α_1 als Element auf Ξ haben, ausgeht $(\alpha_1\beta_2\gamma_{12})$, sodann dasjenige — von $\alpha_1\beta_2\gamma_{12}$ verschiedene — Tripel von R_T^2 bildet, dessen Element auf H β_2 ist $(\beta_2\gamma_1\alpha_{21})$; das dritte Tripel unseres Cyklus ist sodann das von $(\beta_2\gamma_1\alpha_{21})$ verschiedene Tripel von R_T^2, welches auf Z das Element γ_1 enthält $(\gamma_1\alpha_2\beta_{12})$ u. s. w. Das 6te derart gebildete Tripel führt zu α_1 zurück, es ist nämlich das von $\alpha_1\beta_2\gamma_{12}$ verschiedene Tripel von R_T^2, dessen Element auf Ξ α_1 ist. So ordnen sich also die aus den 6 singulären Paaren irgend einer, R_T^2 enthaltenden F_T hervorgehenden 6 Tripel von R_T^2 zu einem Cyklus an; solcher Cyklen giebt es eine einfache Mannigfaltigkeit, jedem F_T des R_T^2 enthaltenden F_T-Büschels entspricht einer. Wählt man ein beliebiges Tripel $\alpha_1\beta_2\gamma_{12}$ von R_T^2, so kann man von diesem ausgehend einen solchen Cyklus beginnen; denn man kann $\alpha_1\beta_2$ stets als singuläres Paar einer R_T^2 enthaltenden F_T auffassen; betrachtet man nämlich das eindeutig bestimmte Tripelfeld, welchem 5 beliebige Tripel von R_T^2 und $\alpha_1\beta_2$ als singuläres Paar angehören (cf. T.V. § 3. 3), p. 399), so enthält dasselbe 6 Tripel von R_T^2, also die ganze R_T^2; es ist also $\alpha_1\beta_2$ singuläres Paar einer R_T^2 enthaltenden F_T, und es kann somit das beliebig gewählte Tripel $\alpha_1\beta_2\gamma_{12}$ von R_T^2 als Anfangstripel eines Cyklus dienen. Also gilt: *Ist $\alpha_1\beta_2\gamma_{12}$ ein beliebiges Tripel von R_T^2, und bildet man das 2te Tripel $\beta_2\gamma_1\alpha_{21}$ von R_T^2, dessen Element auf H: β_2 ist, und sodann das 2te Tripel $\gamma_1\alpha_2\beta_{12}$, dessen Element auf Z γ_1 ist u. s. w., so bilden die auf diese Weise successive gebildeten Tripel einen Cyklus von 6 Tripeln derart, dass das 7te so gebildete Tripel das Ausgangstripel ist.* Wenden wir dies an auf die R_T^2, welche gebildet wird von den Strahlentripeln, welche drei Punkte P_ξ, P_η, P_ζ einer ebenen C_3 mit deren übrigen Punkten verbinden. Ist $\alpha_1\beta_2\gamma_{12}$ ein

beliebiges Tripel dieser R_T^2 und $(\alpha_1 \beta_2 \gamma_{12})$ der Punkt von C_3, in welchem sich die 3 Strahlen α_1, β_2, γ_{12} schneiden, dann ist der zu dem 2ten Tripel $\beta_2 \gamma_1 \alpha_{21}$ des Cyklus gehörige Punkt $(\beta_2 \gamma_1 \alpha_{21})$ der letzte Schnittpunkt von C_3 und der Verbindungslinie des ersten Punktes mit P_η, da beide Punkte auf dem Strahl β_2 durch P_η liegen; ebenso ist der zu dem dritten Tripel gehörige Punkt der letzte Schnittpunkt von C_3 und der Verbindungslinie des zweiten Punktes mit P_ζ u. s. w. Unser Satz führt uns somit zu folgender bekannter Eigenschaft der C_3: *Sind P_ξ, P_η, P_ζ drei Punkte von C_3 und beginnen wir mit einem beliebigen Punkte von C_3 ein Polygon der C_3 einzubeschreiben, dessen Seiten der Reihe nach durch P_η, P_ζ, P_ξ hindurchgehen, so schliesst sich dasselbe nach zweimaligem Durchgange durch P_η, P_ζ, P_ξ und bildet also stets ein geschlossenes der C_3 einbeschriebenes Sechseck.**) Ganz analoge Sätze erhalten wir aber, wenn wir die R_T^2 betrachten, welche von den Ebenentripeln gebildet werden, welche 3 Bisecanten einer R_4^1, 3 Trisecanten einer R_5^1, die 3 Quadrisecanten einer R_6^1 mit den resp. Punkten dieser Curven verbinden. Der obige Satz für die R_T^2 liefert nämlich unmittelbar für diese Curven: *Bedeuten die 3 windschiefen Geraden g_ξ, g_η, g_ζ 3 Bisecanten einer Raumcurve IV. O. vom Geschlechte 1, oder 3 Trisecanten einer Raumcurve V. O. vom Geschlechte 1, oder die 3 Quadrisecanten einer Raumcurve VI. O. vom Geschlechte 1 und beginnen wir von einem beliebigen Punkte diesen Curven ein Polygon einzubeschreiben, dessen Seiten der Reihe nach g_ξ, g_η, g_ζ schneiden, so schliesst sich dasselbe nach zweimaligem Durchschneiden von g_ξ, g_η, g_ζ und bildet also, von welchem Punkte der Curve man auch ausgehe, ein geschlossenes der betreffenden Curve einbeschriebenes Sechseck.*

8) Die eine R_T^2 enthaltenden singulären F_T. Wir fragen, ob in dem eine R_T^2 enthaltenden Büschel von F_T singuläre F_T (cf. T. V. § 1. 4) enthalten sind, und in welcher Anzahl. Sind:

$$f(\xi\eta\zeta) = \sum a_{ikl}\, \xi_i \eta_k \zeta_l = 0, \quad f'(\xi\eta\zeta) = \sum a'_{ikl}\, \xi_i \eta_k \zeta_l = 0$$
$$(i, k, l = 1, 2)$$

die Gleichungen zweier F_T des R_T^2 enthaltenden Büschels, so ist die Gleichung jeder anderen F_T dieses Büschels in der Form

$$f(\xi\eta\zeta) + kf'(\xi\eta\zeta) = \sum_{ikl} (a_{ikl} + k a'_{ikl})\, \xi_i \eta_k \zeta_l = 0$$

enthalten, wobei k einen Parameter bedeutet. Wir wollen k so bestimmen, dass $f + kf' = 0$ ein singuläres Tripelfeld darstellt. Dazu müssen die singulären Elemente von $f + kf' = 0$ in einem, und

*) cf. Schröter: Ebene Curven III. Ordnung, Leipzig 1888, p. 268.

damit in jedem, der 3 Grundgebilde Ξ, H, Z zusammenfallen. Ein Element α in Ξ war aber dann und nur dann ein singuläres (cf. T. V. § 1. 3), wenn die zugehörige Projectivität P_α eine specielle war, so dass die Determinante der bilinearen Form, welche die linke Seite der Gleichung von P_α bildet, verschwindet. Die Gleichung der dem Elemente α zugeordneten Projectivität P_α ist:

$$f(\alpha\eta\zeta) + kf'(\alpha\eta\zeta) = \sum_{i,k,l} (a_{ikl} + k a'_{ikl})\, \alpha_i \eta_k \zeta_l$$
$$= \sum_{k,l} \eta_k \zeta_l \sum_i (a_{ikl} + k a'_{ikl})\, \alpha_i = 0.$$

Die Determinante der links stehenden bilinearen Form ist:

$$\Delta(\alpha, k) = \left| \sum_{i=1,2} (a_{ikl} + k a'_{ikl})\, \alpha_i \right| \qquad (k, l = 1, 2)$$

$$= \begin{vmatrix} (a_{111} + k a'_{111})\alpha_1 + (a_{211} + k a'_{211})\alpha_2 & (a_{112} + k a'_{112})\alpha_1 + (a_{212} + k a'_{212})\alpha_2 \\ (a_{121} + k a'_{121})\alpha_1 + (a_{221} + k a'_{221})\alpha_2 & (a_{122} + k a'_{122})\alpha_1 + (a_{222} + k a'_{222})\alpha_2 \end{vmatrix}.$$

Die Gleichung $\Delta(\alpha, k) = 0$ ist die Gleichung der beiden auf Ξ befindlichen singulären Elemente α_1, α_2 des durch $f + kf' = 0$ dargestellten Tripelfeldes; sie ist in α quadratisch und ihre Coefficienten sind in k ebenfalls quadratisch. Die Discriminante dieser in α quadratischen Gleichung $\Delta(\alpha, k) = 0$ ist somit in k vom 4ten Grade, ihr Verschwinden ist die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die singulären Elemente der trilinearen Beziehung $f + kf' = 0$ auf jedem der drei Grundgebilde zusammenfallen, d. h. dass die trilineare Beziehung eine singuläre ist. Damit also $f + kf' = 0$ eine singulär-trilineare Beziehung darstellt, muss k einer biquadratischen Gleichung genügen, so dass 4, im Allgemeinen verschiedene, Werthe $k_i (i = 1, 2, 3, 4)$ existiren derart, dass die Tripelfelder: $f + k_i f' = 0$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ des Büschels *singulär* werden. *In einem Büschel trilinearer Beziehungen existiren demnach 4 singulär-trilineare Beziehungen.* *) Wir bezeichnen die singulären Tripel (cf. T. V. § 1. 4) dieser 4 besonderen F_T des Büschels durch ϱ_i, σ_i, $\tau_i (i = 1, 2, 3, 4)$ und nennen sie *die 4 Haupttripel für die bicursale Tripelreihe.* Betrachten wir eines dieser 4 Haupttripel $\varrho_1 \sigma_1 \tau_1$, dann ist $\varrho_1 \sigma_1 \tau_1$ zwar kein Tripel von R_T^2, aber es sind, wenn $F_T^{(1)}$ das zugehörige singuläre Tripelfeld bedeutet, $\varrho_1 \sigma_1$, $\sigma_1 \tau_1$, $\tau_1 \varrho_1$ singuläre Paare von $F_T^{(1)}$ (cf. T. V. § 1. 4) und werden daher (cf. Art. 7) durch je ein Element des dritten Grundgebildes zu einem Tripel von R_T^2 ergänzt. Das Haupttripel $\varrho_1 \sigma_1 \tau_1$ führt also zu 3 Tripeln von R_T^2,

---

*) cf. Le Paige et M. Folie: Mémoire sur les courbes de IIIième ordre; Belg. Acad. Mém. Tom. 45.

von denen jedes 2 Elemente dieses Haupttripels enthält, und die wir bezeichnen durch: $\varrho_1\sigma_1\tau$, $\sigma_1\tau_1\varrho$, $\tau_1\varrho_1\sigma$; das erste dieser 3 Tripel hat mit dem letzten das Element auf Ξ gemein, das 2te mit dem 1ten das Element auf H, das 3te mit dem 2ten das Element auf Ξ; es bilden somit die 3 Tripel in derselben Weise, wie im vorigen Artikel, einen Cyklus, indem durch dasselbe Verfahren jedes Tripel aus dem vorangehenden hergeleitet wird, und das 4te Tripel wieder das Ausgangstripel ist. Also gilt: *Ist* $\varrho_1\sigma_1\tau_1$ *ein Haupttripel für* R_T^2, *so gehört zwar dieses Tripel der* R_T^2 *im Allgemeinen nicht an, dagegen lassen sich je* 2 *Elemente von* $\varrho_1\sigma_1\tau_1$ *zu je einem Tripel von* R_T^2 *ergänzen, so dass jedes Haupttripel zu* 3 *Tripeln von* R_T^2 ($\varrho_1\sigma_1\tau$, $\sigma_1\tau_1\varrho$, $\tau_1\varrho_1\sigma$) *Veranlassung giebt, derart, dass das erste dieser* 3 *Tripel mit dem letzten das Element auf* Ξ, *das* 2te *mit dem* 1ten *das Element auf* H, *das* 3te *mit dem* 2ten *das Element auf* Z *gemein hat. Bei diesem Verhalten ist jedes Tripel durch das vorhergehende bestimmt, und es bilden diese* 3 *Tripel einen Cyklus.* Wenden wir dies auf die R_T^2 an, welche von den Strahlentripeln gebildet wird, welche 3 Punkte P_ξ, P_η, P_ζ einer C_3 mit den übrigen verbinden, und seien ϱ_1, σ_1, τ_1 3 Strahlen eines Haupttripels, so schneiden sich diese 3 Strahlen nach dem vorigen Satze paarweise auf der Curve C_3, da z. B. $\varrho_1\sigma_1$ sich durch einen Strahl zu einem Tripel von R_T^2 d. h. zu 3 auf der C_3 sich schneidenden Strahlen ergänzen lässt; das von den 3 Strahlen ϱ_1, σ_1, τ_1 eines Haupttripels gebildete Dreieck ist somit der C_3 einbeschrieben, und seine Seiten enthalten die 3 Punkte P_ξ, P_η, P_ζ; da jedem der 4 Haupttripel ein solches Dreieck entspricht, die 3 Punkte P_ξ, P_η, P_ζ beliebig auf der Curve annehmbar waren, so ist damit der bekannte Satz erwiesen: *Es existiren* 4 *Dreiecke, deren Ecken auf der Curve liegen, und deren Seiten einzeln durch* 3 *auf der Curve gelegene Punkte* P_ξ, P_η, P_ζ *gehen.* Wenden wir den obigen Satz an auf die R_T^2, welche von den Ebenentripeln gebildet werden, welche die Punkte einer Raumcurve 4ter, 5ter, 6ter Ordnung und vom Geschlechte 1 (R_4^1, R_5^1, R_6^1) resp. mit 3 ihrer Bi-, Tri-, Quadrisecanten verbinden, so ergiebt sich: *Bedeuten* g_ξ, g_η, g_ζ 3 *Bisecanten einer* R_4^1, *oder* 3 *Trisecanten einer* R_5^1, *oder die* 3 *Quadrisecanten einer* R_6^1, *so giebt es* 4 *Dreiecke, welche der betreffenden Curve eingeschrieben sind, und deren Seiten der Reihe nach* g_ξ, g_η, g_ζ *schneiden.* Während also, wenn man von einem beliebigen Punkte ausgehend der Curve Polygone einzuschreiben beginnt, deren Seiten der Reihe nach g_ξ, g_η, g_ζ schneiden, sich das Polygon nach zweimaligem Durchschneiden von g_ξ, g_η, g_ζ schliesst, so existiren 4 Systeme von je 3 zusammengehörigen Punkten, von denen ausgehend schon nach einmaligem Umlaufe das Polygon sich schliesst, so dass man von einem dieser Punkte ausgehend zu geschlossenen der Curve eingeschriebenen Dreiecken gelangt.

9) Die Grassmann'sche Erzeugung der C_3. Wir hatten die ebene C_3 erzeugt durch diejenigen Strahlentripel dreier trilinearer Strahlenbüschel P_ξ, P_η, P_ζ, deren Strahlen sich in einem Punkte treffen; es sind dies die Strahlentripel einer R_T^2, da sie die gemeinsamen Tripel bilden der gegebenen trilinearen Beziehung der 3 Büschel und der reducirt-trilinearen Beziehung, welche gebildet wird durch je 3 resp. durch P_ξ, P_η, P_ζ gehende Strahlen, welche sich in einem Punkte schneiden. Wir sahen, dass diese Erzeugung unmittelbar zur Chasles'schen Erzeugung der ebenen C_3 hinführte. Wählt man die trilineare Beziehung nicht, wie bisher, ganz allgemein, sondern in bestimmter Weise specialisirt, so gelangt man zur Grassmann'schen Erzeugung der ebenen C_3, die sich also ebenfalls als Erzeugung durch 3 bicursale Strahlenbüschel entpuppt. Wählt man nämlich neben den 3 Punkten P_ξ, P_η, P_ζ 3 weitere Punkte P_x, P_y, P_z, so schneidet jede Gerade g der Ebene die 3 Seiten $P_yP_z = p_x$, $P_zP_x = p_y$, $P_xP_y = p_z$ des Dreiecks $P_xP_yP_z$ in 3 Punkten X, Y, Z; alle diese Tripel X, Y, Z bilden die Tripel der reducirt-trilinearen Beziehung der 3 geraden Punktreihen p_x, p_y, p_z, welche gebildet wird von den Tripeln von je 3 in gerader Linie liegenden Punkten (cf. T. V. § 1. 5, p. 382). Je 3 Strahlen $P_\xi X = \xi$, $P_\eta Y = \eta$, $P_\zeta Z = \zeta$ bilden die Tripel einer trilinearen Beziehung F_T der 3 Strahlenbüschel P_ξ, P_η, P_ζ, da die 3 Strahlenbüschel P_ξ, P_η, P_ζ perspectiv auf die 3 trilinearen Punktreihen p_x, p_y, p_z bezogen sind (cf. T. V. § 1. 6, p. 381, 382). Diese trilineare Beziehung F_T erzeugt durch die Tripel von je 3 in einem Punkte sich schneidenden Strahlen eine ebene C_3 nach Grassmann'scher Methode*). Die 9 Punkte P_ξ, P_η, P_ζ; P_x, P_y, P_z;

$$P = (\overline{P_\eta P_\zeta}, \overline{P_y P_z}),\ Q = (\overline{P_\zeta P_\xi}, \overline{P_z P_x}),\ R = (\overline{P_\xi P_\eta}, \overline{P_x P_y})$$

liegen auf der so erzeugten C_3. Um andererseits eine gegebene C_3 nach Grassmann'scher Weise zu erzeugen, hat man 3 beliebige Punkte P_ξ, P_η, P_ζ auf der C_3 zu wählen, und 3 Punkte P_x, P_y, P_z so hinzuzufinden, dass die Schnittpunkte P, Q, R entsprechender Seiten der beiden Dreiecke $P_\xi P_\eta P_\zeta$, $P_xP_yP_z$ auf der C_3 liegen; bezieht man dann die 3 Strahlenbüschel P_ξ, P_η, P_ζ trilinear in der oben betrachteten speciellen Weise mittels des Dreiecks P_x, P_y, P_z, so wird die gegebene C_3 erzeugt (cf. Clebsch-Lindemann l. c.). Um ein Dreieck $P_xP_yP_z$ von der gewünschten Beschaffenheit zu finden, ist nur ein Dreieck zu construiren, welches C_3 einbeschrieben ist, und dessen Seiten einzeln durch die 3 Punkte P, Q, R gehen, in welchen die Seiten des auf C_3 gelegenen Dreiecks $P_\xi P_\eta P_\zeta$ die Curve zum dritten Male schneiden. Wir haben oben 8) gefunden, dass stets vier derartige Dreiecke

*) cf. Grassmann: Lineale Ausdehnungslehre, Leipzig 1844, sowie: Clebsch-Lindemann: Vorlesungen über Geometrie, I, p. 536.

existiren, eines derselben ist $P_\xi P_\eta P_\zeta$ selbst, die 3 andern führen zu je einer Grassmann'schen Erzeugung der Curve. Die trilinearen Beziehungen der 3 Strahlenbüschel P_ξ, P_η, P_ζ, welche 6 beliebige Tripel enthalten von je 3 Strahlen, die sich in einem Punkte von C_3 schneiden, bilden ein Büschel; jede trilineare Beziehung dieses Büschels erzeugt die C_3 durch diejenigen ihrer Tripel, deren 3 Strahlen sich in einem Punkte schneiden, und auf diese ∞^1 Erzeugungen lässt sich die Chasles'sche Erzeugung zurückführen; es giebt aber 3 trilineare Beziehungen jenes Büschels, welche auf die Grassmann'sche Erzeugung der C_3 führen, und die wir soeben finden gelehrt haben. —

10) Liegen die 3 Scheitel P_ξ, P_η, P_ζ dreier in derselben Ebene befindlichen Strahlenbüschel *in gerader Linie* und setzt man diese 3 Strahlenbüschel in eine trilineare Beziehung F_T, so werden auch hier die ∞^1 Tripel von F_T, deren 3 Strahlen sich in einem Punkte schneiden, eine C_3 erfüllen, welche die 3 Punkte P_ξ, P_η, P_ζ enthält. Diese ∞^1 Strahlentripel bilden eine bicursale Tripelreihe, denn es bilden diese Tripel die Gesammtheit der gemeinsamen Tripel von F_T und der reducirt-trilinearen Beziehung F'_T, welche gebildet wird von je 3 Strahlen durch resp. P_ξ, P_η, P_ζ, die sich in einem Punkte schneiden. Diese reducirt-trilineare Beziehung F'_T ist aber eine singuläre, da die beiden singulären Elemente eines jeden der 3 Strahlenbüschel in die Gerade $\overline{P_\xi P_\eta P_\zeta}$ zusammenfallen (cf. T. V. § 1. 7), p. 384). *Betrachtet man umgekehrt die ∞^1 Strahlentripel, welche 3 in gerader Linie liegende Punkte P_ξ, P_η, P_ζ einer C_3 mit den übrigen Punkten von C_3 verbinden, so bilden dieselben eine R_T^2, wie man genau, wie in 2), beweist; zu dem Büschel trilinearer Beziehungen, welche diese R_T^2 enthalten, gehört auch die reducirt-trilineare Beziehung F_T^1 der 3 Strahlenbüschel P_ξ, P_η, P_ζ und ist dieselbe eine der 4 singulär-trilinearen Beziehungen dieses Büschels.* Bezeichnen wir die Gerade $\overline{P_\xi P_\eta P_\zeta}$ als Strahl von P_ξ durch α, als solchen von P_η durch β, als solchen von P_ζ durch γ, so ist α, β, γ *eines der 4 Haupttripel für die R_T^2*, welche von den Strahlentripeln, welche P_ξ, P_η, P_ζ mit den Punkten von C_3 verbinden, gebildet wird; ausserdem giebt es noch 3 andere Haupttripel α_i, β_i, γ_i $(i = 1, 2, 3)$ für diese R_T^2; wir wissen, dass die Ecken des Dreiecks $\alpha_i\beta_i\gamma_i$ auf der C_3 liegen, die Seiten resp. durch P_ξ, P_η, P_ζ gehen; es bilden also $\alpha_i\beta_i\gamma_i$ $(i = 1, 2, 3)$ 3 Dreiecke, welche die Gerade $\overline{P_\xi P_\eta P_\zeta}$ zu einem der C_3 eingeschriebenen Viereck ergänzen, so dass wir zu dem bekannten Satze geführt werden: *Eine beliebige Gerade lässt sich durch 3 Dreiecke zu einem der C_3 einbeschriebenen Vierseit ergänzen.* Wir erhalten also hier von der trilinearen Erzeugung der C_3 einen einfachen Eingang zu der wichtigen Theorie der 3 Systeme von Polepaaren und Tripeln auf der C_3.

11) Sind die Elemente ξ, η, ζ dreier einstufiger Grundgebilde in

zweifacher Weise in trilineare Beziehung gesetzt, so bilden die gemeinsamen Tripel dieser beiden trilinearen Beziehungen eine bicursale Tripelreihe R_T^2 allgemeinster Art. Es existiren (cf. Art. 8) 4 singuläre Tripelfelder $F_T^{(i)}$ $(i=1,2,3,4)$, welche die R_T^2 enthalten; wir betrachten eines derselben $F_T^{(1)}$ und können 3 zu resp. Ξ, H, Z *projective*, in derselben Ebene gelegene Strahlenbüschel, deren Scheitel P_ξ, P_η, P_ζ *in gerader Linie liegen*, auffinden, so dass die 3 Strahlen ξ', η', ζ' durch resp. P_ξ, P_η, P_ζ, welche den Tripeln ξ, η, ζ von $F_T^{(1)}$ projectiv entsprechen, sich in demselben Punkte treffen, und daher die singulär-trilineare Beziehung $F_T^{(1)}$ abgebildet wird auf die reducirt-trilineare Beziehung $\mathfrak{F}_T^{(1)}$ der 3 Strahlenbüschel P_ξ, P_η, P_ζ, welche ebenfalls singulär ist, da P_ξ, P_η, P_ζ in derselben Geraden angenommen waren (cf. T. V. § 1. 7), p. 386). Den Tripeln $\xi\eta\zeta$ irgend eines anderen, die R_T^2 enthaltenden Tripelfeldes F_T entsprechen projectiv Strahlentripel $\xi'\eta'\zeta'$, welche ebenfalls ein Tripelfeld $\mathfrak{F}_T$ bilden, bei welchem jedoch die 3 Strahlen eines Tripels i. A. nicht durch einen Punkt gehen. Den Tripeln von R_T^2 entsprechen projectiv die gemeinsamen Tripel von $\mathfrak{F}_T^{(1)}$ und $\mathfrak{F}_T$, d. h. diejenigen Tripel von $\mathfrak{F}_T$, deren 3 Strahlen sich in einem Punkte schneiden; diese Schnittpunkte erfüllen aber eine C_3, welche die 3 in gerader Linie liegenden Punkte P_ξ, P_η, P_ζ enthält. Es sind somit die Tripel von R_T^2 eindeutig auf diese Tripel von $\mathfrak{F}_T$ bezogen, deren 3 Strahlen sich in einem Punkte schneiden, also gilt der für das weitere Studium der Eigenschaften der R_T^2 bedeutsame Satz: *Die Tripel einer jeden bicursalen Tripelreihe lassen sich umkehrbar-eindeutig beziehen auf die Strahlentripel, welche* 3 *in gerader Linie liegende, feste Punkte einer C_3 mit deren übrigen Punkten verbinden.* —

12) Die Verzweigungselemente einer bicursalen Tripelreihe. Sind die 3 Grundgebilde Ξ, H, Z in zweifacher Weise trilinear bezogen, so fragen wir nach denjenigen Elementen ξ des Grundgebildes Ξ, für welche die beiden Paare $\eta\zeta$, $\eta'\zeta'$, welche ξ zu je einem Tripel der von den gemeinsamen Tripeln der beiden trilinearen Beziehungen gebildeten R_T^2 ergänzen, zusammenfallen; ein derartiges Element heisse *ein Verzweigungselement.* Wir können 3 zu resp. Ξ, H, Z projective, in derselben Ebene gelegene Strahlenbüschel P_ξ, P_η, P_ζ auffinden, derart dass je 3 Strahlen $\xi'\eta'\zeta'$, welche einem Tripel $\xi\eta\zeta$ von R_T^2 projectiv entsprechen, sich in einem Punkte P' schneiden und diese Punkte P' eine durch P_ξ, P_η, P_ζ gehende C_3 erfüllen (cf. art. 2). Damit sind die Tripel von R_T^2 auf die Punkte von C_3 eindeutig bezogen und umgekehrt. Zwei Tripeln in R_T^2, welche das Element in Ξ gemein haben, entsprechen 2 Punkte von C_3, welche mit P_ξ in gerader Linie

liegen und umgekehrt. Fallen die beiden Paare $\eta\zeta$, $\eta'\zeta'$, welche ein Element ξ von Ξ zu einem Tripel von R_T^2 ergänzen, zusammen, ist also ξ ein *Verzweigungselement*, so werden die beiden Punkte, in welchen der zu ξ in P_ξ projective Strahl ξ' die C_3 (ausser P_ξ) schneidet, zusammenfallen, d. h. ξ' wird eine von P_ξ ausgehende Tangente der C_3 sein; jedem Tripel von R_T^2, dessen Element in Ξ ein Verzweigungselement ist, entspricht demnach auf C_3 ein Berührungspunkt einer von P_ξ an die C_3 gehenden Tangente, und umgekehrt entspricht jeder von P_ξ an die C_3 gehenden Tangente in Ξ projectivisch ein Verzweigungselement. Da nun 4 Tangenten ξ_1', ξ_2', ξ_3', ξ_4' von P_ξ an die C_3 gehen, so existiren 4 Verzweigungselemente in Ξ, nämlich diejenigen Elemente ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4, welche in der zwischen Ξ und dem Strahlenbündel P_ξ bestehenden projectivischen Beziehung den 4 Tangenten ξ_1', ξ_2', ξ_3', ξ_4' entsprechen. Genau ebenso ergeben sich in H, Z je 4 Verzweigungselemente η_i, ζ_i $(i = 1, 2, 3, 4)$. Aus dem bekannten Salmon'schen Satze von der Unveränderlichkeit des Doppelverhältnisses der 4 von einem Punkte der C_3 ausgehenden Tangenten folgt unmittelbar: *Die 3 Gruppen von 4 Verzweigungselementen ξ_i, η_i, ζ_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ einer bicursalen Tripelreihe haben dasselbe Doppelverhältniss.**) Auf diejenigen R_T^2 angewandt, welche die Punkte einer R_4^1, R_5^1, R_6^1 aus resp. 3 ihrer Bi-, Tri-, Quadri-Secanten projiciren, ergiebt sich: *Aus einer Bisecante einer R_4^1, einer Trisecante einer R_5^1, einer Quadrisecante einer R_6^1 giebt es je 4 Tangentialebenen an die betreffenden Curven; dass Doppelverhältniss dieser 4 Ebenen ist unveränderlich.*

§ 2.

Das associirte System der 6 gemeinsamen Tripel dreier trilinearer Verwandtschaften.

1) Seien die Elemente ξ, η, ζ resp. der 3 Grundgebilde Ξ, H, Z durch die 3 trilinearen Beziehungen:

$$f(\xi\eta\zeta) = \sum_{i,k,l} a_{ikl}\,\xi_i\eta_k\zeta_l = 0, \qquad f'(\xi\eta\zeta) = \sum_{i,k,l} a'_{ikl}\,\xi_i\eta_k\zeta_l = 0,$$

$$f''(\xi\eta\zeta) = \sum_{i,k,l} a''_{ikl}\,\xi_i\eta_k\zeta_l = 0 \qquad (i, k, l = 1, 2)$$

verbunden, wobei wir f, f', f'' als nicht demselben Büschel angehörig voraussetzen. Wir fragen nach den gemeinsamen Tripeln dieser 3 trilinearen Beziehungen, resp. der 3 Tripelfelder F_T, F'_T, F''_T, welche $f = 0$, $f' = 0$, $f'' = 0$ zu Gleichungen haben. Diese 3 Tripelfelder

*) Le Paige: Essay d'une géom. supér. de III[ième] Ordre, Bull. de la soc. des scienc. de Liège (1883).

bestimmen eine lineare, zweifache Mannigfaltigkeit, ein F_T-Netz, welches gebildet wird von allen Tripelfeldern, deren Gleichung in der Form $kf + k'f' + k''f'' = 0$ enthalten ist, wo k, k', k'' Parameter bedeuten. Die gemeinsamen Tripel von F_T, F'_T, F''_T sind allen Tripelfeldern dieses Netzes gemeinsam. Wir denken uns 3 in einer Ebene befindliche Strahlenbüschel P_ξ, P_η, P_ζ resp. projectiv bezogen auf die 3 Grundgebilde Ξ, H, Z derart, dass 3 Elementen ξ, η, ζ eines Tripels von F_T stets 3 Strahlen $\xi' \eta' \zeta'$, die sich in einem Punkte P' treffen, projectiv entsprechen (cf. T. V. § 1. 6), p. 301); dann sind die Tripel von F_T eindeutig auf die Punkte P' der Ebene $P_\xi P_\eta P_\zeta$ bezogen, und umgekehrt. Den Tripeln von F'_T entsprechen je 3 Strahlen, welche sich i. A. nicht in demselben Punkte treffen und die die Tripel eines Tripelfeldes bilden; nur die den gemeinsamen Tripeln von F_T und F'_T entsprechenden Strahlentripel bestehen aus je 3 Strahlen durch einen Punkt P' und diese Schnittpunkte P' erfüllen eine Curve III. O. C_3', welche P_ξ, P_η, P_ζ enthält (cf. § 1. 2), so dass die gemeinsamen Tripel von F_T, F'_T umkehrbar eindeutig auf die Punkte von C_3' bezogen sind; insbesondere entspricht dem Punkte P_ξ dasjenige gemeinsame Tripel von F_T, F'_T, welches projectivisch ist zu dem Strahlentripel, das gebildet wird von der Tangente der C_3' in P_ξ und den beiden Strahlen $\overline{P_\eta P_\xi}$, $\overline{P_\zeta P_\xi}$; analoges gilt von den Tripeln, welche P_η, P_ζ entsprechen. Ebenso entsprechen den gemeinsamen Tripeln von F_T, F''_T je 3 Strahlen, welche sich in Punkten einer zweiten Curve III. O. C_3'' durch P_ξ, P_η, P_ζ schneiden. Die gemeinsamen Tripel von F_T, F'_T, F''_T gehören sowohl den gemeinsamen Tripeln von F_T, F'_T, wie denjenigen von F_T, F''_T an; ihnen entsprechen demnach je 3 Strahlen, welche sich in einem von P_ξ, P_η, P_ζ verschiedenen gemeinsamen Punkte*) von C_3' und C_3'' schneiden; und umgekehrt entspricht jedem Tripel von je 3 Strahlen, welche einen von P_ξ, P_η, P_ζ verschiedenen Schnittpunkt von C_3', C_3'' mit P_ξ, P_η, P_ζ verbinden, ein gemeinsames Tripel der 3 trilinearen Beziehungen. Da C_3', C_3'' — abgesehen von P_ξ, P_η, P_ζ — 6 gemeinsame Punkte besitzen, so werden 6 gemeinsame Tripel von F_T, F'_T, F''_T existiren, die übrigens theilweise oder sämmtlich zusammenfallen können; also gilt: *Die sämmtlichen Tripelfelder eines Netzes besitzen* 6 *gemeinsame Tripel.***) Ein Tripelfeld $\overline{F}_T$ mit der Gleichung $\overline{f}(\xi\eta\zeta) = 0$, welches 5 der 6 gemeinsamen Tripel eines F_T-Netzes

*) Dem Punkte P_ξ (und ebenso $P_\eta P_\zeta$) wird offenbar nur dann ein gemeinsames Tripel von F_T, F'_T, F''_T entsprechen, wenn C_3' und C_3'' sich in P_ξ berühren, da nur dann die Strahlentripel, welche P_ξ mit P_ξ, P_η, P_ζ verbinden, für C_3' und C_3'' identisch sind.

**) Auch auf dem directen Wege der Rechnung ergiebt sich diese Thatsache, cf. Rosanes: Cr. Journ. Bd. 88, p. 270.

$(f=0,\ f'=0,\ f''=0)$ enthält, gehört diesem Netze an; denn sind $\alpha\beta\gamma$, $\alpha'\beta'\gamma'$ 2 beliebige Tripel von $\overline{F}_T$, so lassen sich k, k', k'' so bestimmen, dass:

$$kf(\alpha\,\beta\,\gamma)+k'f'(\alpha\,\beta\,\gamma)+k''f''(\alpha\,\beta\,\gamma)=0,$$
$$kf(\alpha'\beta'\gamma')+k'f'(\alpha'\beta'\gamma')+k''f''(\alpha'\beta'\gamma')=0$$

wird; also enthält das Tripelfeld, dessen Gleichung

$$kf+k'f'+k''f''=0$$

ist, 7 Tripel von $\overline{F}_T$, ist also mit $\overline{F}_T$ identisch. Da nun $\overline{F}_T$ dem Netze $(ff'f'')$ angehört, so enthält es auch das 6[te] gemeinsame Tripel dieses Netzes, mithin: *Jedes Tripelfeld, welches* 5 *der* 6 *gemeinsamen Tripel dreier Tripelfelder enthält, enthält auch das* 6[te].*) Wir nennen das System von 6 gemeinsamen Tripeln dreier Tripelfelder aus diesem Grunde *ein associirtes System.* Sind $\alpha_1\beta_1\gamma_1$, $\alpha_2\beta_2\gamma_2$, ..., $\alpha_5\beta_5\gamma_5$ 5 beliebige Tripel, so giebt es eine zweifache, lineare Mannigfaltigkeit, ein Netz von Tripelfeldern, welchen diese 5 Tripel gemeinsam sind; dieses Netz besitzt nach dem Vorigen noch ein 6[tes] gemeinsames Tripel $\alpha_6\beta_6\gamma_6$, welches die 5 ersten Tripel zu einem associirten System ergänzt; also ergiebt sich: 5 *beliebige Tripel lassen sich durch ein eindeutig bestimmtes sechstes Tripel zu einem associirten System ergänzen.* Wir haben bisher, wie im Folgenden, vorausgesetzt, dass die 5 Tripel keine specielle Lage besitzen, sondern, dass durch sie, wie es im Allgemeinen der Fall ist, ein Netz von Tripelfeldern bestimmt ist; dazu ist, wie man unschwer zeigen kann, nothwendig und hinreichend, dass die 5 Tripel nicht derselben unicursalen Tripelreihe R_T^1 angehören, da offenbar solche 5 Tripel bereits ein associirtes System bilden, indem jedes Tripelfeld, welchem 4 Tripel von R_T^1 angehören, auch alle weiteren Tripel von R_T^1 (cf. T. V. § 2. 1), p. 306) enthält, also die Tripelfelder, welche solche Tripel enthalten, kein Netz, sondern eine *dreifache*, lineare Mannigfaltigkeit, *ein Gebüsche* bilden. Gehören 4 der 5 Tripel derselben R_T^1 an, so werden alle F_T, welche solche 5 Tripel enthalten, die ganze R_T^1 enthalten, und mithin wird jedes Tripel von R_T^1 die 5 Tripel zu einem associirten System ergänzen. In diesem Falle wird also das zu solchen 5 Tripeln gehörige 6[te] Tripel unbestimmt. Sind aber die 5 Tripel so beschaffen, dass keine 4 unter ihnen derselben R_T^1 angehören, so ist, wie die obige Ableitung zeigt, das associirte 6[te] Tripel *eindeutig* bestimmt, und wird dasselbe dann ebenfalls niemals mit irgend 3 der ursprünglichen 5 Tripel derselben R_T^1 angehören. Wir dürfen daher von 6 associirten Tripeln voraussetzen,

*) cf. Rosanes, l. c.

dass keine 4 derselben R_T^1 angehören, wofern wir keine speciellen Lagen im Auge haben. Wir gelangen somit in dem associirten System der 6 gemeinsamen Tripel dreier trilinearer Beziehungen zu einer höchst bemerkenswerthen Art geometrischer Abhängigkeit, welche bisher noch nicht näher studirt zu sein scheint, obwohl sie, wie wir bald erkennen werden, den wichtigsten der bekannten associirten Systemen zu Grunde liegt. —

2) Eigenschaften von 6 associirten Tripeln. Sind $\alpha_i\beta_i\gamma_i$ $(i = 1, 2, .., 6)$ 6 associirte Tripel, und ist R_T^2 eine bicursale Tripelreihe, welche 5 der 6 associirten Tripel $\alpha_1\beta_1\gamma_1, \ldots, \alpha_5\beta_5\gamma_5$ enthält, so wird jedes Tripel feld, welches R_T^2 enthält $\alpha_1\beta_1\gamma_1, \ldots, \alpha_5\beta_5\gamma_5$, also auch $\alpha_6\beta_6\gamma_6$ enthalten; $\alpha_6\beta_6\gamma_6$ ist also gemeinsames Tripel aller die R_T^2 enthaltenden Tripelfelder, also auch Tripel von R_T^2 selbst, somit gilt: *Jede bicursale Tripelreihe, welche 5 Tripel eines associirten Systems enthält, enthält auch das sechste.* —

Seien $\alpha_1\beta_1\gamma_1, \alpha_2\beta_2\gamma_2, \ldots, \alpha_5\beta_5\gamma_5$ 5 beliebige Tripel und $\xi\eta\zeta$ ein Tripel der durch die 3 Tripel $\alpha_1\beta_1\gamma_1, \alpha_2\beta_2\gamma_2, \alpha_3\beta_3\gamma_3$ eindeutig bestimmten unicursalen Tripelreihe, die wir durch [123] bezeichnen; ist dann F_T eines der ∞^1 Tripelfelder, welches die 6 Tripel $\alpha_1\beta_1\gamma_1, \ldots, \alpha_5\beta_5\gamma_5, \xi\eta\zeta$ enthält, so wird [123] diesem Tripelfelde angehören, weil F_T und [123] 4 Tripel gemein haben (cf. T. V. § 2. 1); es sei [123] eine in F_T enthaltene unicursale Tripelreihe der (12)-Art (cf. T. V. § 2. 2), p. 388; die Annahme, dass [123] von der (21)-Art ist, führt zu denselben Resultaten), dann giebt es *genau eine* in F_T enthaltene unicursale Tripelreihe $\mathfrak{R}_T^1$ von der (21)-Art, welcher die beiden Tripel $\alpha_4\beta_4\gamma_4, \alpha_5\beta_5\gamma_5$ angehören. Diese $\mathfrak{R}_T^1$ hat mit [123] 2 Tripel gemein (cf. T. V. § 2. 2), p. 390), so dass also stets eine unicursale Tripelreihe existirt, welche mit [123] ein Tripel gemein hat, und welcher die beiden Tripel $\alpha_4\beta_4\gamma_4, \alpha_5\beta_5\gamma_5$ angehören; eine zweite derartige Tripelreihe kann nicht existiren, denn diese müsste mit F_T 4 Tripel gemein haben (die beiden mit [123] gemeinsamen und $\alpha_4\beta_4\gamma_4, \alpha_5\beta_5\gamma_5$), also eine von $\mathfrak{R}_T^1$ verschiedene, in F_T enthaltene, unicursale Tripelreihe der (21)-Art sein, welcher $\alpha_4\beta_4\gamma_4, \alpha_5\beta_5\gamma_5$ angehören; da aber nur eine derartige unicursale Tripelreihe existirt (cf. T. V. § 2. 2), p. 389), so gilt: *Sind* $\alpha_1\beta_1\gamma_1, \ldots \alpha_5\beta_5\gamma_5$ 5 *beliebige Tripel der* 3 *einstufigen Grundgebilde* Ξ, H, Z, *so existirt eine und nur eine unicursale Tripelreihe, welche die Tripel* $\alpha_4\beta_4\gamma_4, \alpha_5\beta_5\gamma_5$ *enthält, und mit der durch die* 3 *Tripel* $\alpha_1\beta_1\gamma_1, \alpha_2\beta_2\gamma_2, \alpha_3\beta_3\gamma_3$ *bestimmten unicursalen Tripelreihe zwei Tripel gemein hat.*

Sind nun $\alpha_i\beta_i\gamma_i$ $(i = 1, 2, \ldots 6)$ 6 associirte Tripel, von denen wir (cf. Art. 1) voraussetzen dürfen, dass keine 4 derselben unicursalen Tripelreihe angehören, so betrachten wir die beiden unicursalen

Tripelreihen [123] und $\mathfrak{R}_T^1$, von denen die eine durch die 3 Tripel $\alpha_i\beta_i\gamma_i$ ($i = 1, 2, 3$) bestimmt ist, während $\mathfrak{R}_T^1$ diejenige, wie eben bewiesen, eindeutig vorhandene R_T^1 ist, welcher $\alpha_4\beta_4\gamma_4$, $\alpha_5\beta_5\gamma_5$ angehören, und welche mit [123] 2 Tripel gemein hat. Die Tripel dieser beiden unicursalen Tripelreihen bilden die gemeinsamen Tripel eines F_T-Büschels, sie stellen uns daher eine reducible R_T^2 dar (cf. § 1. Art. 6), welche 5 der 6 associirten Tripel enthält, also, wie oben bewiesen, auch das sechste $\alpha_6\beta_6\gamma_6$; da nun $\alpha_6\beta_6\gamma_6$ nicht der unicursalen Tripelreihe [123] angehören kann, da sonst 4 der 6 associirten Tripel derselben unicursalen Tripelreihe angehörten, so muss $\alpha_6\beta_6\gamma_6$ der $\mathfrak{R}_6^1$ angehören. Es hat somit [123] mit der durch die 3 Tripel $\alpha_4\beta_4\gamma_4$, $\alpha_5\beta_5\gamma_5$, $\alpha_6\beta_6\gamma_6$ bestimmten unicursalen Tripelreihe [456] 2 Tripel gemeinsam, und es gilt der für ein System von 6 associirten Tripeln fundamentale Satz: *Sind* $\alpha_i\beta_i\gamma_i$ ($i = 1, 2, \ldots 6$) *ein System von* 6 *associirten Tripeln, so hat die unicursale Tripelreihe, welche durch irgend* 3 *dieser* 6 *Tripel bestimmt ist, mit derjenigen, welche durch die* 3 *andern bestimmt ist, zwei Tripel gemeinsam.*

3) Construction des 6ten, zu 5 gegebenen Tripeln associirten Tripels. Aus dem soeben bewiesenen Satze ergiebt sich, dass das zu 5 gegebenen Tripeln $\alpha_1\beta_1\gamma_1, \ldots \alpha_5\beta_5\gamma_5$ associirte 6te Tripel derjenigen eindeutig bestimmten R_T^1 angehört, welche $\alpha_4\beta_4\gamma_4$, $\alpha_5\beta_5\gamma_5$ zu Tripeln hat, und welche mit der R_T^1 [123] 2 Tripel gemein hat. Um das 6te zu $\alpha_1\beta_1\gamma_1, \ldots, \alpha_5\beta_5\gamma_5$ associirte Tripel zu construiren, wird es sich vor allem darum handeln, diese eindeutig bestimmte R_T^1, resp. ein weiteres Tripel derselben aufzufinden. Seien nun $\alpha_1\beta_1\gamma_1, \ldots, \alpha_5\beta_5\gamma_5$ 5 beliebige Tripel, und sei das gesuchte 6te associirte Tripel mit $\alpha_6\beta_6\gamma_6$ bezeichnet; die R_T^1, welche durch die 3 Tripel $\alpha_i\beta_i\gamma_i$, $\alpha_k\beta_k\gamma_k$, $\alpha_l\beta_l\gamma_l$ bestimmt ist, nennen wir $[ikl]$, dann haben die beiden R_T^1: [123], [145] das Tripel $\alpha_1\beta_1\gamma_1$ gemeinsam und *nur* dieses eine Tripel, da wir $\alpha_i\beta_i\gamma_i$ ($i = 1, 2, \ldots, 5$) als 5 ganz beliebige Tripel annehmen.*) Es giebt ein eindeutig bestimmtes Tripelfeld mit der Gleichung $f(\xi\eta\zeta) = 0$, welches diese beiden R_T^1, [123], [145] enthält, nämlich dasjenige, welches durch die 5 Tripel $\alpha_i\beta_i\gamma_i$ ($i = 1, 2, \ldots, 5$)

*) Haben [123], [145] abgesehen von $\alpha_1\beta_1\gamma_1$ noch ein zweites Tripel $\alpha\beta\gamma$ gemein, so erfährt die folgende Construction für diese specielle Annahme keine wesentliche Modification, wohl aber vereinfacht sich dieselbe. In diesem Falle existirt nämlich ein *singuläres* Tripelfeld, welches $\alpha\beta\gamma$ zum singulären Tripel hat, dem die Tripel $\alpha_1\beta_1\gamma_1$, $\alpha_2\beta_2\gamma_2$, $\alpha_4\beta_4\gamma_4$ angehören, und das mithin (cf. T. V. § 2. 6) [123] und [145] enthält. Dieses singuläre Tripelfeld übernimmt vollkommen die Rolle des im Texte auftretenden allgemeinen Tripelfeldes $f(\xi\eta\zeta) = 0$, die Construction gestaltet sich ganz analog, doch lässt sich ihre Ausführung nicht unwesentlich verkürzen.

und 2 weitere Tripel, von denen das eine [123], das andere [145] angehört, bestimmt ist. Die beiden R_T^1 [123], [145] haben nur ein gemeinsames Tripel und gehören somit *demselben* Netze der in $f=0$ enthaltenen R_T^1 an (cf. T. V. § 2. 2), p. 390), d. h. die Projectivitäten:

$$(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots) \barwedge (\beta_1\beta_2\beta_3\ldots)$$

und

$$(\alpha_1\alpha_4\alpha_5\ldots) \barwedge (\beta_1\beta_4\beta_5\ldots)$$

enthalten dasselbe singuläre Paar $\xi_1\eta_2$ von $f(\xi\eta\zeta)=0$ (cf. T. V. § 2. 2), p. 388), also ist dieses singuläre Paar $\xi_1\eta_2$ das 2te, von $\alpha_1\beta_1$ verschiedene, gemeinsame Paar dieser beiden Projectivitäten; dasselbe ist linear construirbar (cf. die Anmerkung am Schlusse dieses Artikels). Ebenso ist das singuläre Paar $\eta_1\zeta_2$ das zweite, von $\beta_1\gamma_1$ verschiedene, gemeinsame Paar der beiden Projectivitäten:

$$(\beta_1\beta_2\beta_3\ldots) \barwedge (\gamma_1\gamma_2\gamma_3\ldots),$$
$$(\beta_1\beta_4\beta_5\ldots) \barwedge (\gamma_1\gamma_4\gamma_5\ldots),$$

und schliesslich ist $\zeta_1\xi_2$ das zweite, von $\gamma_1\alpha_1$ verschiedene, gemeinsame Paar der beiden Projectivitäten:

$$(\gamma_1\gamma_2\gamma_3\ldots) \barwedge (\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots),$$
$$(\gamma_1\gamma_4\gamma_5\ldots) \barwedge (\alpha_1\alpha_4\alpha_5\ldots),$$

und somit sind die singulären Elemente von $f(\xi\eta\zeta)=0$ *linear* construirt. Die R_T^1: [456], welche mit [123] (cf. Art. 2) 2 Tripel gemeinsam hat, ist in $f=0$ enthalten, da ihr 4 Tripel von $f=0$ angehören (nämlich $\alpha_4\beta_4\gamma_4$, $\alpha_5\beta_5\gamma_5$ und die beiden mit [123] gemeinsamen); es ist mithin [456] eine in $f=0$ enthaltene R_T^1, und zwar von der (21)-Art, weil [456] mit der in $f=0$ enthaltenen R_T^1: [123] von der (12)-Art 2 Tripel gemein hat (cf. T. V. § 2. 2), p. 390), also sind die 3 Projectivitäten, welche in Folge von [456] die Elemente von resp. Ξ und H, H und Z, Z und Ξ verknüpfen:

$$(\xi_2\alpha_4\alpha_5\alpha_6\ldots) \barwedge (\eta_1\beta_4\beta_5\beta_6\ldots),$$
$$(\eta_2\beta_4\beta_5\beta_6\ldots) \barwedge (\zeta_1\gamma_4\gamma_5\gamma_6\ldots),$$
$$(\zeta_2\gamma_4\gamma_5\gamma_6\ldots) \barwedge (\xi_1\alpha_4\alpha_5\alpha_6\ldots).$$

Völlig analoges gilt für die R_T^1: [236]; es sind daher die Projectivitäten, welche in Folge von [236] die Elemente von je 2 der 3 Grundgebilde Ξ, H, Z verknüpfen:

$$(\xi_2\alpha_2\alpha_3\alpha_6\ldots) \barwedge (\eta_1\beta_2\beta_3\beta_6\ldots),$$
$$(\eta_2\beta_2\beta_3\beta_6\ldots) \barwedge (\zeta_1\gamma_2\gamma_3\gamma_6\ldots),$$
$$(\zeta_2\gamma_2\gamma_3\gamma_6\ldots) \barwedge (\xi_1\alpha_2\alpha_3\alpha_6\ldots).$$

Mithin ist $\alpha_6\beta_6$ das 2te, von $\xi_2\eta_1$ verschiedene, gemeinsame Paar der Projectivitäten:

$$(\xi_2\alpha_4\alpha_5\alpha_6\ldots) \barwedge (\eta_1\beta_4\beta_5\beta_6\ldots),$$
$$(\xi_2\alpha_2\alpha_3\alpha_6\ldots) \barwedge (\eta_1\beta_2\beta_3\beta_6\ldots);$$

somit ist $\alpha_6\beta_6$ linear construirbar, und ebenso ist γ_6 linear construirbar aus der Doppelverhältnissgleichheit:

$$(\eta_2\beta_2\beta_3\beta_6) \barwedge (\xi_1\gamma_2\gamma_3\gamma_6).$$

Damit ist *die lineare Construction des* 6ten *associirten Tripels geleistet;* es bedarf dazu nur der viermaligen Ausführung der einfachen Constructionsaufgabe: Für 2 gegebene Projectivitäten, von denen man das eine gemeinsame Paar kennt, das andere zu finden. Gleichzeitig ist auch die Aufgabe gelöst: *Ist eine* R_T^1: [123] *gegeben, diejenige eindeutig bestimmte* R_T^1 *zu finden, welche die* 2 *Tripel* $\alpha_4\beta_4\gamma_4$, $\alpha_5\beta_5\gamma_5$ *enthält, und welche mit der* R_T^1: [123] 2 *Tripel gemein hat; die von uns aufgefundene* R_T^1: [456] *ist die gesuchte.*

Anmerkung: Von der im Texte verwendeten Aufgabe: *Für* 2 *gegebene Projectivitäten, von denen man das eine gemeinsame Paar kennt, das andere zu finden*, sei hier der Vollständigkeit halber eine möglichst sparsame lineare Construction, die nur der 12-maligen Anwendung des Lineals bedarf, angegeben. Wir wählen für die beiden Grundgebilde, deren Elemente durch die beiden gegebenen Projectivitäten in Beziehung gesetzt werden, 2 *gerade Punktreihen*, eine Annahme, auf welche alle übrigen Fälle sich unmittelbar zurückführen lassen. Seien daher die Punkte der beiden Geraden A, B in zweifacher Weise projectiv bezogen, und sei a, b ein gemeinsames Paar dieser beiden Beziehungen, während a_1b_1, a_2b_2 zwei Paare der ersten Projectivität, $a_1'b_1'$, $a_2'b_2'$ zwei Paare der zweiten Projectivität bedeuten, wodurch die beiden Projectivitäten gegeben sind. Es soll das zweite gemeinsame Paar $a'b'$ linear construirt werden. Seien P, Q 2 beliebige Punkte von $\overline{ab}$*), dann ist die projective Beziehung

$$P(a, a_1, a_2, \ldots) \barwedge Q(b, b_1, b_2, \ldots)$$

des zu $(a\,a_1\,a_2\ldots)$ perspectiven Strahlenbüschels $P(a\,a_1\,a_2\ldots)$ und des zu $(b\,b_1\,b_2\ldots)$ perspectiven Strahlenbüschels $Q(b\,b_1\,b_2\ldots)$ *eine perspective*; ebenso ist die projective Beziehung:

$$P(a\,a_1'\,a_2'\ldots) \barwedge Q(b\,b_1'\,b_2'\ldots)$$

des zu $(a\,a_1'\,a_2'\ldots)$ perspectiven Strahlenbüschels $P(a\,a_1'\,a_2'\ldots)$ und des zu $(b\,b_1'\,b_2')$ perspectiven Strahlenbüschel $Q(b\,b_1'\,b_2'\ldots)$ *eine perspective;*

---

*) Man kann auch P mit b, Q mit a zusammenfallen lassen, dann spart man das Ziehen der Linie $\overline{ab}$.

ist S der Schnittpunkt der beiden Perspectivitätsaxen dieser 2 Paare perspectiver Strahlenbüschel, so schneiden die Strahlen PS, QS resp. A, B in dem gesuchten zweiten gemeinsamen Paare $a'b'$ der beiden gegebenen Projectivitäten, wie sich unmittelbar ergiebt.

4) Specielle Systeme von 6 associirten Tripeln. a) Denken wir die 3 einstufigen Gebilde Ξ, H, Z auf demselben Träger (collocal), so bilden die Tripel einer cubischen Involution 2^{ter} Stufe ein specielles Tripelfeld; die einer cubischen Involution 1^{ter} Stufe eine specielle bicursale Tripelreihe, also gilt: *Sind die* 5 *Tripel* $\alpha_i\beta_i\gamma_i$ $(i=1,2,\ldots,5)$ *auf demselben rationalen Träger gelegen, und gehören sie einer cubischen Involution* 1^{ter} *oder* 2^{ter} *Stufe an, so gehört auch das associirte* 6^{te} *Tripel derselben cubischen Involution an.*

b) Verstehen wir unter $\alpha_i\beta_i\gamma_i$ $(1,2,\ldots,6)$ je 3 Strahlen der in derselben Ebene befindlichen Strahlenbüschel P_ξ, P_η, P_ζ und schneiden sich die 3 Strahlen $\alpha_i\beta_i\gamma_i$ $(i=1,2,\ldots,5)$ in einem Punkte $P_i (i=1,2,\ldots,5)$, dann gehören die 5 Tripel $\alpha_i\beta_i\gamma_i$ $(i=1,2,\ldots,5)$ der reducirt-trilinearen Beziehung jener 3 Strahlenbüschel an (cf. T. V. § 1. 5), welche gebildet wird aus der Gesammtheit von je 3 Strahlen, die sich in einem Punkte schneiden, und mithin wird auch das 6^{te} associirte Tripel aus 3 Strahlen $\alpha_6\beta_6\gamma_6$ durch einen Punkt bestehen. Also: *Sind in* 3 *Strahlenbüscheln* P_ξ, P_η, P_ζ 5 *Tripel von je* 3 *Strahlen* $\alpha_i\beta_i\gamma_i (i=1,2,\ldots,5)$ *durch einen Punkt* P_i *gegeben, so schneiden sich auch die* 3 *Strahlen* $\alpha_6\beta_6\gamma_6$ *des associirten* 6^{ten} *Tripels in einem Punkte* P_6. Betrachtet man eine beliebige Curve III. O. C_3 durch die 8 Punkte P_ξ, P_η, P_ζ; $P_1 \ldots P_5$, so bilden die Strahlentripel, welche P_ξ, P_η, P_ζ mit den Punkten von C_3 verbinden, eine R_T^2 (cf. § 1. 2), welche die 5 Tripel $\alpha_1\beta_1\gamma_1, \ldots, \alpha_5\beta_5\gamma_5$ also auch (cf. Art. 2) das associirte 6^{te} Tripel $\alpha_6\beta_6\gamma_6$ enthält, also liegt P_6 ebenfalls auf C_3 und wir erhalten so den bekannten Satz: *Alle* C_3 *durch* 8 *gegebene Punkte gehen auch durch denselben* 9^{ten} *Punkt.**) Es tritt also hier ein enger Zusammenhang zwischen den 9 associirten Punkten, welche einem Curvenbüschel III. O. gemein sind, und unseren 6 associirten Tripeln in die Erscheinung, den wir in folgenden Satz fassen können: *Sind die Strahlen dreier Strahlenbüschel* P_ξ, P_η, P_ζ *durch* 3 *trilineare Beziehungen verbunden, von denen die eine die reducirt-trilineare Beziehung ist, so schneiden sich die Strahlen* $\alpha_i\beta_i\gamma_i (i=1,2,\ldots,6)$ *der* 6 *Tripel, welche jenen* 3 *Beziehungen gemeinsam sind, in* 6 *Punkten* $P_i=(\alpha_i\beta_i\gamma_i)$ $(i=1,2,\ldots,6)$, *welche mit* P_ξ, P_η, P_ζ 9 *associirte Punkte, welche* 2 *Curven III. O. gemeinsam sind, bilden.* Und umgekehrt: *Sind* 9 *Schnittpunkte zweier* C_3 *gegeben, so bilden die* 6 *Strahlentripel, welche* 3 *von ihnen mit den* 6 *übrigen verbinden, ein associirtes System.* Damit ist auch eine lineare Construction des 9^{ten} Schnitt-

*) cf. Rosanes: Cr. Journ. Bd. 88, p. 273.

punktes zweier C_3 geliefert; denn sind die 8 Punkte $P_\xi, P_\eta, P_\zeta, P_1, P_2, \ldots, P_5$ bekannt, so ist der associirte 9te Punkt P_6 der Schnittpunkt der 3 Strahlen $P_\xi P_6$, $P_\eta P_6$, $P_\zeta P_6$, welche die 5 Tripel $(P_\xi P_i)$, $(P_\eta P_i)$, $(P_\zeta P_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, 5)$ zu einem associirten System ergänzen; nach dem Vorigen können wir dieses 6te Tripel, also auch P_6 linear construiren. Die wirkliche Ausführung unter Benutzung aller Vereinfachungen, welche dieser Specialfall zulässt, führt zu einer verhältnissmässig sehr sparsamen Construction. —

c) Sind in 3 in derselben Ebene E befindlichen Strahlenbüscheln P_ξ, P_η, P_ζ 5 Strahlentripel $\alpha_i\beta_i\gamma_i$ $(i = 1, 2, \ldots, 5)$ gegeben, bei denen je 3 Strahlen eines Tripels sich in einem Punkte $P_i = (\alpha_i\beta_i\gamma_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, 5)$ treffen, dann treffen sich auch nach dem Vorigen die 3 Strahlen $\alpha_6, \beta_6, \gamma_6$ des associirten 6ten Tripels in einem Punkte P_6. Wir beziehen nun die Punkte $x'(x_1', x_2', x_3')$ einer zweiten Ebene E' umkehrbar-eindeutig auf die Punkte $x(x_1, x_2, x_3)$ der Ebene E mittels einer quadratischen Verwandtschaft, welche in E die Punkte P_ξ, P_η, P_ζ zu Fundamentalpunkten hat, und deren Fundamentalpunkte in E' durch $P_\xi', P_\eta', P_\zeta'$ bezeichnet seien. Diese quadratische Verwandtschaft denken wir uns durch 2 ternäre bilineare Gleichungen:

$$F(xx') = 0, \quad F'(xx') = 0$$

gegeben, so dass die entsprechenden Punktepaare der quadratischen Verwandtschaft gemeinsame Nullpaare zweier reciproken Beziehungen $F = 0$, $F' = 0$ werden. Sind dann P_i' $(i = 1, 2, \ldots, 6)$ in E' die entsprechenden Punkte von P_i in E, so ist P_6' der 9te associirte Punkt zu $P_\xi', P_\eta', P_\zeta', P_1', \ldots, P_5'$; denn jeder Curve III. O. C_3' durch $P_\xi', P_\eta', P_\zeta', P_1' \ldots P_5'$ entspricht in E in Bezug auf die quadratische Verwandtschaft $(F = 0, F' = 0)$ eine C_3 durch $P_\xi, P_\eta, P_\zeta, P_1 \ldots P_5$, die (nach b) auch P_6 enthält, so dass P_6' auch der C_3' angehören muss. Ist nun $F''(xx') = 0$ die Gleichung einer *beliebigen* reciproken Beziehung zwischen den Elementen von E und E', welche

$$P_i, P_i' \; (i = 1, 2, \ldots, 5)$$

zu Nullpaaren hat, so erfüllen die gemeinsamen Punktepaare der 3 Reciprocitäten $F = 0$, $F' = 0$, $F'' = 0$ *) 2 Curven III. O. C_3, C_3', welche auch P_ξ, P_η, P_ζ resp. $P_\xi', P_\eta', P_\zeta'$ enthalten; jeder Punkt P von C_3 und der ihm in der quadratischen Verwandtschaft $(F=0, F'=0)$ entsprechende Punkt P' von C_3' bilden ein gemeinsames Paar von $F = 0$, $F' = 0$, $F'' = 0$. Da C_3 die Punkte $P_\xi, P_\eta, P_\zeta, P_1 \ldots P_5$ enthält, so enthält sie nach dem Vorigen auch P_6, mithin bildet P_6 mit dem ihm in der quadratischen Verwandtschaft $(F = 0, F' = 0)$ entsprechenden Punkte P_6' ebenfalls ein Nullpaar von $F'' = 0$ und *mithin besitzt jede reciproke Beziehung* $F'' = 0$, *welche* $P_i P_i'$ $(i = 1, 2, \ldots, 5)$

*) cf. Rosanes: Cr. Journ. Bd. 88, p. 248.

zu Nullpaaren hat, auch P_6, P_6' *zum Nullpaar, d. h.* P_6, P_6' *ist das* 6te *abhängige Paar zu* $P_1, P_1', \ldots, P_5, P_5'$*).

Wir bezeichnen 6 Punktepaare, welche 4 Reciprocitäten gemeinsam sind, und bei welchen das 6te durch die 5 ersten eindeutig bestimmt ist, als 6 associirte Punktepaare, und können den Satz aussprechen: *Sind in einer Ebene E:* $\overline{P_\xi P_i}$, $\overline{P_\eta P_i}$, $\overline{P_\zeta P_i}$ $(i=1,2,\ldots,6)$ *6 associirte Strahlentripel, und sind* P_i' $(i=1,2,\ldots,6)$ *die Punkte einer* 2ten *Ebene E', welche den Punkten* P_i *in einer quadratischen Verwandtschaft der Ebenen E, E', welche* P_ξ, P_η, P_ζ *zu Fundamentalpunkten hat, entsprechen, so bilden* P_i, P_i' $(i=1,2,\ldots,6)$ *6 associirte Punktepaare.* Aber es gilt auch umgekehrt: *Bilden in 2 Ebenen E, E' die 6 Punktepaare* P_i, P_i' $(i=1,2,\ldots,6)$ *ein associirtes System, und sind* P_ξ, P_η, P_ζ; P_ξ', P_η', P_ζ' *die Fundamentalpunkte irgend einer quadratischen Verwandtschaft, welche* P_i, P_i' *zu entsprechenden Paaren hat, so bilden die 6 Tripel* $\overline{P_\xi P_i}$, $\overline{P_\eta P_i}$, $\overline{P_\zeta P_i}$ $(i=1,2,\ldots,6)$ (*und ebenso* $\overline{P_\xi' P_i'}$, $\overline{P_\eta' P_i'}$, $\overline{P_\zeta' P_i'}$) *gleichfalls ein associirtes System.* (Der Beweis ist dem vorigen völlig analog.) Da man nun leicht 2 Dreiecke P_ξ, P_η, P_ζ; P_ξ', P_η', P_ζ' construiren kann, welche Fundamentaldreiecke einer quadratischen Verwandtschaft sind, für welche $P_1, P_1', \ldots, P_5, P_5'$ entsprechende Punkte bilden, so lässt sich die Construction des associirten 6ten Paares auf die des associirten 6ten Tripels zurückführen, und die enge Beziehung dieser beiden Arten associirter Systeme ist gleichzeitig aufgedeckt.

d) Es seien P_ξ, P_η, P_ζ 3 Punkte im Raume,

$$g_\xi = (P_\eta P_\zeta), \quad g_\eta = (P_\zeta P_\xi), \quad g_\zeta = (P_\xi P_\eta)$$

die Seiten des von ihnen gebildeten Dreiecks; sind $\alpha_i \beta_i \gamma_i$ $(i=1,2,3,4)$ je 4 Ebenen resp. durch g_ξ, g_η, g_ζ und sind $\alpha = \beta = \gamma$ die 3 in der Ebene P_ξ, P_η, P_ζ vereinigten Ebenen der 3 Büschel g_ξ, g_η, g_ζ, so fragen wir nach dem 6ten zu $\alpha\beta\gamma$, $\alpha_1\beta_1\gamma_1, \ldots, \alpha_4\beta_4\gamma_4$ associirten Ebenentripel $\alpha_5\beta_5\gamma_5$. Wir bezeichnen den Schnittpunkt von α_i, β_i, γ_i durch P_i $(i=1,2,\ldots,5)$, dann erzeugen alle trilinearen Beziehungen, welche $\alpha\beta\gamma$, $\alpha_1\beta_1\gamma_1, \ldots, \alpha_4\beta_4\gamma_4$ zu Tripeln haben, Flächen II. O., welche die 7 Punkte P_ξ, P_η, P_ζ; $P_1, \ldots, P_4$ enthalten (cf. T. V. § 4. 2, p. 411); allen diesen trilinearen Beziehungen gehört auch das 6te associirte Tripel $\alpha_5\beta_5\gamma_5$ an, so dass $P_5 = (\alpha_5\beta_5\gamma_5)$ allen diesen F_2 angehört, und wir zu dem bekannten Satz gelangen: *Alle* F_2, *welche 7 Punkte* $P_\xi P_\eta P_\zeta P_1 \ldots P_4$ *gemein haben, enthalten noch einen eindeutig bestimmten* 8ten *Punkt* P_5. Acht solche Punkte, welche dreien F_2 gemeinsam sind, nennen wir 8 *associirte Punkte***) und wir erkennen:

*) cf. Rosanes: Cr. Journ. Bd. 88. p. 249.

**) cf. Reye: Sopra le curve gobbe di quart'ordine e prima specie etc. etc. Annali di matem. Serie II. Tom. II, p. 129.

Sind P_ξ, P_η, P_ζ, $P_1 \ldots P_4$ 7 *beliebige Punkte des Raumes, und setzen wir* $(P_\eta P_\zeta P_i) = \alpha_i$, $(P_\zeta P_\xi P_i) = \beta_i$, $(P_\xi P_\eta P_i) = \gamma_i$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ *und* $(P_\xi P_\eta P_\zeta) = \alpha = \beta = \gamma$, *so ist das zu den* 5 *Tripeln*

$$\alpha\beta\gamma, \ \alpha_i\beta_i\gamma_i \ (i = 1, 2, 3, 4)$$

associirte 6[te] *Tripel* $\alpha_5\beta_5\gamma_5$ *dasjenige, dessen Ebenen sich in dem zu* $P_\xi P_\eta P_\zeta$ $P_1 P_2 P_3 P_4$ *associirten* 8[ten] *Punkte* P_5 *schneiden.* Aber es gilt auch, wie man ebenso beweist, umgekehrt: *Sind* P_ξ, P_η, P_ζ $P_1 \ldots P_5$ 8 *associirte Punkte, so bilden die* 5 *Tripel*

$$(P_\eta P_\zeta P_i) = \alpha_i, \ (P_\zeta P_\xi P_i) = \beta_i, \ (P_\xi P_\eta P_i) = \gamma_i \ (i = 1, 2, 3, 4, 5)$$

und das in $(P_\xi P_\eta P_\zeta) = \alpha, \beta, \gamma$ *vereinigte Tripel ein associirtes System.* Hieraus ergiebt sich mittels der Construction des 6[ten] associirten Tripels unmittelbar eine lineare Construction des 8[ten] zu $P_\xi P_\eta P_\zeta$ $P_1 \ldots P_4$ associirten Punktes P_5, denn es ist P_5 der Schnittpunkt des linear construirbaren Ebenentripels $\alpha_5\beta_5\gamma_5$, welches die 5 Ebenentripel

$$\alpha = \beta = \gamma = (P_\xi P_\eta P_\zeta),$$
$$\alpha_i = (P_\eta P_\zeta P_i), \ \beta_i = (P_\zeta P_\xi P_i), \ \gamma_i = (P_\xi P_\eta P_i) \ (i = 1, 2, 3, 4)$$

zu einem associirten System ergänzt; man erkennt also, dass sich die zwischen 8 associirten Punkten bestehende Abhängigkeit auf die zwischen 6 associirten Tripeln zurückführen lässt.

e) Sind 3 Ebenenbüschel mit den 3 windschiefen Axen g_ξ, g_η, g_ζ gegeben und sind P_i $(i = 1, 2, \ldots 5)$ 5 beliebige Punkte des Raumes, so bilden

$$(g_\xi P_i) = \alpha_i, \ (g_\eta P_i) = \beta_i, \ (g_\zeta P_i) = \gamma_i \ (i = 1, 2, \ldots, 5)$$

5 Ebenentripel dieser 3 Büschel, und es existirt ein 6[tes] Ebenentripel $\alpha_6\beta_6\gamma_6$, dessen Ebenen sich in P_6 treffen, welches $\alpha_1\beta_1\gamma_1, \ldots, \alpha_5\beta_5\gamma_5$ zu einem associirten System ergänzt, so dass jede trilineare Beziehung der 3 Ebenenbüschel, welcher die 5 Tripel $\alpha_1\beta_1\gamma_1, \ldots, \alpha_5\beta_5\gamma_5$ angehören, auch das 6[te] Tripel $\alpha_6\beta_6\gamma_6$ enthält. Ist F_3 eine beliebige Fläche III. O. durch die 3 Geraden g_ξ, g_η, g_ζ, und die 5 Punkte $P_1, P_2, \ldots, P_5$, so werden ihre Punkte aus g_ξ, g_η, g_ζ durch Ebenentripel projicirt, welche einer trilinearen Beziehung der eben gekennzeichneten Art angehören, so dass F_3 auch den 6[ten] Punkt P_6 enthält. Mithin gilt: *Sind* g_ξ, g_η, g_ζ 3 *beliebige Gerade und* $P_1, P_2, \ldots, P_5$ 5 *beliebige Punkte des Raumes, so enthält jede Fläche III. O., welcher* g_ξ, g_η, g_ζ, $P_1, P_2, \ldots, P_5$ *angehören, einen eindeutig bestimmten* 6[ten] *Punkt* P_6.

Ein System solcher 3 Geraden g_ξ, g_η, g_ζ und 6 Punkte $P_1 P_2, \ldots, P_6$ nennen wir *ein associirtes System von* 3 *Geraden und* 6 *Punkten.* Aus dieser Definition folgen unmittelbar folgende Sätze: *Bilden* g_ξ, g_η, g_ζ; $P_1, P_2, \ldots, P_6$ *ein associirtes System, und liegen* $P_1, P_2, \ldots, P_5$ *in einer Ebene* E, *so liegt auch* P_6 *in* E, *und es bilden die* 3 *Punkte, in welchen* g_ξ, g_η, g_ζ *die Ebene* E *treffen, mit* $P_1, P_2, \ldots, P_6$ *ein associirtes System von* 9 *Schnittpunkten zweier Curven III. O.* Denn jede

F_3, welcher $g_\xi, g_\eta, g_\zeta; P_1, P_2, \ldots, P_5$ angehören, schneidet E in einer C_3, welche die 8 Punkte $P_1, P_2, \ldots, P_5$; $(g_\xi E)$, $(g_\eta E)$, $(g_\zeta E)$ enthält, also enthält diese C_3 auch den 9ten zu diesen 8 Punkten associirten Punkt P_6, dieser ist somit allen F_3 durch $g_\xi, g_\eta, g_\zeta; P_1, \ldots, P_5$ gemeinsam, und bildet demnach mit $g_\xi, g_\eta, g_\zeta; P_1, \ldots, P_5$ ein associirtes System. —

Bilden $g_\xi, g_\eta, g_\zeta; P_1, P_2, \ldots, P_6$ ein associirtes System und liegen 4 *der* 6 *Punkte mit* 2 *der* 3 *Geraden auf demselben Hyperboloid, so liegen die beiden letzten Punkte mit der letzten Geraden in derselben Ebene.* Es seien P_1, P_2, P_3, P_4 mit g_ξ, g_η auf demselben Hyperboloid H gelegen, dann bildet H mit der Ebene $(g_\xi P_5) = \zeta$ eine F_3 durch $g_\xi, g_\eta, g_\zeta; P_1, \ldots, P_5$; sind F_3', F_3'' zwei weitere Flächen III. O. durch $g_\xi, g_\eta, g_\zeta; P_1, P_2, \ldots, P_5$, so schneiden dieselben ζ, abgesehen von g_ζ, in 2 Kegelschnitten, welche durch P_5 und die beiden Punkte gehen, in welchen ζ von g_ξ, g_η getroffen wird; diese beiden Kegeschnitte haben noch einen 4ten Punkt auf ζ gemein, welcher, da er den 3 Flächen III. O. (H, ζ), F_3', F_3'' gemeinsam ist, der 6te associirte Punkt P_6 sein muss; also liegt P_6 auf ζ, wie behauptet wurde. — Daraus folgt: *Bilden $g_\xi, g_\eta, g_\zeta; P_1, P_2, \ldots, P_6$ ein associirtes System und liegen P_1, P_2 mit g_ξ; P_3, P_4 mit g_η in derselben Ebene, so liegt auch P_5, P_6 mit g_ζ in derselben Ebene.* Ist R_6' eine Raumcurve 6ter Ordnung vom Geschlechte 1, welche g_ξ, g_η, g_ζ zu Quadrisecanten besitzt, und der die 5 Punkte $P_1, P_2, \ldots, P_5$ angehören, so werden ihre Punkte aus g_ξ, g_η, g_ζ durch Ebenentripel projicirt, welche eine bicursale Tripelreihe bilden (cf. § 1, Art. 3), die die 5 Tripel $(g_\xi P_i)$, $(g_\eta P_i)$, $(g_\zeta P_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, 5)$, also (nach Art. 2) auch das associirte 6te Tripel $(g_\xi P_6)$, $(g_\eta P_6)$, $(g_\zeta P_6)$ enthält, und genau das gleiche gilt von einer R_5^1, welche g_ξ, g_η, g_ζ zu Trisecanten, und ebenso von einer R_4^1, welche g_ξ, g_η, g_ζ zu Bisecanten hat, mithin ergiebt sich: *Bilden $g_\xi, g_\eta, g_\zeta; P_1, P_2, \ldots, P_6$ ein associirtes System, so enthält jede R_6^1, R_5^1, R_4^1, welche g_ξ, g_η, g_ζ resp. zu Quadri-, Tri-, Bi-Secanten hat, und der die* 5 *Punkte $P_1, P_2, \ldots, P_5$ angehören, auch den* 6ten *Punkt P_6.*

Projiciren wir die 6 Punkte $P_1, P_2, \ldots, P_6$ aus den drei Geraden g_ξ, g_η, g_ζ durch die 6 Ebenentripel $(g_\xi P_i)$, $(g_\eta P_i)$, $(g_\zeta P_i)$ $(i=1,2,\ldots,6)$, so bilden diese ein System von 6 associirten Tripeln, mithin hatte die durch die 3 Tripel $(g_\xi P_k)$, $(g_\eta P_k)$, $(g_\zeta P_k)$ $(k = 1, 2, 3)$ bestimmte R_T^1, welche wir durch [123] bezeichnen, mit der R_T^1 [456] 2 Tripel gemeinsam (cf. Art. 2); die Punkte, in welchen sich die 3 Punkte eines Tripels von [123] treffen, bilden eine Raumcurve III. O., welche P_1, P_2, P_3 enthält und g_ξ, g_η, g_ζ zu Secanten hat, und ebenso bilden die Schnittpunkte der 3 Ebenen eines Tripels von [456] eine 2te Raumcurve III. O., welche P_4, P_5, P_6 enthält, und g_ξ, g_η, g_ζ zu Secanten

hat, also gilt: *Bilden g_ξ, g_η, g_ζ; $P_1, P_2, \ldots, P_6$ ein associirtes System, so haben die beiden Raumcurven III. O., welche g_ξ, g_η, g_ζ zu Secanten haben und P_1, P_2, P_3 resp. P_4, P_5, P_6 enthalten, 2 Punkte gemeinsam.* Und hieraus folgt unmittelbar: *Liegen von den 6 Punkten eines associirten Systems (g_ξ, g_η, g_ζ; $P_1, \ldots, P_6$) drei in einer Geraden g, so liegen die drei übrigen in einer Raumcurve III. O., welche die 4 Geraden $g_\xi, g_\eta, g_\zeta, g$ zu Secanten hat.* —

f) Seien resp. ξ, η, ζ die Elemente der 3 einstufigen Grundgebilde Ξ, H, Z und betrachten wir 3 reducible Tripelfelder F_T', F_T'', F_T''' von solcher Art, dass die trilinearen Formen, welche die linken Seiten ihrer Gleichungen bilden, in das Product dreier linearer Formen ausarten; seien daher die Gleichungen von resp. F_T', F_T'', F_T''':

$$f'\,(\xi\eta\zeta) = (\alpha'\,\xi)\,(\beta'\,\eta)\,(\gamma'\,\zeta) = 0,$$
$$f''\,(\xi\eta\zeta) = (\alpha''\,\xi)\,(\beta''\,\eta)\,(\gamma''\,\zeta) = 0,$$
$$f'''(\xi\eta\zeta) = (\alpha'''\xi)\,(\beta'''\eta)\,(\gamma'''\zeta) = 0,$$

wobei $(\alpha'\xi) = (\alpha_1'\xi_2 - \alpha_2'\xi_1)$ bedeutet, und $\xi_1 \xi_2$ die Coordinaten von ξ, α_1', α_2' die eines Elementes α von Ξ u. s. w. sind; dann werden die Tripel von $f' = 0$ gebildet von solchen Tripeln, für welche *entweder* das Element in Ξ mit dem Elemente $\alpha'(\alpha_1', \alpha_2')$, *oder* das Element in H mit β', *oder* das Element in Z mit γ' zusammenfällt; die Tripel von $f' = 0$ sind also enthalten in einer der drei Formen $\alpha'\eta\zeta$, $\xi\beta'\zeta$, $\xi\eta\gamma'$, wo ξ, η, ζ beliebige Elemente von resp. Ξ, H, Z bedeuten. Genau analoges gilt für die Tripel von $f'' = 0$, $f''' = 0$. Ein *gemeinsames* Tripel von $f' = 0$, $f'' = 0$, $f''' = 0$ muss demnach bestehen aus 3 Elementen von solcher Beschaffenheit, dass dieselben in dem Schema:

$$\begin{matrix} \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \\ \alpha''' & \beta''' & \gamma''' \end{matrix}$$

nie in derselben Horizontal- oder Verticalreihe enthalten sind; solche 3 Elemente entsprechen einem Gliede der aus dem System der 9 Grössen herstellbaren Determinante; es sind also die 6 Tripel, welche $f' = 0$, $f'' = 0$, $f''' = 0$ gemeinsam sind:

$$\alpha'\beta''\gamma''',\ \alpha'\beta'''\gamma'',\ \alpha''\beta'''\gamma',\ \alpha''\beta'\gamma''',\ \alpha'''\beta'\gamma'',\ \alpha'''\beta''\gamma';$$

dieselben bilden als die gemeinsamen Tripel dreier Tripelfelder ein associirtes System, also gilt: *Sind Ξ, H, Z 3 einstufige Grundgebilde und α' α'', α''' 3 beliebige Elemente von Ξ, β', β'', β''' 3 ebensolche von H, γ', γ'', γ''' 3 ebensolche von Z, dann bilden die 6 Tripel, welche in dem Schema:*

$$\begin{matrix} \alpha' & \alpha'' & \alpha''' \\ \beta' & \beta'' & \beta''' \\ \gamma' & \gamma'' & \gamma''' \end{matrix}$$

den 6 Determinantengliedern entsprechen, d. h. die aus je 3 Elementen aus verschiedenen Horizontal- und Verticalreihen bestehen, ein associirtes System. Jedes Tripelfeld, welches 5 dieser Tripel enthält, enthält auch das 6te. Sind z. B. Ξ, H, Z gerade Punktreihen, und liegen bei 5 der 6 in Rede stehenden Tripeln die 3 Punkte eines Tripels in gerader Linie — gehören also diese 5 Tripel der reducirt-trilinearen Beziehung der 3 Punktreihen Ξ, H, Z an (cf. T. V. § 1. 5) — so liegen auch die 3 Punkte des 6ten Tripels in gerader Linie, mithin ergiebt sich: *Sind auf 3 in derselben Ebene gelegenen Geraden Ξ, H, Z je 3 Punkte α', α'', α'''; β', β'', β'''; γ', γ'', γ''' so gegeben, dass die 3 Punkte eines jeden der 5 Tripel:*

$$\alpha'\beta''\gamma''',\ \alpha'\beta'''\gamma'',\ \alpha''\beta'''\gamma',\ \alpha''\beta'\gamma''',\ \alpha'''\beta'\gamma'',$$

in gerader Linie liegen, dann liegen auch die 3 Punkte $\alpha'''\beta''\gamma'$ in gerader Linie. Und ebenso ergibt sich: *Sind Ξ, H, Z 3 beliebige Punkte und durch jeden derselben — in der Ebene des von ihnen gebildeten Dreiecks — 3 Strahlen resp. α', α'', α'''; β', β'', β'''; γ' γ'', γ''' so gegeben, dass die 3 Strahlen jedes der 5 Tripel:*

$$\alpha'\beta''\gamma''',\ \alpha'\beta'''\gamma'',\ \alpha''\beta'\gamma''',\ \alpha''\beta'''\gamma',\ \alpha'''\beta'\gamma''$$

sich in einem Punkte schneiden, so gehen auch die 3 Strahlen $\alpha'''\beta''\gamma'$ durch einen Punkt. Die beiden Configurationen, welche den beiden letzten dualen Sätzen entsprechen, sind identisch; sie bestehen aus 9 Punkten und 9 Geraden, derart dass durch jeden der 9 Punkte 3 Gerade hindurchgehen, und jede der 9 Geraden 3 Punkte enthält, es ist dies *die wohlbekannte Configuration 9_3, welche man auch erhält, wenn man die Pascal'sche Figur für einen in ein Geradenpaar ausgearteten Kegelschnitt bildet.**) —

Somit ergiebt sich, dass alle diese Abhängigkeiten geometrischer Gebilde — die 9 associirten Punkte zweier C_3, die 8 associirten Punkte dreier F_2, die 6 associirten Paare von 4 Reciprocitäten, etc. — durch die in den von uns untersuchten 6 associirten Tripeln herrschende Abhängigkeit bestimmt sind, dass sich also alle diese Abhängigkeiten *auf jene eine und damit auch auf einander zurückführen lassen*, wodurch einerseits ein tieferer Einblick in die Natur und den Zusammenhang jener Gebilde erlangt ist, und wodurch andererseits die Construction des letzten eindeutig bestimmten associirten Elementes für *alle* jene Abhängigkeiten *auf einen einzigen Constructionsmechanismus,* nämlich die Auffindung des 6ten associirten Tripels, zurückgeführt ist, den wir in linearer Form und in einfachster Weise ausführen lehrten. —

*) cf. Thomae: Die Kegelschnitte in project. Behandlung. Halle 1884, p. 30.

§ 3.

Gruppen associirter Punkte auf den Raumcurven VI[ter] Ordnung vom Geschlechte 1.

1) Wir wollen fortan unter den 3 Grundgebilden Ξ, H, Z 3 Ebenenbüschel mit den 3 windschiefen Axen g_ξ, g_η, g_ζ verstehen; das für diese zu beweisende ist unmittelbar auf 3 andere einstufige Grundgebilde übertragbar; wir haben aber einerseits den Vortheil einer kürzeren Ausdrucksweise, andererseits werden wir gleichzeitig tiefer in die Eigenschaften der Raumcurve 6[ter] Ordnung vom Geschlechte 1 (R_6^1) eindringen, da die R_6^1 das Erzeugniss der gemeinsamen Tripel zweier trilinearer Beziehungen dieser 3 Büschel g_ξ, g^η, g_ζ bildet. Wir denken uns die 3 Ebenenbüschel durch die beiden trilinearen Gleichungen:

$$f(\xi, \eta, \zeta) = 0, \quad f'(\xi, \eta, \zeta) = 0$$

in zweifacher Weise trilinear bezogen; die gemeinsamen Tripel von $f = 0$, $f' = 0$ bilden eine bicursale Tripelreihe R_T^2, die Schnittpunkte der 3 Ebenen aller Tripel von R_T^2 erfüllen eine allgemeine R_6^1 (cf. § 1. 3), welche g_ξ, g_η, g_ζ zu Quadrisecanten hat. In dem Büschel trilinearer Beziehungen $f + kf' = 0$ existiren 4 singulär-trilineare Beziehungen $f_i(\xi^*, \eta, \zeta) = 0$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ (cf. § 1. 8), deren singuläre Tripel — die Haupttripel für R_T^2 — durch ϱ_i, σ_i, τ_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ bezeichnet seien; ist $(\varrho_i, \sigma_i, \tau_i) = S_i$ der Schnittpunkt der 3 Ebenen ϱ_i, σ_i, τ_i, so nennen wir diese 4 Punkte S_1, S_2, S_3, S_4 die 4 *Hauptpunkte* für die R_6^1; sie gehören im Allgemeinen der R_6^1 nicht an. Da die singulär-trilineare Beziehung $f_i(\xi, \eta, \zeta) = 0$ eine Fläche III. O. erzeugt, welche den Punkt S_i zum Doppelpunkt hat (cf. T. V. § 4. 2), so sind die 4 Hauptpunkte S_1, S_2, S_3, S_4 resp. die Doppelpunkte von 4 die R_6^1 enthaltenden Flächen III. O. $F_3^{(1)}$, $F_3^{(2)}$, $F_3^{(3)}$, $F_3^{(4)}$. Es existiren bekanntlich*) 20 die R_6^1 enthaltende Flächen III. O., welche einen Doppelpunkt besitzen; von diesen 20 Doppelpunkten sind 12 die 3 . 4 Schnittpunkte von g_ξ, g_η, g_ζ mit R_6^1, 4 weitere liegen auf dem durch die 3 Erzeugenden g_ξ, g_η, g_ζ bestimmten Hyperboloid (g_ξ, g_η, g_ζ), und die vier letzten sind unsere Hauptpunkte S_i $(i = 1, 2, 3, 4)$, welche (cf. T. V. § 4. 2) i. A. nicht auf diesem Hyperboloid liegen werden. Die $F_3^{(i)}$ mit dem Doppelpunkt S_i enthält 6 Gerade durch diesen Doppelpunkt, jede derselben schneidet die von R_6^1 und g_ξ, g_η, g_ζ gebildete reducible Curve 9[ter] O. in 3 Punkten (und dasselbe gilt von jeder Geraden auf einer die R_6^1 enthaltenden F_3), denn jede andere

*) cf. Em. Weyr: Die Raumcurve 6[ter] O. vom Geschlecht 1. II[te] Mittheilung, Sitzungsber. der k. Akademie zu Wien 1891. Art. 1 ff.

die R_6^1 enthaltende F_3 wird von einer solchen Geraden in 3 Punkten getroffen, die nothwendiger Weise auf dem Durchschnitt von $F_3^{(i)}$ und F_3, d. i. auf R_6^1 oder g_ξ, g_η, g_ζ liegen. Nun sind aber 3 von den 6 Geraden auf $F_3^{(i)}$ durch S_i zu g_ξ, g_η, g_ξ windschief (cf. T. V. § 4. 2, p. 407), diese sind also Trisecanten von R_6^1, sie seien mit g_{23}^i, g_{31}^i, g_{12}^i bezeichnet; es gilt also: *Durch jeden der 4 Hauptpunkte S_i ($i = 1, 2, 3, 4$) gehen 3 Trisecanten der R_6^1, und es sind dies die einzigen Punkte des Raumes, durch welche 3 Trisecanten von R_6^1 gehen.**) Oder: *Die 4 Hauptpunkte sind die einzigen Punkte, aus denen R_6^1 in eine ebene Curve 6ter O. mit 3 dreifachen Punkten projicirt wird.* —

2) Betrachten wir nun in der R_T^2, welche gebildet wird von den Ebenentripeln, welche die Punkte von R_6^1 mit g_ξ, g_η, g_ζ verbinden, 5 beliebige Tripel, deren Ebenen sich in den 5 Punkten $P_1, P_2, \ldots, P_5$ treffen, und ist P_6 der Punkt, in welchem die Ebenen des diesen 5 Tripeln associirten 6ten Tripels (cf. § 2. 1) sich schneiden, so gehört auch dieses 6te Tripel der R_T^2 an (cf. § 2. 2), und mithin liegt auch P_6 auf R_6^1; wir nennen solche Punkte $P_1, P_2, \ldots, P_6$, welche mit g_ξ, g_η, g_ζ verbunden 6 associirte Ebenentripel liefern, 6 *associirte Punkte von* R_6^1 und es gilt: *Sind 5 Punkte von R_6^1 gegeben, so existirt ein eindeutig bestimmter 6ter Punkt auf R_6^1, sodass die 6 Ebenentripel, welche $P_1, P_2, \ldots, P_6$ mit g_ξ, g_η, g_ζ verbinden, ein associirtes System bilden.* Jeder trilinearen Beziehung, welcher 5 solcher 6 Tripel angehören, gehört auch das 6te an; durch eine trilineare Beziehung der 3 Ebenenbüschel wird eine Fläche III. O. erzeugt, welche die 3 Geraden g_ξ, g_η, g_ζ enthält; eine solche F_3, welcher die 3 Quadrisecanten einer R_6^1 angehören, wollen wir *eine der R_6^1 adjungirte F_3* nennen; dann gilt: *Sind $P_1 \ldots P_5$ 5 beliebige Punkte der R_6^1, so enthält jede der R_6^1 adjungirte F_3 durch diese 5 Punkte auch den zu $P_1, P_2, \ldots, P_5$ associirten Punkt P_6.* Oder: Alle zu R_6^1 adjungirten *F_3 schneiden aus R_6^1 Systeme von 6 associirten Punkten aus.* Eine beliebige Ebene ε bildet mit dem durch die 3 Quadrisecanten bestimmten Hyperboloid (g_ξ, g_η, g_ζ) eine adjungirte F_3, also: *Die 6 Punkte, in welchen eine Ebene die R_6^1 schneidet, bilden ein associirtes System;* solche 6 Punkte bilden mit den 3 Schnittpunkten von g_ξ, g_η, g_ζ mit ε ein System von 9 Schnittpunkten zweier ebenen C_3 (cf. § 2. 4), e, vgl. auch Weyr, l. c.). Bezeichnen wir mit $[i\,k\,l]$ die Raumcurve III O., welche $g_\xi\, g_\eta\, g_\zeta$ zu Sekanten hat und die 3 Punkte P_i, P_k, P_l enthält, und sind $P_1, P_2, \ldots, P_5$ 5 beliebige Punkte von R_6^1, *dann liegt der associirte 6te Punkt P_6 auf derjenigen eindeutig bestimmten R_3, welcher die 3 Secanten g_ξ, g_η, g_ζ, sowie die 2 Punkte P_4, P_5 an-*

*) cf. Weyr, l. c.

gehören, und welche die R_3: [123] in 2 Punkten schneidet; es wird also P_6 aus R_6^1 von dieser R_3 ausgeschnitten. —

Die Systeme von 6 associirten Punkten auf R_6^1 besitzen nun ganz analoge Eigenschaften, wie *die konischen Sextupel* einer ebenen C_3, d. h. wie diejenigen Systeme von 6 Punkten auf C_3, welche durch die Kegelschnitte der Ebene aus C_3 ausgeschnitten werden. Wir werden dies dadurch erkennen, dass wir die R_6^1 auf die C_3, die associirten Systeme von R_6^1 auf die konischen Sextupel von C_3 abbilden. Ist S_1 einer der 4 Hauptpunkte für R_6^1, dann existirt (cf. Art. 1) eine die R_6^1 enthaltende Fläche III. O. $F_3^{(1)}$, welche S_1 zum Doppelpunkt hat. Diese $F_3^{(1)}$ wird aus g_ξ, g_η, g_ζ durch 3 singulär-trilineare Ebenenbüschel projicirt, für welche $(g_\xi S_1)$, $(g_\eta S_2)$, $(g_\zeta S_3)$ das singuläre Tripel ist. Diese singulär-trilineare Beziehung denken wir in der T. V. § 1. 7) gelehrten Weise auf eine beliebige Ebene E abgebildet, so dass in E 3 Strahlenbüschel, deren Scheitel S_ξ, S_η, S_ζ *in gerader Linie liegen*, existiren, welche resp. auf die Ebenenbüschel g_ξ, g_η, g_ζ projectiv bezogen sind in der Art, dass 3 Ebenen, die sich in einem Punkte von $F_3^{(1)}$ schneiden, 3 Strahlen resp. durch S_ξ, S_η, S_ζ entsprechen, die durch einen Punkt gehen, wodurch die Punkte von $F_3^{(1)}$ auf die Punkte von E abgebildet sind. Den Ebenentripeln, welche die Punkte von R_6^1 mit g_ξ, g_η, g_ζ verbinden, und welche eine in unserer singulär-trilinearen Beziehung enthaltene R_T^2 bilden, entsprechen Strahlentripel, deren 3 Strahlen sich in den Punkten einer C_3 schneiden, die auch die 3 in gerader Linie gelegenen Scheitel S_ξ, S_η, S_ζ enthält (cf. § 1. 11); es wird also hierdurch die R_6^1 auf diese C_3 abgebildet. Sind nun $P_1, P_2, \ldots, P_6$ 6 associirte Punkte auf R_6^1, und ist F_3 eine beliebige der R_6^1 adjungirte Fläche III. O., welche 5 der 6 Punkte, also auch den 6^ten^ enthält, so schneidet F_3 die $F_3^{(1)}$ — abgesehen von g_ξ, g_η, g_ζ — ebenfalls in einer Raumcurve 6^ter^ Ordnung vom Geschlechte 1: $\overline{R}_6^1$, und es haben R_6^1 und $\overline{R}_6^1$ die 6 Punkte $P_1, \ldots, P_6$ und nur diese gemeinsam. Die $\overline{R}_6^1$ wird in E ebenfalls in eine Curve III. O. $\overline{C}_3$ durch S_ξ, S_η, S_ζ abgebildet, es sind somit die von S_ξ, S_η, S_ζ verschiedenen Schnittpunkte $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_6$ von C_3 und $\overline{C}_3$ die Bilder von $P_1, P_2, \ldots, P_6$, und da S_ξ, S_η, S_ζ in gerader Linie liegen, so befinden sich $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_6$ auf einem Kegelschnitt. Umgekehrt ergiebt sich auf analogem Wege, dass ein jedes konische Sextupel von C_3 die Abbildung eines Systems von 6 associirten Punkten auf R_6^1 ist. Also gilt: *Die sämmtlichen Systeme von* 6 *associirten Punkten auf R_6^1 lassen sich auf die konischen Sextupel von C_3 abbilden, und umgekehrt.* Jedem Sextupel associirter Punkte ist also ein Kegelschnitt in E zugeordnet, welcher aus C_3 das entsprechende Sextupel ausschneidet. Den ebenen Sextupeln — das sind die von den Ebenen

des Raumes aus R_6^1 ausgeschnittenen Sextupel —, welche, wie wir sahen, aus je 6 associirten Punkten bestehen, entsprechen somit die Kegelschnitte eines Systems dritter Stufe, von dem wir bald erkennen werden, dass es ein *lineares* System, ein Kegelschnitt-Gebüsche ist. —

Zwei Punktgruppen auf R_6^1: G_r, G_{6-r}, welche aus $r < 6$, resp. $6-r$ Punkten bestehend, zusammen ein associirtes System bilden, nennen wir *zu einander residual;* alle Punktgruppen G_r, welche durch dieselbe Punktgruppe G_{6-r} zu einem associirtem System ergänzt werden, wollen wir als *in Bezug auf* G_{6-r} *corresidual* bezeichnen. 2 residuale Gruppen G_r und G_{6-r} haben in der Ebene E zu Bildern 2 Gruppen $\mathfrak{G}_r$, $\mathfrak{G}_{6-r}$, welche zusammen ein conisches Sextupel von C_3 bilden; alle in Bezug auf G_{6-r} corresiduale Gruppen G_r werden abgebildet in Punktgruppen $\mathfrak{G}_r$ auf C_r, welche $\mathfrak{G}_{6-r}$ zu einem conischen Sextupel ergänzen. Wir erkennen demnach, dass die Bilder residualer resp. corresidualer Punktgruppen aus Punktgruppen auf C_3 bestehen, welche in der bei ebenen Curven üblichen Bezeichnung*) *residual* resp. *corresidual* sind. Für diese Bilder gilt somit der Brill-Nöther'sche Restsatz**), *dass alle auf C_3 zu einander in Bezug auf eine Punktgruppe corresidualen Punktgruppen auch corresidual sind in Bezug auf jede andere Punktgruppe, welche zu einer von ihnen residual ist.* Da sich nun die Beziehung der Residualität resp. Corresidualität von den Punktgruppen von R_6^1 auf ihre Bilder in C_3, wie wir soeben sahen, überträgt, so überträgt sich auch der Restsatz unmittelbar auf die Punktgruppen auf R_6^1, und wir können daher folgenden für associirte Punktgruppen R_6^1 fundamentalen Satz aussprechen: *Sind* $P_1, P_2, \ldots, P_6$; $P_1', P_2', \ldots, P_6'$ 2 *Systeme von associirten Punkten auf* R_6^1 *und liegen* 6 *beliebige von diesen* 12 *Punkten* $(P_1 \ldots P_r, P'_{r+1} \ldots P_6')$ *derart, dass sie ein associirtes System bilden, so bilden auch die übrigeu* 6 *Punkte* $(P_1' \ldots P_r', P_{r+1} \ldots P_6)$ *ein associirtes System.* Denn es sind $P_1 \ldots P_r$; $P_1' \ldots P_r'$ corresidual in Bezug auf $P'_{r+1} \ldots P_6'$, und es ist $P_{r+1} \ldots P_6$ residual zu $P_1 \ldots P_r$, also ist nach dem Restsatz: $P_{r+1} \ldots P_6$ auch residual zu $P_1' \ldots P_r'$, d. h. $P_1' \ldots P_r'$, $P_{r+1} \ldots P_6$ bilden ein associirtes System, q. e. d. Es gelten also für Gruppen von 6 associirten Punkten einer R_6^1 genau dieselben Sätze, welche Herr Reye für Gruppen von 8 associirten Punkten auf R_4^1 bewiesen hat;*) es lassen sich in der That auch diese Reye'schen Sätze in genau analoger Weise aus dem Restsatz für ebene Curven erschliessen.

---

*) cf. Clebsch-Lindemann: Vorlesungen über Geometrie Bd. I. p. 431.

**) cf. Clebsch-Lindemann: l. c. p. 432.

***) cf. Reye: Sopra le curve gobbe di quart' ordine e prima specie; Anuali di matem. Ser. II. Tome II.

3. Punktinvolutionen auf R_6^1. Seien $P_{r+1}, P_{r+2}, \ldots, P_6$ ($r < 6$) $(6-r)$ feste Punkte von R_6^1, und seien $P_1 \ldots P_r$ irgend r Punkte, welche $P_{r+1}, P_{r+2}, \ldots, P_6$ zu einem associirten System ergänzen, dann bilden die r Punkte $P_1, P_2, \ldots, P_r$ eine Gruppe, welche durch beliebige $(r-1)$ dieser Punkte vollkommen und eindeutig bestimmt ist. Verstehen wir also mit Emil Weyr*) *unter einer Involution* r^{ter} *Ordnung* $(r-1)^{\text{ter}}$ *Stufe* J_r *auf einer beliebigen Curve vom Geschlechte* 1 *eine* $(r-1)$*-fache Unendlichkeit von* r*-punktigen Gruppen, von denen jede durch* $(r-1)$ *ihrer Punkte vollkommen und unzweideutig bestimmt ist, so bilden die sämmtlichen Punktgruppen* $P_1, \ldots, P_r$, *welche* $P_{r+1}, \ldots, P_6$ *zu einem associirten System ergänzen, eine* J_r $(r = 2, 3, 4, 5)$. Für derartige Involutionen auf R_6^1 gilt der fundamentale Satz: *Eine* J_r *ist durch eine ihrer Gruppen vollkommen und eindeutig bestimmt**), *so dass zwei* J_r, *welche eine Gruppe gemein haben, identisch sind.* Wir können nun *jede* J_r $(r = 2, 3, 4, 5)$ auf die oben angegebene Weise erhalten, nämlich als die Gesammtheit der r-punktigen Gruppen, welche $(6-r)$ Punkte von R_6^1 zu einem associirten System ergänzen; ist nämlich $P_1, P_2, \ldots, P_r$ irgend eine Gruppe von J_r und bestimmt man zu $P_1, P_2, \ldots, P_r$ und den willkürlich gewählten Punkten $P_{r+1}, \ldots, P_5$ den 6^{ten} associirten Punkt P_6, so werden alle Gruppen, welche $P_{r+1}, \ldots, P_6$ zu einem associirten System ergänzen, eine Involution r^{ter} Ordnung $(r-1)^{\text{ter}}$ Stufe bilden, welcher die Gruppe $P_1, P_2, \ldots, P_r$ angehört, und die also mit J_r identisch ist, da sie mit J_r die Gruppe $P_1, P_2, \ldots, P_r$ gemein hat. Ist nun eine J_r auf R_6^1 gegeben, und ist $P_1, P_2, \ldots, P_r$ eine Gruppe von J_r, so bilden alle Gruppen von $(6-r)$ Punkten, welche $P_1, \ldots, P_r$ zu einem associirten System ergänzen, eine J_{6-r}. Ist $P_{r+1} \ldots P_6$ eine beliebige Gruppe von J_{6-r}, so ergänzen alle Gruppen von J_r dieselben zu einem associirten System; denn die Gruppen, welche $P_{r+1}, \ldots, P_6$ zu einem associirten System ergänzen, bilden eine Involution r^{ter} O., $(r-1)^{\text{ter}}$ Stufe, welche mit J_r die Gruppe $P_1 \ldots P_r$ gemein hat, also mit J_r identisch ist. Die beiden Involutionen J_r und J_{6-r} sind also so beschaffen, dass jede Gruppe der einen jede Gruppe der andern zu einem associirten System ergänzt, also mit ihr residual ist. Also gilt: *Bei* 2 *Involutionen* J_r *und* J_{6-r}, *bei welchen eine Gruppe der einen mit einer Gruppe der anderen residual ist, ist jede Gruppe der einen mit jeder Gruppe der anderen residual.* Wir nennen 2 derartige Involutionen J_r, J_{6-r} *residuale Involutionen.* Zu jeder J_2 gehört also eine residuale J_4; zu jeder J_3 gehört eine residuale J_3. — Ist eine J_r auf R_6^1 gegeben, so ist eine der wichtigsten Fragen, ob in J_r Gruppen existiren, deren r Punkte sämmtlich

*) cf. Weyr: Ueber Raumcurven 5^{ter} O. vom Geschlechte 1; III^{te} Mittheilung. Sitzungsber. der Wiener Academie 1888, p. 606.

zusammenfallen; diese Frage ist zu bejahen; es gilt der allgemeine Satz: *In einer J_r auf einer elliptischen Curve existiren r^2 Gruppen, bei welchen die r Punkte der Gruppe sämmtlich zusammenfallen*)*; ein solcher Punkt, in welchem eine Gruppe von J_r vereinigt ist, heisst ein r-facher Punkt von J_r.

4) Wir betrachten nunmehr eine J_2 auf R_6^1; ist $P_1 P_2$ ein Paar derselben, so bilden alle Punktgruppen $P_3 P_4 P_5 P_6$, welche $P_1 P_2$ zu einem associirten System ergänzen, die Gruppen der zu J_2 residualen J_4, und es wird die J_2 durch die Gesammtheit derjenigen Gruppen $P_1 P_2$ gebildet, welche irgend eine der Gruppen $P_1 P_2 P_3 P_4$ von J_4 zu einem associirten System ergänzt; *die Gruppen einer J_2 werden demnach aus R_6^1 ausgeschnitten durch solche adjungirte F_3, welche durch 4 feste Punkte von R_6^1 hindurchgehen.* Da J_2 vier Doppelelemente besitzt, so gilt: *Sind $P_3 P_4 P_5 P_6$ 4 Punkte auf R_6^1, so giebt es unter den adjungirten F_3, welche P_3, P_4, P_5, P_6 enthalten, 4, welche die R_6^1 berühren.* 4 Punkte Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, welche die Doppelpunkte einer J_2 auf R_6^1 bilden, wollen wir als *ein Quadrupel* bezeichnen; einem solchen Quadrupel wohnen analoge Eigenschaften inne, wie den Punktquadrupeln auf C_3 und R_4^1, wie überhaupt auf jeder Curve vom Geschlechte 1 derartige Quadrupel existiren.**) — Ist S_i $(i=1, 2, 3, 4)$ einer der 4 Hauptpunkte für R_6^1, (cf. Art. 1) und sind $P_1 P_2$ 2 beliebige Punkte von R_6^1, dann hat die Raumcurve III. Ordnung R_3, welche g_ξ, g_η, g_ζ zu Secanten hat und die Punkte P_1, P_2, S_i enthält, mit derjenigen Fläche III. O. $F_3^{(i)}$, welche R_6^1 enthält und S_i zum Doppelpunkt hat, den Doppelpunkt S_i und 8 weitere Punkte, nämlich P_1, P_2 und die 6 Punkte auf g_ξ, g_η, g_ζ gemein, also ist R_3 ganz auf $F_3^{(i)}$ gelegen. Ist F_3 eine beliebige, von $F_3^{(i)}$ verschiedene, die R_6^1 enthaltende Fläche III. O., so enthält F_3 ebenfalls jene 8 Punkte (P_1, P_2 und die 6 auf g_ξ, g_η, g_ζ gelegenen) von R_3, also noch einen 9ten Punkt Q_i, der, da er F_3 und $F_3^{(i)}$ gemeinsam ist, auch auf R_6^1 gelegen sein muss, so dass wir den Satz erhalten: *Legt man durch 2 beliebige Punkte P_1, P_2 von R_6^1 eine R_3, welche die 3 Quadrisecanten g_ξ, g_η, g_ζ zu Secanten hat, und welcher einer der 4 Hauptpunkte S_i angehört, so schneidet dieselbe die R_6^1 noch in einem dritten Punkte Q_i.* Hält man nun einen beliebigen Punkt Q_i von R_6^1 fest, und ist P_1 ein variabler Punkt, welcher die R_6^1 durchläuft, so schneidet die R_3, welche g_ξ, g_η, g_ζ zu Secanten hat, und welcher S_i, P_1, Q_i angehören — sie sei fortan mit $[S_i Q_i P_1]$ bezeichnet — die R_6^1 in einem Punkte P_2 derart, dass jedem Punkte P_1 von R_6^1 ein Punkt P_2 entspricht;

*) cf. Weyr: Ueber die Anzahl der n-fachen Elemente einer J_{n-1}^n etc. Monatshefte für Mathematik und Physik. II. Jahrgang, Wien 1891.

**) cf. Weyr: Ueber die Raumcurven 5ter O. vom Geschlecht 1; Ite Mittheilung; Wiener Sitzungsberichte 1884 p. 213.

dieses Entsprechen ist ein involutorisches, also bilden alle diese Punktepaare $P_1 P_2$ eine J_2 auf R_6^1, und da man das Paar $P_1 P_2$ ganz beliebig wählen und den Punkt Q_i dazu bestimmen kann, so lassen sich alle J_2 auf R_6^1 derartig erzeugen und es gilt: *Ist eine J_2 auf R_6^1 gegeben und legt man durch alle Paare $P_1 P_2$ von J_2 Raumcurven III. O., welche g_ξ, g_η, g_ζ zu Sekanten haben und einen Hauptpunkt S_i enthalten, so schneiden alle diese ∞^1 R_3 die R_6^1 noch in ein und demselben Punkte Q_i. Somit gehören jeder J_2 auf R_6^1 4 Punkte Q_i ($i = 1, 2, 3, 4$) zu von solcher Art, dass alle R_3, welche die Paare $P_1 P_2$ von J_2 mit Q_i verbinden und g_ξ, g_η, g_ζ zu Secanten haben, einen Hauptpunkt S_i enthalten.* — Es sei $P_1 P_2$ ein Paar einer J_2 auf R_6^1; wir betrachten die Raumcurve III. O. $[P_1 P_2 S_i]$, welche nach dem Vorigen die R_6^1 noch in einem Punkte Q_i trifft, der für alle Paare $P_1 P_2$ derselbe ist. Die R_3 liegt auf der Fläche III. O. $F_3^{(i)}$, welche S_i zum Doppelpunkt hat, und trifft, wie man leicht erkennt, die 3 durch S_i gehenden Trisecanten g_{23}^i, g_{31}^i, g_{12}^i noch in je einem von S_i verschiedenen Punkte. Die Raumcurve III. O. $[P_1 P_2 S_i]$ wird aus S_i durch einen Kegel II. O. projicirt, welcher die 3 Trisecanten g_{23}^i, g_{31}^i, g_{12}^i zu Erzeugenden hat, und die R_6^1 — abgesehen von den 9 auf diesen 3 Trisecanten gelegenen Punkten — in Q_i, P_1, P_2 schneidet; es sind somit die 6 Geraden g_{23}^i, g_{21}^i, g_{12}^i; $S_i Q_i$, $S_i P_1$, $S_i P_2$ Erzeugende desselben Kegels II. O., und es ergiebt sich, da $P_1 P_2$ irgend ein Paar von J_2 war: *Legt man durch alle Paare einer auf R_6^1 befindlichen J_2 und die 3 durch irgend einen Hauptpunkt S_i gehenden Trisecanten Kegel II. O., so treffen dieselben sämmtlich die R_6^1 in dem Punkte Q_i, und bilden somit einen Kegelbüschel, dessen 4 gemeinsame Erzeugende die 3 Trisecanten durch S_i und die Gerade $S_i Q_i$ bilden.* Oder: *Die Kegel, welche die 3 von einem Hauptpunkte ausgehenden Trisecanten und einen beliebigen Punkt von R_6^1 enthalten, schneiden die R_6^1 in Punktepaaren einer J_2 und es lässt sich auf diese Weise jede J_2 auf R_6^1 erzeugen.* Wir werden später (Art. 6) erkennen, dass die 4 Punkte Q_i ($i = 1, 2, 3, 4$), welche zu einer J_2 in der eben auseinandergesetzten Weise gehören, *ein Quadrupel bilden.* —

Es sei auf R_6^1 eine Paarinvolution J_2 gegeben, die Paare derselben seien xy; ist nun J_2' eine zweite Paarinvolution auf R_6^1 und x' der in J_2' entsprechende Punkt von x, y' der von y, so bilden die Paare $x'y'$, wie sich unmittelbar aus der Definition einer Paarinvolution auf R_6^1 ergiebt, wiederum eine Paarinvolution $\overline{J}_2$; ist $x_1 x_2 x_3 x_4$ das Quadrupel der Doppelelemente von J_2, so ist $x_1' x_2' x_3' x_4'$ das Quadrupel der Doppelelemente von $\overline{J}_2$, also gilt: *Ist $x_1 x_2 x_3 x_4$ ein Quadrupel auf R_6^1 und sind $x_1' x_2' x_3' x_4'$ die 4 Punkte, welche $x_1 x_2 x_3 x_4$ in Bezug auf eine J_2 entsprechen, so bilden auch $x_1' x_2' x_3' x_4'$ ein Quadrupel.* Da

einerseits ein Quadrupel durch einen seiner Punkte, andererseits J_2 durch eines seiner Paare bestimmt ist, so wird, wenn $x_1 x_2 x_3 x_4$ ein fest gewähltes Quadrupel, $x_1' x_2' x_3' x_4'$ ein ganz beliebiges Quadrupel von R_6^1 bedeutet, die durch das Punktepaar $x_1 x_1'$ bestimmte J_2 das Quadrupel $x_1 x_2 x_3 x_4$ in das Quadrupel $x_1' x_2' x_3' x_4'$ überführen. Also gilt: *Man erhält alle Quadrupel einer R_6^1 aus einem derselben, wenn man zu den 4 Punkten des letzteren in Bezug auf alle Paarinvolutionen auf R_6^1 die 4 entsprechenden Punkte aufsucht.* —

Ist R_1 ein beliebiger Punkt auf R_6^1, so existirt eine eindeutig bestimmte J_2, welche den Punkt R_1 zum Doppelelement hat; schneidet nämlich der Kegel II. O., welcher die 3 aus einem Hauptpunkte S_i gehenden Trisecanten zu Erzeugenden hat und der R_6^1 in R_1 berührt, die R_6^1 zum letzten Male in Q_i, so schneiden die sämmtlichen Kegel, welche jene 3 Trisecanten und die Gerade $S_i Q_i$ zu Erzeugenden haben, die R_6^1 in einer J_2, welche R_1 zum Doppelelement hat. Ist J_4 die zu J_2 residuale Quadrupelinvolution, welche gebildet wird von allen Gruppen von je 4 Punkten, welche mit jedem beliebigen Paare von J_2 ein associirtes System bilden, so besitzt J_4 16 vierfache Elemente $S_i (i = 1, 2, \ldots, 16)$, wo also in S_i die 4 Punkte einer Gruppe von J_4 vereinigt sind. Es bildet somit jeder der Punkte S_i mit R_1 (und ebenso mit den 3 andern Doppelelementen R_2, R_3, R_4 von J_2) ein associirtes System, bei welchem sich 4 seiner Punkte in S_i, die beiden andern in R_1 befinden; somit ergiebt sich: *Zu jedem beliebigen Punkte R von R_6^1 lassen sich 16 Punkte S so hinzufinden, dass R mit jedem der Punkte S ein associirtes System bildet, bei welchem 4 Punkte in S, die beiden andern in R vereinigt sind.* Und ebenso gilt umgekehrt: *Ist S ein beliebiger Punkt von R_6^1, so lässt sich auf vierfache Weise ein Punkt R auffinden, so dass S mit jedem der Punkte R ein associirtes System bildet, für welches in S 4 Punkte, in R 2 Punkte vereinigt sind.* Damit sind alle associirten Systeme, welche aus einem vierfachen und einem zweifachen Punkte bestehen, aufgefunden.

5) Tripelinvolutionen auf R_6^1. Sind P_1, P_2, P_3 3 beliebige Punkte auf R_6^1, so bilden alle Punktetripel $P_4 P_5 P_6$, welche $P_1 P_2 P_3$ zu einem associirten System ergänzen, eine Involution 3ter O., 2ter Stufe J_3 (cf. Art. 3); die Punktetripel, welche eines der Tripel von J_3, und mithin alle (cf. Art. 3) zu einem associirten System ergänzen, welche also mit sämmtlichen Tripeln von J_3 residual sind, bilden eine zweite Tripelinvolution 2ter Stufe J_3' und es sind die Involutionen J_3, J_3' *zu einander residuale Involutionen;* also: *Zu jeder beliebigen Tripelinvolution J_3 auf R_6^1 gehört eine residuale Tripelinvolution derart, dass jedes Tripel von J_3 mit jedem Tripel von J_3' ein associirtes System bildet.* — Ist $P_1 P_2 P_3$ ein Tripel einer Tripelinvolution J_3, $P_1' P_2' P_3'$ ein solches der residualen Tripelinvolution J_3' und bezeichnen wir mit

$[P_1 P_2 P_3]$ diejenige Raumcurve III. O., welcher g_ξ, g_η, g_ζ als Secanten, $P_1 P_2 P_3$ als Punkte angehören, dann werden, da $P_1 P_2 P_3 P_1' P_2' P_3'$ ein associirtes System bilden, die beiden $R_3 : [P_1 P_2 P_3]$, $[P_1' P_2' P_3']$ 2 Punkte gemein haben (cf. Art. 2); ist nun F_3 diejenige eindeutig bestimmte Fläche III. O. des R_6^1 enthaltenden F_3-Büschels, welche einen nicht auf R_6^1 gelegenen Punkt von $[P_1 P_2 P_3]$ enthält, der also 10 Punkte von $[P_1 P_2 P_3]$, also die ganze Curve angehört, so wird auch $[P_1' P_2' P_3']$ der F_3 angehören, da $[P_1' P_2' P_3']$, abgesehen von den 3 Punkten P_1', P_2', P_3', den 6 auf g_ξ, g_η, g_ζ gelegenen Punkten, noch die beiden Schnittpunkte mit $[P_1 P_2 P_3]$, also 11 Punkte, mit F_3 gemein hat. Die sämmtlichen zu den Tripeln P_1', P_2', P_3' von J_3' gehörigen Raumcurven III. O. $[P_1' P_2' P_3']$ liegen also auf F_3; dasselbe gilt aber auch für die Curven $[P_1 P_2 P_3]$, welche zu den Tripeln von J_3 gehören. Ebenso schneiden umgekehrt alle R_3 auf F_3, welche g_ξ, g_η, g_ζ zu Secanten haben, die R_6^1 in 3 Punkten, da sie jede andere Fläche des R_6^1 enthaltenden F_3-Büschels in 3 Punkten treffen, die Gesammtheit dieser R_3 bildet genau ebenso wie die unicursalen Tripelreihen R_T^1, mittels deren sie aus g_ξ, g_η, g_ζ projicirt werden, 2 Netze (cf. T. V. p. 407 (389)), die R_3 des einen Netzes schneiden aus R_6^1 die Tripel von J_3, die des andern Netzes die Tripel der residualen Involution J_3' aus. Wir können also zusammenfassen: *Die auf R_6^1 auftretenden Tripelinvolutionen ordnen sich in Paare J_3, J_3' derart, dass jedes Tripel von J_3 mit jedem Tripel von J_3' ein associirtes System bildet, und J_3, J_3' demnach residual sind. Die R_3, welche durch die 3 Punkte eines Tripels von J_3 und die 3 Secanten g_ξ, g_η, g_ζ bestimmt sind, erfüllen eine die R_6^1 enthaltende F_3, deren zweites Netz von R_3, welche g_ξ, g_η, g_ζ zu Secanten haben, aus R_6^1 die zu J_3 residuale J_3' ausschneidet. In dieser Art entsprechen jeder durch R_6^1 hindurchgehenden F_3 zwei residuale Tripelinvolutionen, welche durch die beiden Netze von R_3, welche der F_3 angehören und g_ξ, g_η, g_ζ zu Secanten haben, bestimmt erscheinen und umgekehrt.* —

Jede J_3 auf R_6^1 besitzt 9 Tripel, deren 3 Punkte zusammenfallen (cf. Art. 3), durch einen solchen dreifachen Punkt ist die J_3 eindeutig bestimmt, da er ein Tripel repräsentirt. Jeder beliebige Punkt P auf R_6^1 bestimmt also eine J_3, welche P als dreifachen Punkt enthält; ist J_3' die zu J_3 residuale Tripelinvolution, so besitzt auch diese 9 dreifache Punkte Q_i $(i = 1, 2, \ldots, 9)$, es bildet somit jeder der 9 Punkte Q_i mit dem Punkte P ein associirtes System derart, dass in P, wie in Q_i, je drei Punkte des Systems vereinigt sind, also gilt: *Jeder Punkt P von R_6^1 lässt sich durch 9 Punkte Q zu einem associirten System ergänzen, bei welchem in P, wie in Q, je 3 Punkte vereinigt sind.* —

6) Die vier sich selbst residualen Tripelinvolutionen

auf R_6^1. Wir fragen, ob auf R_6^1 Tripelinvolutionen existiren, die sich selbst residual sind. Dazu muss jedes Tripel einer solchen J_3 mit jedem anderen Tripel derselben ein associirtes System bilden, im Besonderen muss jedes Tripel mit sich selbst ein associirtes System bilden, d. h. die 3 Punkte eines Tripels einer sich selbst residualen Tripelinvolution bilden ein associirtes System, bei welchem in jedem der 3 Punkte 2 Elemente coincidiren. Die R_3, welche g_ξ, g_η, g_ζ zu Secanten haben, und welche die 3 Punkte eines Tripels einer solchen J_3 enthalten, schneiden einander paarweise in 2 Punkten (cf. Art. 2); die Fläche III. O. F_3, welche R_6^1 und eine dieser R_3 enthält, enthält also auch alle übrigen R_3. Die Ebenentripel, welche die Punkte dieser F_3 aus g_ξ, g_η, g_ζ projiciren, gehören einer trilinearen Beziehung F_T an, und es werden die in Rede stehenden R_3 durch unicursale Tripelreihen R_T^1 projicirt, welche in F_T enthalten sind. Da nun die beiden R_3-Systeme, welche nach dem obigen die beiden residualen J_3 ausschneiden, in unserem Falle einer *sich selbst residualen* J_3, sich vereinigen, so reduciren sich auch die beiden R_T^1-Netze, welche in F_T enthalten sind, *auf ein einziges*, d. h. die trilineare Beziehung *F_T wird eine singuläre* (cf. T. V. § 2. 6), p. 396). Nun waren in dem Büschel trilinearer Beziehungen F_T, welche die R_6^1 enthaltenden F_3 erzeugten, 4 *singuläre* (cf. § 1. 8) $F_T^{(i)}$ ($i = 1, 2, 3, 4$), welche diejenigen singulären, die R_6^1 enthaltende Flächen III. O. $F_3^{(i)}$ erzeugten, deren Doppelpunkt S_i einer der 4 Hauptpunkte war (cf. Art. 1). Die auf einer dieser 4 singulären Flächen III. O. enthaltenen R_3, welche g_ξ, g_η, g_ζ zu Secanten haben, bilden nur *ein einziges System* und gehen sämmtlich *durch den Doppelpunkt* der betreffenden Fläche (cf. T. V. p. 408). Betrachten wir eine dieser singulären Flächen $F_3^{(i)}$, so bilden alle auf ihr befindlichen R_3, welche g_ξ, g_η, g_ζ zu Secanten haben, eine zweifache Mannigfaltigkeit derart, dass durch 2 Punkte von F_3 eine und nur eine R_3 dieses Systems geht; 2 beliebige R_3 dieses Systems haben 2 Punkte gemeinsam, nämlich den Doppelpunkt und einen weiteren Punkt (cf. T. V. § 2. 6) in Verbindung mit § 4. 2). Zwei solche R_3 schneiden die R_6^1 in je 3 Punkten P_1, P_2, P_3; P_1', P_2', P_3', welche zusammen ein associirtes System bilden; denn es liegt einerseits P_3' auf derjenigen R_3, welcher P_1', P_2' als Punkte, g_ξ, g_η, g_ζ als Secanten angehören, und welche die R_3, durch P_1, P_2, P_3, welche g_ξ, g_η, g_ζ zu Secanten hat, in 2 Punkten schneidet; andererseits liegt P_3' auf R_6^1 und ist somit der 6te zu $P_1 P_2 P_3$, $P_1' P_2'$ associirte Punkt, da dieser auf jenen beiden Curven liegen muss und P_3' der einzige Punkt dieser Art ist. Betrachten wir nun die Punktetripel, welche die R_3 auf $F_3^{(i)}$, welche g_ξ, g_η, g_ζ zu Secanten haben, aus R_6^1 ausschneiden, so bilden dieselben eine Tripelinvolution 2ter Stufe $J_3^{(i)}$, da durch 2 Punkte von R_6^1 eine R_3 des Systems und damit deren dritter

Schnittpunkt mit R_6^1 eindeutig bestimmt ist; je 2 Tripel dieser Tripelinvolution $J_3^{(i)}$ bilden, wie eben gezeigt, ein associirtes System, also ist $J_3^{(i)}$ *sich selbst residual*, und es ergiebt sich: *Es existiren* 4 *sich selbst residuale Tripelinvolutionen* $J_3^{(i)}$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ auf R_6^1; *die ihnen entsprechenden Flächen III. O. sind die* 4 *singulären, die* R_6^1 *enthaltenden Flächen III. O.* $F_3^{(i)}$, *deren Doppelpunkte die* 4 *Hauptpunkte* S_i *von* R_6^1 *sind.* Diese 4 Tripelinvolutionen sind für die Erforschung der Eigenschaften der R_6^1 von der grössten Bedeutung, sie sind mit der Curve selbst gegeben, wir können sie daher als *fundamentale* bezeichnen. Jedes Tripel einer dieser Tripelinvolutionen ist, wie schon oben bemerkt, sich selbst residual, und stellt mithin ein associirtes System dar, dessen Elemente paarweise in den 3 Punkten des Tripels vereinigt sind; da offenbar auch umgekehrt alle derartigen associirten Systeme ein Tripel einer der 4 sich selbst residualen Involutionen repräsentiren, so ist somit die Gesammtheit derselben gegeben und es gilt: *Die Tripel der* 4 *fundamentalen Tripelinvolutionen und nur diese geben diejenigen associirten Systeme, bei denen je* 2 *Elemente in einem Punkte vereinigt sind.* —

Die Tripel von $J_3^{(i)}$ werden aus R_6^1 ausgeschnitten durch diejenigen R_3, welche auf $F_3^{(i)}$ sich befinden, und welche g_ξ, g_η, g_ζ zu Secanten haben; diese sämmtlichen R_3 gehen durch den Doppelpunkt S_i von $F_3^{(i)}$; zu diesen Tripeln gehören auch diejenigen, welche von den 3 Punkten gebildet werden, in welchen die 3 durch S_i gehenden Trisecanten $g_{23}^{(i)}$, $g_{31}^{(i)}$, $g_{12}^{(i)}$ (cf. Art. 1) die R_6^1 treffen; denn es bildet jede dieser Trisecanten, z. B. $g_{12}^{(i)}$ zusammen mit den beiden Geraden $g_1^{(i)}$, $g_2^{(i)}$, welche $g_{12}^{(i)}$ und g_ξ, g_η, g_ζ gleichzeitig treffen, eine (reducible) R_3 auf $F_3^{(i)}$, welche g_ξ, g_η, g_ζ zu Secanten hat. Da mithin dieses Tripel auf $g_{12}^{(i)}$ mit jedem anderen Tripel von $J_3^{(i)}$ ein associirtes System bildet, so schneiden unsere R_3, welche die Tripel von $J_3^{(i)}$ aus R_6^1 ausschneiden, die Gerade $g_{12}^{(i)}$ in 2 Punkten, von denen einer offenbar S_i ist (cf. § 2. Art. 4, e (am Schluss)). Daraus ergiebt sich: *Sind* $P_1 P_2$ *zwei beliebige Punkte von* R_6^1, *so schneidet die* R_3, *welche* g_ξ, g_η, g_ζ *zu Secanten hat, und welcher die* 3 *Punkte* P_1, P_2, S_i *angehören, die* R_6^1 *noch in demjenigen Punkte* P_3, *welcher* $P_1 P_2$ *zu einem Tripel von* $J_3^{(i)}$ *ergänzt und es trifft* R_3 *die* 3 *durch* S_i *gehenden Trisecanten, abgesehen von* S_i, *noch in je einem* 2ten *Punkte*, $(i = 1, 2, 3, 4)$. — *Sind* $P_1 P_2 P_3$ 3 *Punkte eines Tripels einer der* 4 *sich selbst residualen Tripelinvolutionen, so enthält die* R_3 *durch* P_1, P_2, P_3, *welche* g_ξ, g_η, g_ζ *zu Geraden hat, den der betreffenden Involution entsprechenden Hauptpunkt.* — Projiciren wir die R_3, welche g_ξ, g_η, g_ζ zu Secanten haben und die die Tripel von $J_3^{(i)}$ aus R_6^1 ausschneiden, aus dem ihnen allen gemeinsamen Hauptpunkt S_i durch Kegel II. O., so haben alle diese

Kegel die 3 aus S_i gehenden Trisecanten $g_{23}^{(i)}$, $g_{31}^{(i)}$, $g_{12}^{(i)}$ zu gemeinsamen Erzeugenden und schneiden die R_6^1 — ausser in den 9 auf diesen 3 Strahlen befindlichen Punkten — nur noch in den 3 Punkten des betreffenden Tripels von $J_3^{(i)}$, so dass die Tripel von $J_3^{(i)}$ durch das Kegelnetz mit den 3 gemeinsamen Erzeugenden $g_{23}^{(i)}$, $g_{31}^{(i)}$, $g_{12}^{(i)}$ aus R_6^1 ausgeschnitten werden. Wir gelangen also zu folgender wichtigen Erzeugung der 4 sich selbst residualen Tripelinvolutionen: *Die 4 Netze von Kegeln II. O., welche die 3 durch einen der 4 Hauptpunkte S_i ($i = 1, 2, 3, 4$) gehenden Trisecanten zu gemeinsamen Strahlen haben, schneiden aus R_6^1 die Punktetripel der 4 sich selbst residualen Tripelinvolutionen aus.* —

Kehren wir nun zurück zu der (Art. 2) gelehrten Abbildung der singulär-trilinearen Beziehung $F_T^{(1)}$, welche die singuläre Fläche III. O. $F_3^{(1)}$ erzeugt. Durch diese Abbildung entsprach jedem Punkt von $F_3^{(1)}$ ein Punkt der Bildebene E, der R_6^1 entsprach eine Curve III. O. C_3, und die Systeme von je 6 associirten Punkten auf R_6^1 wurden abgebildet auf die Systeme von je 6 Punkten eines Kegelschnitts, auf die conischen Sextupel von C_3. Daraus ergiebt sich, dass die Tripel einer jeden der 4 fundamentalen Tripelinvolutionen $J_3^{(i)}$ ($i=1, 2, 3, 4$), da diese associirte Systeme mit 3 paarweise coincidirenden Elementen repräsentiren, *in solche Tripel auf C_3 abgebildet werden, in deren 3 Punkten die C_3 von einem Kegelschnitt berührt wird*, also in die Berührungstripel der die C_3 dreimal berührenden Kegelschnitte. Die Tripel $J_3^{(1)}$ liegen auf den R_3 von $F_3^{(1)}$, welche g_ξ, g_η, g_ζ zu Secanten haben; diesen R_3 entsprechen *die Geraden* der Ebene E, also werden insbesondere die Tripel von $J_3^{(1)}$ in die *geraden Tripel* von C_3 abgebildet; in der That wird ja auch in 3 Punkten, die derselben Geraden angehören, die C_3 von einer Curve II. O. berührt, nämlich von der in die doppelt zählende Gerade g ausgearteten Curve II. O. Es lassen sich somit die Tripel von $J_3^{(1)}$ (und analoges gilt für jede der 3 anderen Involutionen) in die geraden Tripel einer C_3 abbilden; die Tripel von $J_3^{(2)}$, $J_3^{(3)}$, $J_3^{(4)}$ werden dann abgebildet in die Punktetripel von C_3, in welchen ein (eigentlicher) Kegelschnitt die C_3 dreimal berühren kann. Es spielen demnach die 4 Tripelinvolutionen $J_3^{(i)}$ ($i = 1, 2, 3, 4$) auf R_6^1 dieselbe fundamentale Rolle, wie jene 4 Tripelsysteme auf der ebenen C_3, und es lassen sich somit alle die zahlreichen und wichtigen Sätze, welche aus der Theorie jener Tripel auf C_3 bekannt sind, auf die R_6^1 übertragen, wo sie ebenfalls zu interessanten Eigenschaften jener Curve führen, wovon jedoch hier nur das speciell für die R_6^1 charakteristische berührt werden möge, da es genügt die grosse Analogie, welche die Geometrie auf der R_6^1 mit der auf der C_3 bietet, aufgedeckt zu haben, eine Analogie, die sich in anderer Richtung bewegt, als die Analogie zwischen der Raumcurve IV^{ter} Ordnung 1^{ter} Art mit der C_3, da bei der R_4^1 derartige

Tripelsysteme nicht auftreten, sondern Quadrupelsysteme. Bemerkt sei hier noch, dass, während bei der C_3 unter den 4 fundamentalen Tripelsystemen sich das der geraden Tripel vor den 3 übrigen auszeichnet, bei der R_6^1: $J_3^{(1)}$, $J_3^{(2)}$, $J_3^{(3)}$, $J_3^{(4)}$ völlig coordinirt auftreten, wodurch der Ausdruck der Sätze für die R_6^1 häufig grössere Symmetrie erlangt. Der bekannte Satz für die C_3 z. B.: Wenn ein Kegelschnitt eine C_3 in 3 Punkten berührt, so liegen die dritten Schnittpunkte der Seiten des von diesen 3 Punkten gebildeten Dreiecks in einer Geraden, überträgt sich unmittelbar in den Satz: *Sind P_1, P_2, P_3 3 Punkte eines Tripels der fundamentalen Tripelinvolution $J_3^{(i)}$ auf R_6^1 und sind Q_1, Q_2, Q_3 die 3 Punkte, welche resp. P_2P_3, P_3P_1, P_1P_2 zu einem Tripel der fundamentalen Tripelinvolution $J_3^{(k)}$ $(i \neq k)$ ergänzen, so bilden auch Q_1, Q_2, Q_3 ein Tripel von $J_3^{(k)}$.* Ebenso ist der Satz: *Die 4 Punkte $P_3^{(i)}$ $(i=1, 2, 3, 4)$, welche das beliebige Punktepaar P_1, P_2 auf R_6^1 zu einem Tripel von $J_3^{(i)}$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ ergänzen, bilden ein Quadrupel,* die einfache Uebertragung eines bekannten Satzes für die C_3. —

7) Aus den 3 Quadrisecanten g_ξ, g_η, g_ζ gehen an die R_6^1 je 4 Tangentialebenen; wir bezeichnen mit X_i $(i = 1,2,3,4)$ die Berührungspunkte der 4 durch g_ξ gehenden, mit Y_i, Z_i resp. die Berührungspunkte der 4 durch g_η, g_ζ gehenden Tangentialebenen. Dann bilden irgend 3 Punkte X_i, Y_k, Z_l $(i, k, l = 1, 2, 3, 4)$ ein Tripel einer der 4 fundamentalen Tripelinvolutionen; denn die reducible Fläche III. O., welche aus den 3 Ebenen $(g_\xi X_i)$, $(g_\eta Y_k)$, $(g_\zeta Z_l)$ besteht, enthält die 3 Geraden g_ξ, g_η, g_ζ, ist mithin eine zu R_6^1 adjungirte F_3 und schneidet also (cf. Art. 2) die R_6^1 in 6 associirten Punkten; diese vereinigen sich paarweise in den 3 Punkten X_i, Y_k, Z_l und bilden daher ein Tripel einer der 4 fundamentalen Tripelinvolutionen (cf. Art. 6). Mithin enthält die R_3 durch X_i, Y_k, Z_l, welche g_ξ, g_η, g_ζ zu Secanten hat, und die wir mit $[X_i, Y_k, Z_l]$ bezeichnen, einen der 4 Hauptpunkte S_1, S_2, S_3, S_4. Also gilt: *Sind X_i, Y_k, Z_l $(i = 1, 2, 3, 4)$ die Berührungspunkte der 4 von resp. g_ξ, g_η, g_ζ ausgehenden Tangentialebenen, so enthält jede der 64 Raumcurven III. O. $[X_i, Y_k, Z_l]$ $(i,k,l=1,2,3,4)$ einen der 4 Hauptpunkte.* Und ganz analog ergiebt sich: *Ist X_i einer der Berührungspunkte der 4 von g_ξ an R_6^1 gehenden Tangentialebenen und ebenso Y_k einer der Berührungspunkte der 4 von g_η an R_6^1 gehenden Tangentialebenen, dann sind die 4 Punkte Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, welche $X_i Y_k$ zu je einem Tripel der 4 fundamentalen Tripelinvolutionen ergänzen, die Berührungspunkte der 4 von g_ζ an die R_6^1 gehenden Tangentialebenen.* Und aus den Art. 6 abgeleiteten Eigenschaften der Tripel von $J_3^{(i)}$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ ergiebt sich: *Sind X, Y die Berührungspunkte zweier von resp. g_ξ, g_η an die R_6^1 gehenden Tangentialebenen, und S_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ die 4 Hauptpunkte, so schneiden die 4 R_3: $[XYS_i]$ die R_6^1 in den 4 Berührungspunkten Z_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ der von g_ζ aus-*

gehenden Tangentialebenen. Oder: *Sind* $g_{23}^{(i)}$, $g_{31}^{(i)}$, $g_{12}^{(i)}$ *die* 3 *durch den Hauptpunkt* S_i *gehenden Trisecanten, und* X, Y *die Berührungspunkte zweier resp. von* g_ξ, g_η *an die* $R_6{}^1$ *gehenden Tangentialebenen, so schneiden die* 4 *Kegel, welche* $g_{23}^{(i)}$, $g_{31}^{(i)}$, $g_{12}^{(i)}$, $\overline{S_i X}$, $\overline{S_i Y}$ $(i=1, 2, 3, 4)$ *zu Erzeugenden haben, die* $R_6{}^1$ *in den* 4 *Punkten, in welchen die* 4 *Tangentialebenen aus* g_ζ *die* $R_6{}^1$ *berühren.* Es ergeben sich also für die 3 Quadrupel der Berührungspunkte der 4 Tangentialebenen aus g_ξ, g_η, g_ζ ganz analoge Sätze, wie für die Berührungspunkte der 4 Tangentenquadrupel, welche aus drei in gerader Linie liegenden Punkten an die C_3 gehen.

8) Die 36 Sextupelpunkte von $R_6{}^1$. Wie in jeder J_3 auf $R_6{}^1$, existiren auch in den 4 fundamentalen Tripelinvolutionen $J_3{}^{(i)}$ $(i=1,2,3,4)$ je 9 Tripel, deren 3 Punkte zusammenfallen (cf. Art. 3, 5); wir bezeichnen diese 9 dreifachen Punkte von $J_3{}^{(i)}$ durch

$$T_k{}^{(i)} \, (k=1, 2, 3, \ldots, 9;\ i=1, 2, 3, 4).$$

Da jedes Tripel von $J_3{}^{(i)}$ ein associirtes System repräsentirt, bei welchem die 6 Elemente paarweise in den 3 Punkten des Tripels sich vereinigen, so wird jeder Punkt $T_k{}^{(i)}$, in welchem sich noch sogar die 3 Punkte eines Tripels vereinigt haben, ein associirtes System repräsentiren, dessen sämmtliche 6 Punkte in $T_k{}^{(i)}$ zusammenfallen, so dass uns jeder der 36 Punkte $T_k{}^{(i)}$ ein Sextupel associirter Punkte repräsentirt; es gilt somit: *Es existiren auf* $R_6{}^1$ 36 *Punkte, welche ein associirtes System repräsentiren, dessen sämmtliche* 6 *Elemente in diesem einen Punkte vereinigt sind; es sind dies die* 3-*fachen Punkte der* 4 *sich selbst residualen Tripelinvolutionen von* $R_6{}^1$. Diese 36 Punkte nennen wir „die Sextupelpunkte“ der $R_6{}^1$; dieselben ordnen sich in 4 Gruppen zu je 9 Punkten, wenn wir diejenigen 9 Punkte $T_k{}^{(i)}$ $(i=1, 2, \ldots, 9)$ in eine Gruppe vereinigen, welche die dreifachen Elemente *derselben* fundamentalen Tripelinvolution sind, (also denselben oberen Index haben). In der (Art. 2) betrachteten Abbildung der die $R_6{}^1$ enthaltenden singulären Fläche III. O. $F_3{}^{(1)}$ auf die Ebene E, bei welcher der $R_6{}^1$ eine C_3 in E, den auf $R_6{}^1$ befindlichen associirten Systemen die conischen Sextupel von C_3 entsprechen, werden mithin den 36 Sextupelpunkten $T_k{}^{(i)}$ diejenigen Punkte entsprechen, in welchen ein Kegelschnitt die C_3 sechspunktig berührt; es existiren bekanntlich 27 eigentliche die C_3 sechspunktig berührende Kegelschnitte*), dazu treten noch die 9 Wendetangenten, welche als doppelt zählende Gerade aufgefasst, reducible Kegelschnitte repräsentiren, welche C_3 6-punktig berühren. Es werden somit die 9 Wendepunkte, sowie die 27 Punkte, in welchen Kegelschnitte die C_3 6-punktig berühren, die Bilder der 36 Sextupelpunkte $T_k{}^{(i)}$ auf $R_6{}^1$ sein; und zwar werden diejenigen 9

*) cf. Schröter: Theorie der ebenen Curven III. O., Leipzig 1886, p. 274.

Sextupelpunkte, welche die dreifachen Punkte von $J_3^{(1)}$ sind, in die 9 Wendepunkte von C_3 abgebildet; genau ebenso kann man aber auch jede der 3 andern Gruppen von je 9 Sextupelpunkten auf die Wendepunkte einer C_3 beziehen; dazu ist nur die Abbildung mittels der Fläche $F_3^{(2)}$ oder $F_3^{(3)}$ oder $F_3^{(4)}$ anstatt mit $F_3^{(1)}$ vorzunehmen. Daraus ergiebt sich, dass die Eigenschaften von 9 Sextupelpunkten, welche derselben Gruppe angehören, den Eigenschaften der Wendepunkte einer C_3 entsprechen, während die Eigenschaften der Gesammtheit der 36 Sextupelpunkte sich auf die Eigenschaften desjenigen Punktsystems auf C_3 zurückführen lassen, das gebildet wird von den 9 Wendepunkten und den 27 Punkten, in welchen Kegelschnitte 6-punktig berühren, d. h. auf das System derjenigen 36 Punkte auf C_3, für welche der erste Tangentialpunkt mit dem zweiten (und also auch mit allen weiteren) zusammenfällt. Aus bekannten oder leicht beweisbaren Eigenschaften dieses Punktsystems von C_3 ergeben sich mithin für die 36 Sextupelpunkte von R_6^1 folgende bemerkenswerthe Sätze: *Die 3 Punkte, welche einen Sextupelpunkt zu einem Quadrupel ergänzen, sind ebenfalls Sextupelpunkte, und es gehören die 4 Punkte dieses Quadrupels verschiedenen Gruppen an. Die 36 Sextupelpunkte bilden somit 9 Quadrupel derart, dass die 4 Punkte desselben Quadrupels aus jeder der 4 Gruppen je einen Punkt enthalten.* — Bezeichnen wir die Gruppe von 9 Sextupelpunkten, welche zu der Tripelinvolution $J_3^{(i)}$, resp. dem Hauptpunkt S_i gehört, als „*Gruppe G_i*“, und ebenso das Kegelnetz, welches die 3 durch S_i gehenden Trisecanten zu gemeinsamen Erzeugenden hat, als „*Netz N_i*“ ($i = 1, 2, 3, 4$) so gilt: *Derjenige Punkt, welcher 2 Sextupelpunkte derselben Gruppe G_i zu einem Tripel der zugehörigen Tripelinvolution $J_3^{(i)}$ ergänzt, ist wieder ein Sextupelpunkt der Gruppe G_i.* Oder: *Der Kegel des Netzes N_i, welcher 2 Sextupelpunkte der Gruppe G_i verbindet, trifft die R_6^1 noch in einem Sextupelpunkt der Gruppe G_i.* — *Die 4 Punkte, welche 2 beliebige Sextupelpunkte zu einem Tripel einer der 4 fundamentalen Tripelinvolutionen ergänzen, sind wiederum Sextupelpunkte.* Oder: *Die 4 Kegel der Netze N_i ($i = 1, 2, 3, 4$), welche man durch 2 Sextupelpunkte legen kann, schneiden die R_6^1 in 4 weiteren Sextupelpunkten, welche ein Quadrupel bilden. — Derjenige Punkt, welcher 5 Sextupelpunkte zu einem associirten System ergänzt, ist wieder ein Sextupelpunkt. — Sucht man zu einem Sextupelpunkt $T_k^{(i)}$ diejenigen 9 Punkte, von denen jeder $T_k^{(i)}$ zu einem associirten System ergänzt, bei welchem zweimal sich je 3 Elemente in einem Punkte vereinigen, so erhält man die 9 Sextupelpunkte derjenigen Gruppe, der auch $T_k^{(i)}$ angehört.* —

§ 4.

Die Tritangentialebenen der R_6^1 und die vier Steiner'schen Flächen, welche R_6^1 enthalten.

1) Wir haben § 3 Art. 2) bewiesen: *Die 6 Punkte, in welchen eine Ebene die R_6^1 schneidet, bilden ein associirtes System.* Sind nun $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$ die Schnittpunkte einer Ebene ε mit R_6^1 (ein ebenes Sextupel), so ergänzen die 3 Punkte P_4, P_5, P_6 das Tripel P_1, P_2, P_3 zu einem associirten System, sie bilden also (cf. § 3. Art. 5) ein Tripel derjenigen Tripelinvolution, welche zu der durch das Tripel $P_1 P_2 P_3$ bestimmten Tripelinvolution *residual* ist, und es ist diese letztere Tripelinvolution durch das Tripel $P_4 P_5 P_6$ *eindeutig* bestimmt (cf. § 3. 3); also ergiebt sich: *Sind P_1, P_2, P_3 3 beliebige Punkte von R_6^1, so schneidet die Ebene $(P_1 P_2 P_3)$ die R_6^1 in 3 weiteren Punkten P_4, P_5, P_6, welche ein Tripel derjenigen Tripelinvolution bilden, welche zu der durch das Tripel $P_1 P_2 P_3$ bestimmten Tripelinvolution residual ist.* Oder: *Bilden $P_1, P_2, \ldots, P_6$ ein ebenes Sextupel von R_6^1, so sind die beiden J_3, welche durch $P_1 P_2 P_3$, resp. $P_4 P_5 P_6$ bestimmt sind, zu einander residual. — Die Ebenen durch sämmtliche Punktetripel von R_6^1, welche derselben J_3 angehören, schneiden R_6^1 in ∞^2 weiteren Punktetripeln, welche die zu J_3 residuale Tripelinvolution bilden.* — Im Besonderen gilt für jede der 4 sich selbst residualen Tripelinvolutionen $J_3^{(i)}$ $(i = 1, 2, 3, 4)$: *Die Ebenen durch die Tripel von $J_3^{(i)}$ schneiden die R_6^1 noch in Punktetripeln, welche ebenfalls $J_3^{(i)}$ angehören.*

2) Eine Ebene ε, für welche die 6 Schnittpunkte mit R_6^1 dreimal paarweise zusammenfallen, die also R_6^1 in drei verschiedenen Punkten berührt, soll eine *dreifache Tangentialebene* oder *Tritangentialebene von R_6^1* genannt werden. Da 3 Bedingungen von einer Ebene zu erfüllen sind, damit dieselbe zur Tritangentialebene werde, so wird bei Raumcurven vom 6^{ten} und höheren Grade eine *endliche Anzahl von Tritangentialebenen* existiren; dieselben bilden das Analogon zu den Doppeltangenten ebener Curven. Für die Raumcurven 6^{ter} Ordnung wird also das Problem der Tritangentialebenen zum ersten Male actuell; für die von uns betrachteten *elliptischen* Raumcurven 6^{ter} O. soll dasselbe im folgenden seine Lösung finden. Damit eine Ebene ε die R_6^1 in 3 Punkten berühre, ist nothwendig und hinreichend, dass das zweite Tripel, welches die Ebene $\varepsilon = (P_1 P_2 P_3)$ aus R_6^1 ausschneidet, mit dem Tripel $P_1 P_2 P_3$ zusammenfalle; da aber (Art. 1) das zweite Punktetripel, welches die Ebene durch 3 Punkte P_1, P_2, P_3 der Curve aus derselben ausschneidet, derjenigen J_3 angehört, welche residual ist zu der durch das Tripel $P_1 P_2 P_3$ bestimmten J_3, so muss, im Falle die Ebene $(P_1 P_2 P_3)$ eine Tritangentialebene ist, das Tripel $P_1 P_2 P_3$

sowohl der durch $P_1 P_2 P_3$ bestimmten J_3, als auch der zu ihr residualen J_3 angehören; also muss, da durch das Tripel $P_1 P_2 P_3$ eine und nur eine J_3 bestimmt ist (cf. § 3. 3), diese *sich selbst residual* sein. Falls also die Ebene durch P_1, P_2, P_3 die R_6^1 in diesen 3 Punkten berühren soll, so muss $P_1 P_2 P_3$ ein Tripel einer sich selbst residualen J_3 sein. Wir wissen (cf. § 3. 6), dass auf R_6^1 vier sich selbst residuale Tripelinvolutionen $J_3^{(1)}$, $J_3^{(2)}$, $J_3^{(3)}$, $J_3^{(4)}$ existiren; die Berührungspunkte einer Tritangentialebene müssen also jedenfalls ein Tripel einer dieser 4 fundamentalen J_3 bilden; also ergiebt sich: *Die 3 Berührungspunkte einer jeden Tritangentialebene von R_6^1 bilden ein Tripel einer der 4 auf R_6^1 existirenden sich selbst residualen Tripelinvolutionen.*

3) Wir sahen (Art. 1), dass die Ebenen η, welche durch die Tripel einer der 4 fundamentalen Tripelinvolutionen — etwa $J_3^{(1)}$ — bestimmt sind, R_6^1 noch in ∞^2 weiteren Tripeln schnitten, die ebenfalls $J_3^{(1)}$ angehören. Demnach wird zwischen den Tripeln von $J_3^{(1)}$ eine bestimmte Zuordnung festgesetzt, indem jedem Tripel $P_1 P_2 P_3$ von $J_3^{(1)}$ dasjenige andere Tripel von $J_3^{(1)}$ zugeordnet ist, welches die Ebene $P_1 P_2 P_3$ ausserdem noch aus R_6^1 ausschneidet; somit haben wir die Tripel von $J_3^{(1)}$ so auf einander bezogen, dass 2 Tripel, welche in derselben Ebene liegen einander entsprechen; diese Correspondenz der Tripel von $J_3^{(1)}$ ist eine umkehrbar-eindeutige und offenbar *involutorische*, sie sei durch Σ bezeichnet. Die Eindeutigkeit der Beziehung wird allein unterbrochen für solche Tripel von $J_3^{(1)}$, deren 3 Punkte in gerader Linie, also auf einer Trisecante liegen; wir wissen (cf. § 3. 6), dass es 3 derartige Tripel giebt, welche von den 3 durch den Hauptpunkt S_1 gehenden Trisecanten $g_{23}^{(1)}$, $g_{31}^{(1)}$, $g_{12}^{(1)}$ aus R_6^1 ausgeschnitten werden. Ist $Q_1 Q_2 Q_3$ ein solches gerades Tripel, so entsprechen diesem in unserer Zuordnung Σ alle ∞^1 Tripel, welche die Ebenen des Ebenenbüschels, welches $\overline{Q_1 Q_2 Q_3}$ zur Axe hat, aus R_6^1 ausschneiden. Diese 3 auf den 3 Trisecanten $g_{23}^{(1)}$, $g_{31}^{(1)}$, $g_{12}^{(1)}$ gelegenen Tripel von $J_3^{(1)}$ sind demnach für die Correspondenz Σ Ausnahmselemente, und offenbar die einzigen. Die Frage nach den Tritangentialebenen lässt sich nunmehr folgendermassen formuliren: *Die Ebene durch 3 Punkte eines Tripels von $J_3^{(i)}$ ($i = 1, 2, 3, 4$) ist dann und nur dann eine Tritangentialebene, wenn dieses Tripel in der Correspondenz Σ sich selbst entspricht.* Es kommt demnach die Auffindung der Tritangentialebenen zurück auf die Auffindung der Doppelelemente der Correspondenz Σ. Gleichzeitig erkennen wir von vornherein, dass, da für jede der 4 fundamentalen Tripelinvolutionen eine solche Correspondenz besteht, jedenfalls die Tritangentialebenen in 4 Gruppen — entsprechend den 4 sich selbst residualen Tripelinvolutionen — zerfallen, dass also ihre Anzahl ein Vielfaches von 4 sein wird, etwa $4 \,.\, x$, wo x die Anzahl der Doppelelemente der Correspondenz Σ bedeutet. Wir brauchen uns somit nur mit *einer* der 4 fundamentalen Tripelinvolu-

tionen — etwa mit $J_3^{(1)}$ — zu beschäftigen, und die Doppelelemente der zugehörigen Correspondenz Σ aufzusuchen; auf die 3 übrigen fundamentalen J_3 lässt sich dann das Gefundene direct übertragen. — Wir kehren nunmehr zurück zu der § 3. 2) betrachteten Abbildung der singulären Fläche III. O. $F_3^{(1)}$, welche S_1 zum Doppelpunkt hat und die R_6^1 enthält; jedem Punkt von $F_3^{(1)}$ entsprach in dieser Abbildung ein Punkt der Bildebene E, der R_6^1 entsprach eine ebene Curve III. O. C_3, und allen R_3 auf $F_3^{(1)}$, welche g_ξ, g_η, g_ζ zu Secanten haben, entsprechen die sämmtlichen Geraden von E; den Ebenentripeln, welche die Punkte von $F_3^{(1)}$ mit g_ξ, g_η, g_ζ verbinden, entsprechen Strahlentripel in E, deren 3 Strahlen sich in demselben Punkte der Ebene E trafen, und die resp. 3 Strahlenbüscheln angehören, deren Scheitel S_ξ, S_η, S_ζ in gerader Linie liegen. Die 3 Geraden g_1, g_2, g_3 von $F_3^{(1)}$, welche mit g_ξ, g_η, g_ζ auf demselben Hyperboloid liegen (cf. T. V. § 4. 2), werden in 3 nicht in einer Geraden gelegene Punkte $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \mathfrak{G}_3$ abgebildet; die 3 Geraden $g_{23}^{(1)}, g_{31}^{(1)}, g_{12}^{(1)}$ auf $F_3^{(1)}$ durch S_1, welche zu g_ξ, g_η, g_ζ windschief sind (cf. T. V. § 4. 2), und welche resp. g_2, g_3; g_3, g_1; g_1, g_2 schneiden*), werden abgebildet in die 3 Geraden $\overline{\mathfrak{G}_2\mathfrak{G}_3} = \mathfrak{G}_{23}$, $\overline{\mathfrak{G}_3\mathfrak{G}_1} = \mathfrak{G}_{31}$, $\overline{\mathfrak{G}_1\mathfrak{G}_2} = \mathfrak{G}_{12}$. Drei Punkte von R_6^1, welche ein Tripel von $J_3^{(1)}$ bilden, werden abgebildet in 3 Punkte von C_3 *in derselben Geraden* (cf. § 3. 6), so dass den Tripeln von $J_3^{(1)}$ in der Abbildung *die geraden Tripel von* C_3 entsprechen; demnach ist jedem Tripel von $J_3^{(1)}$ eine Gerade in E, die Verbindungslinie der 3 Bildpunkte, zugeordnet, und umgekehrt entspricht jeder Geraden g der Ebene E ein Tripel von $J_3^{(1)}$ auf R_6^1, nämlich dasjenige, welches gebildet wird von den 3 Punkten, welche auf R_6^1 den Schnittpunkten von g und C_3 entsprechen. Den 3 Tripeln von R_6^1, welche in gerader Linie liegen — nämlich in den 3 durch S_1 gehenden Trisecanten $g_{23}^{(1)}, g_{31}^{(1)}, g_{12}^{(1)}$ — entsprechen die 3 Tripel, welche von den 3 Geraden $\mathfrak{G}_{23} = \overline{\mathfrak{G}_2\mathfrak{G}_3}$, $\mathfrak{G}_{31} = \overline{\mathfrak{G}_3\mathfrak{G}_1}$, $\mathfrak{G}_{12} = \overline{\mathfrak{G}_1\mathfrak{G}_2}$ aus C_3 ausgeschnitten werden, da $\mathfrak{G}_{23}$, $\mathfrak{G}_{31}$, $\mathfrak{G}_{12}$ die Bilder dieser 3 Trisecanten waren. Den Tripeln von $J_3^{(1)}$, welche die Ebenen durch $g_{23}^{(1)}$ aus R_6^1 ausschneiden, entsprechen in E die Tripel, welche die Strahlen durch $\mathfrak{G}_1$ aus C_3 ausschneiden, denn diese Strahlen sind die Bilder der Kegelschnitte auf $F_3^{(1)}$, welche $g_{23}^{(1)}$ zu einem ebenen Schnitte von $F_3^{(1)}$ ergänzen. Je 2 Tripeln von $J_3^{(1)}$, welche in derselben Ebene liegen und also in der Correspondenz Σ einander entsprechen, sind in E 2 Gerade g, g' zugeordnet, so dass die Correspondenz Σ eine Correspondenz der Geraden der Ebene E zur Folge hat, die wir mit Σ_E bezeichnen, und in welcher

*) Es sind dies offenbar die 3 durch S_1 gehenden Trisecanten von R_6^1, die auch bisher schon durch $g_{23}^{(1)}, g_{31}^{(1)}, g_{12}^{(1)}$ bezeichnet waren.

2 Gerade g, g' einander entsprechen, deren zugeordnete Tripel auf R_6^1 in derselben Ebene liegen. Die Correspondenz Σ_E der Geraden g, g' ist, ebenso wie Σ, eine eindeutig-umkehrbare, *involutorische* Beziehung; ihre Doppelelemente führen uns unmittelbar zu den gesuchten Tritangentialebenen. Den Strahlen eines Strahlenbüschels in E werden in der Correspondenz Σ_E ∞^1 Strahlen entsprechen, welche eine Curve umhüllen, deren Classe uns *die Ordnung* unserer involutorischen, birationalen Beziehung Σ_E liefern wird. Um diese Ordnung zu bestimmen, betrachten wir diejenigen Geraden in E, für welche die Eindeutigkeit der Beziehung aufhört, die also *Ausnahmeelemente* der Correspondenz Σ_E sind, also diejenigen Geraden, welchen *mehr als eine* Gerade in Σ_E entspricht. Eine Gerade wird dann und nur dann eine solche Ausnahmsgerade sein, wenn ihr auf R_6^1 ein Tripel von $J_3^{(1)}$ zugeordnet ist, welches mit *mehr als einem anderen Tripel* in derselben Ebene liegt; es muss also, da in jeder Ebene nur 2 Tripel liegen, durch das betreffende Tripel mehr als eine Ebene gehen, d. h. die 3 Punkte dieses Tripels müssen in einer Geraden liegen; wir wissen, dass es 3 derartige Tripel von $J_3^{(1)}$ giebt, deren 3 Punkte in derselben Geraden liegen, nämlich diejenigen Tripel, in welchen die 3 durch S_1 gehenden Trisecanten $g_{23}^{(1)}$, $g_{31}^{(1)}$, $g_{12}^{(1)}$ die R_6^1 schneiden. Diesen 3 Tripeln entsprechen in Σ alle Tripel, welche resp. durch die Ebenen der 3 Ebenenbüschel, deren Axen $g_{23}^{(1)}$, $g_{31}^{(1)}$, $g_{12}^{(1)}$ sind, ausgeschnitten werden; es hört also für diese 3 Tripel von $J_3^{(1)}$ und nur für diese die Eindeutigkeit der Beziehung Σ auf, und es entsprechen jedem derselben in Bezug auf Σ ∞^1 Tripel von $J_3^{(1)}$. Analoges gilt demnach für die birationale, involutorische Beziehung Σ_E von denjenigen 3 Geraden $\mathfrak{G}_{23}$, $\mathfrak{G}_{31}$, $\mathfrak{G}_{12}$, welche die Bilder von resp. $g_{23}^{(1)}$, $g_{31}^{(1)}$, $g_{12}^{(1)}$ sind; denn das Tripel auf $g_{23}^{(2)}$ wird abgebildet durch das Tripel, welches $\mathfrak{G}_{23}$ aus C_3 ausschneidet; die Bilder der ∞^1 dem Tripel auf $g_{23}^{(2)}$ in Σ entsprechenden Tripel liegen also auf Geraden, welche *sämmtlich* der Geraden $\mathfrak{G}_{23}$ in Bezug auf Σ_E entsprechen, und welche, wie oben bemerkt, sämmtlich durch $\mathfrak{G}_1$ gehen. Mithin sind die Geraden $\mathfrak{G}_{23}$, $\mathfrak{G}_{31}$, $\mathfrak{G}_{12}$ — *und nur diese* — Ausnahmegerade der Verwandtschaft Σ_E; jeder derselben entsprechen in Bezug auf Σ_E die unendlich vielen Geraden eines Strahlenbüschels, und zwar entsprechen der Geraden $\mathfrak{G}_{23}$ alle Strahlen durch $\mathfrak{G}_1$, den Geraden $\mathfrak{G}_{31}$, $\mathfrak{G}_{12}$ resp. die Strahlen durch $\mathfrak{G}_2$, $\mathfrak{G}_3$; allen übrigen Geraden der Ebene E entspricht eine und nur eine Gerade in Bezug auf Σ_E. Fassen wir nun die Strahlen eines beliebigen Strahlenbüschels in E ins Auge, so umhüllen die in Bezug auf Σ_E ihnen entsprechenden Strahlen eine Classencurve *vom Geschlecht Null ohne Doppelstrahlen,* da zwei verschiedenen Strahlen des Büschels offenbar nie derselbe Strahl entsprechen kann, also von der Classe 1

oder 2; den 3 Strahlen, welche das Strahlenbüschel durch $\mathfrak{G}_1$, $\mathfrak{G}_2$, $\mathfrak{G}_3$ schickt, entsprechen die Strahlen $\mathfrak{G}_{23}$, $\mathfrak{G}_{31}$, $\mathfrak{G}_{12}$, die Seiten des Dreiecks $\mathfrak{G}_1\mathfrak{G}_2\mathfrak{G}_3$, welche nicht durch denselben Punkt gehen; also ist die einem beliebigen Strahlenbüschel in Σ_E entsprechende Classencurve von der *zweiten* Classe, mithin ist die Verwandtschaft Σ_E eine *quadratische*, involutorische Verwandtschaft, eine sogenannte *Steiner'sche Verwandtschaft**), und es bilden die Paare entsprechender Geraden conjugirte Strahlenpaare einer Kegelschnittschaar**). In einer Steiner'schen Verwandtschaft giebt es nun 4 *Doppelelemente*, also existiren in der Ebene E *vier Gerade* a, b, c, d, welche in Bezug auf Σ_E sich selbst entsprechen, es sind dies die 4 gemeinsamen Tangenten der Kegelschnittschaar, von der die in Σ_E sich entsprechenden Geradenpaare conjugirte Paare sind, das von ihnen gebildete Vierseit hat das Dreieck $\mathfrak{G}_1\mathfrak{G}_2\mathfrak{G}_3$ zum Diagonaldreieck. Diese 4 Geraden schneiden die C_3 in 4 geraden Tripeln $a_1 a_2 a_3$, $b_1 b_2 b_3$, . . ., welche die Bilder von 4 Tripeln $A_1 A_2 A_3$, $B_1 B_2 B_3$, . . . auf $R_6{}^1$ sind, deren Ebenen zu den gewünschten Tritangentialebenen gehören. Denn betrachten wir eines dieser Tripel $A_1 A_2 A_3$, so fallen die 3 weiteren Schnittpunkte der Ebene $\alpha = (A_1 A_2 A_3)$ mit A_1, A_2, A_3 zusammen, denn diese letzteren haben in E zu Bildern die Punkte, in welchen die der Geraden a entsprechende Gerade die C_3 schneidet, also, da diese Gerade sich selbst entspricht, die ursprünglichen Punkte a_1, a_2, a_3, so dass offenbar die Ebene $\alpha = (A_1 A_2 A_3)$ die $R_6{}^1$ in A_1, A_2, A_3 berührt, also eine Tritangentialebene ist. Dasselbe gilt von den analogen Ebenen $\beta = (B_1 B_2 B_3)$, $\gamma = (C_1 C_2 C_3)$, $\delta = (D_1 D_2 D_3)$, welche die Punkte verbinden, deren Bilder die geraden Tripel sind, welche resp. b, c, d aus C_3 ausschneiden. Somit gilt: Es existiren in $J_3{}^{(1)}$ 4 Tripel A_i, B_i, C_i, D_i $(i = 1, 2, 3)$, deren Ebene eine Tangentialebene ist; dasselbe gilt für die 3 übrigen fundamentalen Tripelinvolutionen $J_3{}^{(2)}$, $J_3{}^{(3)}$, $J_3{}^{(4)}$; andere Tritangentialebenen aber kann es nach Art. 2) nicht geben, also ergiebt sich: *Für jede $R_6{}^1$ existiren* 4 *Tetraeder, deren Seitenflächen die $R_6{}^1$ in* 3 *Punkten berühren; jedes dieser Tetraeder ist einer der* 4 *fundamentalen Tripelinvolutionen* $J_3{}^{(i)}$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ *zugeordnet, derart dass jede Ebene des betreffenden Tetraeders die $R_6{}^1$ in einem Tripel der zugeordneten $J_3{}^{(i)}$ berührt. Jede $R_6{}^1$ besitzt somit* 16 *Tritangentialebenen, die in* 4 *Gruppen zu je vieren sich ordnen.*

4) Wir betrachten wieder die in 3) vorgenommene Abbildung von $F_3{}^{(1)}$ auf die Ebene E, bei welcher die $R_6{}^1$ in die ebene Curve III. O. C_3, die Tripel von $J_3{}^{(1)}$ in die geraden Tripel von C_3 abgebildet wurden.

---

*) cf. Steiner: Systematische Entwicklung etc. Berlin 1832, pag. 254 ff.; Durège: Curven III. O. pag. 121.

**) cf. Schröter-Steiner: Vorlesungen über synthetische Geometrie, p. 312 ff.

Je 6 Punkte von R_6^1, welche ein associirtes System bilden, werden in ein conisches Sextupel von C_3 abgebildet (cf. § 3. 2). Die Sextupel, welche die Ebenen des Raumes aus R_6^1 ausschneiden, bilden ein associirtes System (cf. § 3. 2), ihre Bilder sind demnach conische Sextupel von C_3; somit ist jeder Ebene η des Raumes ein Kegelschnitt K_η der Ebene E zugeordnet, nämlich derjenige, welcher des Punktsextupel von C_3 enthält, welches das Bild des von η aus R_6^1 ausgeschnittenen Sextupels ist. Die den Ebenen η in dieser Weise entsprechenden Kegelschnitte K_η bilden ein System III^{ter} Stufe, und es sind die Ebenen η des Raumes auf die Kegelschnitte K_η dieses Systems umkehrbar eindeutig bezogen. Den Ebenen durch den Doppelpunkt S_1 von $F_3^{(1)}$ entsprechen in dieser Zuordnung die sämmtlichen Kegelschnitte, welche durch die 3 Punkte $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_2$, $\mathfrak{S}_3$ hindurchgehen, da diese Kegelschnitte in unserer Abbildung, wie man leicht erkennt, den ebenen Schnitten von $F_3^{(1)}$, die den Doppelpunkt S_1 enthalten, entsprechen. Den Ebenen, welche aus R_6^1 zwei Tripel von $J_3^{(1)}$ ausschneiden — und nur diesen — entsprechen Kegelschnitte K_η, welche in ein *Linienpaar* ausarten, da jedem Tripel von $J_3^{(1)}$ ein gerades Tripel von C_3 entspricht; alle diese Linienpaare bilden (cf. Art. 3) entsprechende Geradenpaare einer Steiner'schen Verwandtschaft Σ_E. Daraus ergiebt sich, dass die in Linienpaare ausartenden Kegelschnitte des von den K_η gebildeten Systems 3^{ter} Stufe sämmtlich conjugirte Geradenpaare in Bezug auf eine Kegelschnittschaar sind, dass im Besonderen in unserem Kegelschnittsystem 4 in eine Doppelgerade ausgeartete Individuen vorhanden sind, so dass wir vermuthen dürfen, dass das System der Kegelschnitte K_η ein *lineares* System 3^{ter} Stufe, ein *Kegelschnittgebüsche* (viergliedrige Gruppe) sein dürfte. In der That ergiebt sich dies mit Bestimmtheit daraus, dass durch 3 *beliebige* Punkte P, Q, R von C_3 genau *ein* Kegelschnitt des Systems geht; denn sind P', Q', R' diejenigen Punkte von R_6^1, deren Bilder in E die Punkte P, Q, R sind, so wird jeder Kegelschnitt K_η des Systems durch P, Q, R einer Ebene η durch P', Q', R' entsprechen, und da *eine und nur eine* Ebene η durch P', Q', R' geht, so schickt das System der Kegelschnitte K_η auch genau einen Kegelschnitt durch P, Q, R, und da dieser Kegelschnitt offenbar, wenn P, Q, R beliebig gewählt sind, die C_3 nicht berührt, so ergiebt sich, dass das Kegelschnittsystem K_η *ein lineares System III^{ter} Stufe, ein Kegelschnittgebüsche* ist. Die Beziehung der Ebenen η des Raumes auf die Kegelschnitte K_η des Gebüsches ist nun *ausnahmslos* eine eindeutige und eindeutig umkehrbare, also ist diese Beziehung eine *projective* — sie sei mit Π bezeichnet — und es entspricht jedem Ebenenbüschel (und mithin jeder Geraden des Raumes, als Träger eines solchen) ein Kegelschnittbüschel, jedem Ebenenbündel (und mithin jedem Punkte

des Raumes, als Träger eines solchen) ein Kegelschnittnetz des Gebüsches*). Durch jeden Punkt $\mathfrak{P}$ der Ebene E geht ein Netz von Kegelschnitten K_η des Gebüsches, welchem, in Bezug auf die Beziehung Π, ein Ebenenbündel mit dem Scheitel P entspricht; alle diese Punkte P, welche den Punkten $\mathfrak{P}$ in dieser Art entsprechen, erfüllen bekanntlich eine Fläche IVter Ordnung, IIIter Classe $F_4^{(1)}$ mit einem dreifachen Punkt und drei durch ihn gehenden Doppelgeraden, die sogenannte *römische Fläche von Steiner***). Die Steiner'sche Fläche $F_4^{(1)}$ ist demnach ebenso, wie die cubische Fläche $F_3^{(1)}$ mit dem Doppelpunkt S_1, auf die Ebene E abgebildet, sodass nunmehr in der Ebene E zwei Abbildungen sich vorfinden, jeder Punkt von E ist sowohl Bildpunkt eines Punktes von $F_3^{(1)}$, wie eines Punktes von $F_4^{(1)}$. Der dreifache Punkt der Steiner'schen Fläche ist der Punkt S_1, welcher für die R_6^1 ein Hauptpunkt, für die $F_3^{(1)}$ ein Doppelpunkt war; in der That sahen wir oben, dass allen Ebenen durch E die Kegelschnitte des Netzes, welche $\mathfrak{S}_\xi$, $\mathfrak{S}_\eta$, $\mathfrak{S}_\zeta$ gemeinsam haben, entsprechen; diesen 3 Punkten $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_2$, $\mathfrak{S}_3$ entspricht demnach auf der Steiner'schen Fläche $F_4^{(1)}$ derselbe Punkt S_1, so dass S_1 dreifacher Punkt von $F_4^{(1)}$ ist. Jeder Curve in E entspricht eine Curve der Steiner'schen Fläche; im Besonderen ist die C_3 das Bild der R_6^1, denn den Ebenen durch den beliebigen Punkt P von R_6^1 entsprechen in E die Kegelschnitte durch den entsprechenden Punkt $\mathfrak{P}$ von C_3, also entspricht jedem Punkt $\mathfrak{P}$ von C_3 ein Punkt P von R_6^1; die R_6^1 ist demnach auf der Steiner'schen Fläche $F_{(4)}^{(1)}$ gelegen. Die drei Trisecanten $g_{23}^{(1)}$, $g_{31}^{(1)}$, $g_{12}^{(1)}$ durch S_1 haben somit mit $F_4^{(1)}$ ausser dem dreifachen Punkte S_1 noch 3 weitere Punkte gemein, sind also ganz auf der Fläche $F_4^{(1)}$ enthalten und da auf einer Steiner'schen Fläche nur 3 Gerade existiren, nämlich die 3 durch den dreifachen Punkt gehenden Doppelgeraden der Fläche***), so ergiebt sich, dass die 3 Doppelgeraden unserer Steiner-schen Fläche nichts anderes als die 3 durch den Hauptpunkt S_1 gehenden Trisecanten von R_6^1 sind. Jede Curve der Ebene E ist das Bild einer Curve auf $F_4^{(1)}$; insbesondere sind die Kegelschnitte K_η unseres Gebüsches die Bilder der ebenen Schnitte der $F_4^{(1)}$, und die in Linienpaare ausgearteten Kegelschnitte des Gebüsches die Bilder der Schnittcurven der $F_4^{(1)}$ mit ihren Tangentialebenen; es entsprechen somit die

*) Dies lässt sich übrigens auch genau ebenso zeigen, wie oben beim Nachweis, dass die K_η ein Gebüsche bilden.

**) cf. Reye: Geometrie der Lage IIter Ord., 2te Auflage, p. 240; Cremona: Rappresentatione della superficie di Steiner etc. sopra un piano, Rendiconti R. Instituto-Lombardo 1867. Clebsch: Cr. Journal Bd. 67; vergl. auch Sturm: Liniengeometrie Bd. II, p. 275.

***) cf. Sturm: Ueber die römische Fläche von Steiner, Math. Annalen Bd. III, p. 86.

Linienpaare unseres Gebüsches in der Zuordnung Π den Tangentialebenen der Steiner'schen Fläche; andererseits sahen wir oben, dass die den Linienpaaren des Gebüsches entsprechenden Ebenen aus der R_6^1 zwei Tripel der fundamentalen Tripelinvolution $J_3^{(1)}$ ausschnitten, so dass wir erkennen, *dass die Ebenen, welche durch ein Tripel von $J_3^{(1)}$ gelegt sind, und die, wie bewiesen, noch ein zweites derartiges Tripel enthalten, die Steiner'sche Fläche $F_4^{(1)}$ berühren.* — Da für die 3 übrigen fundamentalen Tripelinvolutionen das nämliche gilt, so können wir das Gefundene in folgenden Satz zusammenfassen: *Die Ebenen, welche die Tripel einer der 4 auf der R_6^1 befindlichen fundamentalen Tripelinvolutionen $J_3^{(i)}$ ($i = 1, 2, 3, 4$) verbinden, schneiden die R_6^1 noch in einem Tripel derselben $J_3^{(i)}$; sie umhüllen eine Steiner'sche Fläche $F_4^{(i)}$, deren dreifacher Punkt der Hauptpunkt S_i und deren 3 Doppelgeraden die 3 durch S_i gehenden Trisecanten von R_6^1 sind. Die R_6^1 ist also auf 4 Steiner'schen Flächen $F_4^{(i)}$ ($i = 1, 2, 3, 4$) gelegen, welche die 4 Hauptpunkte S_i zu dreifachen Punkten, die 3 durch S_i gehenden Trisecanten zu Doppelgeraden besitzen.* —

Wir betrachten eine Ebene w, welche 2 Tripel von $J_3^{(1)}$ aus R_6^1 ausschneidet, dieselbe ist nach dem Vorigen Tangentialebene von $F_4^{(1)}$ und schneidet als solche die $F_4^{(1)}$ in 2 Kegelschnitten K_w, K'_w*); die 6 Schnittpunkte von R_6^1 mit w liegen auf diesen beiden Kegelschnitten und zwar liegen die Punkte des einen Tripels auf K_w, die des andern auf K'_w, wie sich unmittelbar aus der Abbildung ergiebt. Die 3 Punkte, in welchen die Ebene w die drei dreifachen Geraden $g_{23}^{(1)}$, $g_{31}^{(1)}$, $g_{12}^{(1)}$ der Fläche $F_4^{(1)}$ schneidet, sind beiden Kegelschnitten gemeinsam, der vierte gemeinsame Punkt derselben ist der Berührungspunkt von w und der $F_4^{(1)}$; also gilt: *Die 3 Punkte eines Tripels von $J_3^{(1)}$ liegen mit den 3 Punkten, in welchen ihre Verbindungsebene die 3 Trisecanten durch S_1 schneidet, auf demselben Kegelschnitt;* und ebenso gilt umgekehrt: 3 *Punkte von R_6^1, deren Ebene die 3 Trisecanten durch S_1 in 3 Punkten schneidet, die mit den 3 ursprünglichen Punkten auf demselben Kegelschnitt liegen, bilden ein Tripel von $J_3^{(1)}$;* denn dieser Kegelschnitt liegt auf $F_4^{(1)}$, seine Ebene ist also Tangentialebene von $F_3^{(1)}$, und die 3 Punkte bilden demnach ein Tripel von $J_3^{(1)}$. Daraus folgt wiederum der früher (cf. § 3. 6) auf anderem Wege gefundene Satz: *Die Tripel von $J_3^{(1)}$ werden von den Kegeln, welche S_1 zur Spitze und die 3 Trisecanten aus S_1 zu Erzeugenden haben, ausgeschnitten.*

Jede Steiner'sche Fläche besitzt bekanntlich 4 Ebenen, welche die Fläche in allen Punkten eines Kegelschnitts berühren**), und welche Doppel(tangential)ebenen der Fläche sind, die beiden Kegelschnitte,

*) cf. Sturm l. c. p. 88.

**) cf. Sturm l. c. p. 88.

welche eine Tangentialebene aus $F_4^{(i)}$ ausschneidet, sind hier in einen einzigen vereinigt; jede Curve der Fläche wird nothwendig von diesen 4 Doppelebenen dort berührt, wo sie den in ihnen befindlichen Kegelschnitten begegnet; also werden die Schnittpunkte von R_6^1 mit jeder dieser Doppelebenen paarweise zusammenfallen, und mithin diese 4 Doppelebenen die R_6^1 dreifach berühren, was übrigens unmittelbar aus der Abbildung hervorgeht; also ergiebt sich: *Die 4 Tetraeder der Tritangentialebenen von R_6^1 sind nichts anderes als die 4 Tetraeder der Doppelebenen der 4 die R_6^1 enthaltenden Steiner'schen Flächen.* Nunmehr lassen sich aus allen Eigenschaften der 4 Doppelebenen von $F_4^{(i)}$ Eigenschaften der 4 Tetraeder der Tritangentialebenen von R_6^1 herleiten. Zuvörderst ergiebt sich aus der bekannten Thatsache*), dass jede der 3 Doppelgeraden einer Steiner'schen Fläche zwei Gegenkanten des Tetraeders der 4 Doppelebenen begegnet, der Satz: *Die 3 Trisecanten durch einen Hauptpunkt von R_6^1 sind die 3 Secanten, welche man von diesem Hauptpunkte durch die 3 Gegenkantenpaare des zugeordneten Tetraeders der Tritangentialebenen legen kann.* Sei α, β, γ, δ das Tetraeder der Doppelebenen der Steiner'schen Fläche $F_4^{(i)}$, dann berührt die Ebene α die $F_4^{(i)}$ längs eines Kegelschnittes K_α; derselbe enthält die 3 Punkte, in welche die 3 Doppelgeraden von $F_3^{(i)}$ die Ebene α treffen, und wird in diesen Punkten von den in α gelegenen Tetraederkanten $\gamma\delta$, $\delta\beta$, $\beta\gamma$ berührt**); ausserdem liegen auf K_α die 3 Punkte, in welchen α die R_6^1 berührt, da α Tritangentialebene von R_6^1 ist, also ergiebt sich: *Jede Tritangentialebene von R_6^1 schneidet die 3 Trisecanten aus dem zugehörigen Hauptpunkt in 3 Punkten, welche mit den 3 Berührungspunkten auf demselben Kegelschnitte liegen, die 3 Geraden, in welchen die 3 übrigen Tritangentialebenen desselben Tetraeders die erste schneiden, berühren diesen Kegelschnitt in den Schnittpunkten jener 3 Trisecanten.* Die 4 Kegelschnitte, welche die 4 Ebenen des Tetraeders der Doppelebenen aus der zugehörigen Steiner'schen Fläche ausschneiden, befinden sich auf derselben Fläche IIten Grades**), also gilt: *Die 4 . 3 Berührungspunkte der 4 Tritangentialebenen desselben Tetraeders liegen auf einer Fläche IIten Grades.* In derselben Weise ergiebt sich: *Die 3 Trisecanten aus einem Hauptpunkt und die 4 Ebenen des zugehörigen Tetraeders der Tritangentialebenen schneiden eine beliebige Ebene in resp. 3 Punkten und 4 Geraden, welche Doppelpunkte und Doppeltangenten einer und derselben Plancurve 4ter O. sind, der auch die 6 Schnittpunkte dieser Ebene mit R_6^1 angehören.*

Breslau, im Mai 1894.

*) cf. Sturm, l. c. p. 85.
**) cf. Sturm, l. c. p. 89.

Bemerkung zu der Abhandlung „On the theory of Riemanns Integrals" by H. F. Baker (Cambridge Engl.), Bd. 45, S. 118—132 der Mathematischen Annalen.

Von

K. Hensel in Berlin.

In der oben angegebenen Abhandlung macht Herr Baker gegen meine in Crelle's Journal Bd. 109 veröffentlichte Arbeit über die Theorie der algebraischen Functionen zwei Einwendungen; ich möchte in dieser Bemerkung kurz darlegen, dass beide der Begründung entbehren.

In Bezug auf den von Herrn Baker gewünschten Beweis, dass die Auflösung der n Gleichungen

$$u_1 a_{i1} + \cdots + u_n a_{in} = P\bar{u}_i \qquad (i = 1, 2, \ldots n)$$

stets zu ganzen Formen $u_1 \cdots u_n$ führt, wenn $\Delta = |a_{ik}|$ die Discriminante der betrachteten Gattung und P das Product aller verschiedenen Linearfactoren von Δ ist, genügt der Hinweis auf den von mir längst und mit den allereinfachsten Mitteln bewiesenen Satz, dass die Gattungsdiscriminante nur einfache Elementartheiler besitzt, dass also das System:

$$\left(P : \frac{\frac{\partial \Delta}{\partial a_{i\varkappa}}}{\Delta}\right)$$

lauter *ganze* Elemente hat. (Vgl. meine Arbeit Crelle's Journal Bd. 105, S. 336.) Eine weitere Bestimmung der Elemente *meines* Fundamentalsystemes, wie sie Herr Baker für nöthig hält, ist also vollständig überflüssig.

Ferner macht Herr Baker den Einwand, dass die von mir angegebenen Methoden bei der Bestimmung des Geschlechtes der Curve:

$$(1) \qquad s^3 + s^2(z, 1)_2 + s \cdot z(z, 1)_1 + Az^2 = 0$$

zu $p = 3$ führe, während das Geschlecht thatsächlich gleich Eins sei. Setzt man aber in dieser Gleichung:

$$s = \frac{z}{y},$$

so genügt y der ganzen algebraischen Gleichung:

$$y^3 + p_1(z)\,y^2 + p_2(z)\,y + z = 0,$$

wo $p_1(r)$ und $p_2(r)$ ganze Functionen des ersten und zweiten Grades von r sind. Macht man nun diese Gleichung in der von mir angegebenen Weise (Crelle Bd. 109, S. 8, Nr. 5) homogen durch die Substitution

$$y = \frac{\eta}{x_2^2}, \qquad z = \frac{x_1}{x_2}$$

und führt dann an Stelle von η die Grösse $\eta_1 = \frac{\eta}{x_2}$ ein, so genügt diese der homogenen Gleichung:

$$\eta_1^3 + \eta_1^2 p_1(x_1 x_2) + \eta_1 p_2(x_1 x_2) + x_1 x_2^2 = 0,$$

und da bei der Substitution $(x_1 = tx_1,\ x_2 = tx_2)$ η_1 in $t\eta_1$ übergeht, so ist η_1 eine homogene ganze algebraische Form von der Dimension Eins. Die Gesammtdimension der Basis $(1, \eta, \eta^2)$ ist also

$$N = 0 + 1 + 2 = 3$$

und das Geschlecht der durch die ursprüngliche Gleichung (1) definirten Curvenclasse ist also *höchstens*

$$p = N - n + 1 = 3 - 3 + 1 = 1.$$

Natürlich kann dasselbe auch kleiner als Eins werden, wenn p_1 und p_2 specielle homogene Formen der ersten und zweiten Dimension sind. Wie aber Herr Baker durch Anwendung meiner Methoden die *grössere* Zahl $p = 3$ erhalten will, ist mir völlig unverständlich.

Berlin, den 26. Juli 1894.

DI

[XX

Soeben erschien:

HANDBUCH

DER THEORIE

DER LINEAREN

DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

VON

PROFESSOR DR. LUDWIG SCHLESINGER,
PRIVATDOCENTEN AN DER UNIVERSITÄT ZU BERLIN.

IN ZWEI BÄNDEN.

ERSTER BAND.

[XX u. 488 S.] Ladenpreis: geh. 16 Mark.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1895.

Vorwort.

Das Handbuch, dessen erster Band hiermit in die Oeffentlichkeit tritt, sucht die älteren und neueren Untersuchungen auf dem Gebiete der Theorie der linearen Differentialgleichungen zu einem einheitlichen Lehrgebäude zusammenzufassen, um ein möglichst getreues und vollständiges Bild von dem gegenwärtigen Stande dieser Theorie liefern zu können.

Obwohl schon die Analysten des achtzehnten Jahrhunderts mit Vorliebe die Integration gewisser specieller linearer Differentialgleichungen geübt hatten, so ist doch die moderne Theorie dieser Differentialgleichungen erst auf den Grundlagen erwachsen, die ihr Herr Fuchs in seiner zuerst im Programm der Berliner Gewerbeschule vom Jahre 1865 veröffentlichten Abhandlung geschaffen hat.

Bei der Bearbeitung einer Disciplin, die so auf eine verhältnissmässig doch nur kurze Zeit der Entwickelung zurücksehen kann, glaubte der Verfasser der Darstellung nicht den beengenden Zwang einer starren Systematik auferlegen zu sollen, sondern dieselbe in der Form möglichst frei, und im Aufbau wesentlich der historischen Entwickelung folgend gestalten zu müssen. Dabei war er stets bemüht, Fragen, die noch ihrer Beantwortung harren, nicht aus dem Wege zu gehen, sondern auf dieselben hinzuweisen und sie nachdrücklich als offene zu bezeichnen.

Man könnte die Resultate der Forschungen über den zu behandelnden Gegenstand in zwei Kategorien sondern.

Die eine würde diejenigen Untersuchungen umfassen, die sich die Ausbildung von Methoden für die Integration einer vorgelegten linearen Differentialgleichung zum Ziele setzen, in dem Sinne natürlich, wie eben die moderne Wissenschaft das Problem der Integration einer Differentialgleichung zu fassen gelehrt hat. Dahin gehörten also die verschiedenartigen Formen der Darstellung von Integralen, sowohl die allgemein, als auch die nur in beschränkten Bereichen gültigen, und ebenso die Auffindung der wechselseitigen Beziehungen zwischen diesen Darstellungsformen.

In die andere Kategorie wären diejenigen Untersuchungen zu verweisen, die sich auf besondere lineare Differentialgleichungen beziehen, sei es nun, dass man für lineare Differentialgleichungen, deren Coefficienten specielle Eigenschaften haben, die Natur der Integrale zu ergründen sucht, oder dass es sich darum handelt, die Gestlat der

Coefficienten zu finden, wenn sich die Lösungen durch gewisse analytische Eigenschaften auszeichnen sollen. Hier wären z. B. die Untersuchungen über lineare Differentialgleichungen mit eindeutigen doppeltperiodischen Coefficienten einzureihen, ferner die Theorie derjenigen linearen Differentialgleichungen, die durch bestimmte Integrale, durch eindeutige, algebraische oder sonst irgendwie charakterisirte Functionen befriedigt werden u. s. w.

Eine scharfe Scheidung zwischen diesen beiden Kategorien ist natürlicherweise nicht möglich; im Grossen und Ganzen ist aber der vorliegende erste Band der ersten, der in Vorbereitung begriffene zweite Band der zweiten Kategorie von Untersuchungen gewidmet. Da bei den letzteren wesentlich Methoden in Betracht kommen, die der Theorie der Substitutionsgruppen angehören, so wird auch diese Theorie erst im zweiten Bande Platz finden.

Zur Erleichterung der Uebersicht ist das Werk in Abschnitte und sind diese wieder in Kapitel eingetheilt; im Uebrigen besteht es aus fortlaufend numerirten Artikeln, deren Inhalt immer durch eine kurze Ueberschrift angedeutet wird. Die Litteraturnachweise sind nicht in den Text eingefügt, sondern nach dem Vorbilde des Lacroix'schen „Traité du calcul différentiel et du calcul intégral“ mit dem Inhaltsverzeichnisse zu einem Nachschlageregister vereinigt worden. Man findet daselbst bei jeder Nummer zuerst, in der Aufeinanderfolge des Inhaltes, diejenigen Schriften genannt, in denen Sätze, Bezeichnungen, Gesichtspunkte, die in der betreffenden Nummer vorkommen, zum ersten Male in völlig präciser und bewusster Weise veröffentlicht sind. Hieran schliessen sich in chronologischer Reihenfolge die späteren Bearbeitungen derselben Gegenstände, soweit sie dem Verfasser als Quellen gedient haben und endlich folgen unter dem Schlagworte „vergl.“ Verweisungen, theils auf Darstellungen bei anderen Autoren (insbesondere ist bei Gegenständen, die auch in der vor kurzem erschienenen „Einleitung in die Theorie der linearen Differentialgleichungen“ von Lothar Heffter behandelt sind, fast immer auf die betreffende Stelle dieses Werkes hingedeutet worden), theils auf ältere Schriften, in denen verwandte Gegenstände oft unter anderen Gesichtspunkten, oft auch in nicht ganz genauer Fassung behandelt oder berührt sind. Diejenigen in der historischen Einleitung erwähnten Schriften, deren Inhalt in späteren Nummern ausführlich dargestellt wird, finden sich erst bei den betreffenden Nummern angegeben. Im Texte selbst werden nur diejenigen Arbeiten genau citirt, in denen der Leser die ausführliche Darlegung einer vom Verfasser nur angedeuteten Deduction zu suchen hat. Vom Verfasser selbstständig geführte und

anderweitig noch nicht veröffentlichte Untersuchungen sind als solche nicht besonders gekennzeichnet worden.

Der Verfasser war bemüht die Darstellung so zu geben, dass ein mit den Grundzügen der Functionenlehre vertrauter Leser derselben wohl ohne Schwierigkeit wird folgen können. Die vielfach erforderlichen Hülfsmittel aus der Determinantentheorie und Algebra wurden, soweit dieselben in den gewöhnlichen Lehrbüchern entweder garnicht, oder nicht unmittelbar in der Fassung, wie sie hier zur Verwendung gelangen, enthalten sind, ausführlicher entwickelt; die äussere Form, in welcher das geschehen ist und die Bezeichnungsweise, die dabei zur Anwendung kommt, sind dem Verfasser aus den Vorlesungen Leopold Kronecker's geläufig.

Bei der Revision der Druckbogen hatte sich der Verfasser der freundlichen Unterstützung des Herrn Professor Dr. Franz Meyer in Clausthal und der Beihülfe der Herren stud. Richard Fuchs und cand. W. Koch zu erfreuen; auch von dieser Stelle aus sei den genannten Herren für ihre Bemühungen der wärmste Dank ausgesprochen.

Ich kann diese Vorbemerkung nicht schliessen, ohne des Freundes zu gedenken, mit dem gemeinsam ich den Entschluss zur Herausgabe dieses Handbuches fasste, und durch dessen Hinscheiden mir ein unersetzlicher Mitarbeiter entrissen wurde. Als Paul Günther und ich im Frühjahr 1891 die Voranzeige zu diesem Werke in den „Mittheilungen" der Teubner'schen Verlagsbuchhandlung erliessen, ahnte noch Niemand, dass ein halbes Jahr später der allezeit frische und schaffensfreudige Günther nicht mehr unter den Lebenden weilen werde. Noch zu einer Zeit, wo ihn die tödtliche Krankheit schon mit aller Wucht erfasst hatte, war Günther mit Vorstudien für den ihm zufallenden Theil der Arbeit beschäftigt. Die Aufzeichnungen, die er sich in dieser Zeit gemacht hat und die mir wenige Monate nach seinem Tode durch Herrn Professor Dr. Fuchs übergeben wurden, bestehen aber fast ausschliesslich in Excerpten aus Abhandlungen von Thomé, Frobenius und Appell; ich habe nur bei Abfassung der Nummern 19 und 21 Einiges aus diesen Aufzeichnungen benutzen können. Dagegen war es mir eine wehmüthige Freude, dem Wunsche Günther's, dass ein Theil seiner Habilitationsvorlesung zu einer historischen Einleitung des Werkes verarbeitet werden sollte (vergl. die Fussnote auf S. 1), zu entsprechen. Möchte es mir gelungen sein, die Arbeit in seinem Sinne ausgeführt zu haben!

Berlin, im November 1894.

Ludwig Schlesinger.

Koehler, Dr. **Carl**, über die Integration vermittelst expliciter Funktionen derjenigen homogenen linearen Differentialgleichung $m$ter Ordnung, deren Integrale nur für unendlich grosse Werthe der Variabelen unstetig werden. [30 S.] gr. 8. 1879. geh. n. *M.* 1.—

——— über eine in der ganzen Ebene gültige Darstellung der Integrale gewisser Differentialgleichungen. [32 S.] gr. 8. 1882. geh. n. *M.* 1.—

Koenigsberger, Dr. **Leo**, ord. Prof. a. d. Univers. zu Heidelberg, allgemeine Untersuchungen aus der Theorie der Differentialgleichungen. [XII u. 246 S.] gr. 8. 1882. geh. n. *M.* 8.—

——— Lehrbuch der Theorie der Differentialgleichungen mit einer unabhängigen Variabeln. [XVI u. 486 S.] gr. 8. 1889. geh. n. *M.* 8.—

Kronecker, **Leopold**, Vorlesungen über Mathematik. Herausgegeben unter Mitwirkung einer von der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften eingesetzten Commission. In 4 Bänden. I. Band: Vorlesungen über die Theorie der einfachen und der vielfachen Integrale, herausgegeben von E. Netto. [X u. 346 S.] gr. 8. 1894. geh. n. *M.* 12.—

Lie, **Sophus**, Professor der Geometrie an der Universität Leipzig, Vorlesungen über gewöhnliche Differentialgleichungen mit bekannten infinitesimalen Transformationen. Bearb. u. herausg. von Dr. G. Scheffers. [XVI u. 568 S.] gr. 8. 1891. geh. n. *M.* 16.—

Neumann, Dr. **Carl**, ord. Professor der Mathematik an der Universität zu Leipzig, Vorlesungen über Riemann's Theorie der Abel'schen Integrale. Zweite vollständig umgearbeitete und wesentlich vermehrte Auflage. Mit zahlreichen in den Text gedruckten Holzschnitten und einer lithographirten Tafel. [XIV u. 472 S.] gr. 8. 1884. geh. n. *M.* 12.—

Pasch, Dr. **Moritz**, Professor an der Universität zu Gießen, Einleitung in die Differential- und Integral-Rechnung. [VII u. 188 S.] Mit Figuren im Text. gr. 8. 1882. geh. n. *M.* 3.20.

Pockels, **Friedrich**, über die partielle Differentialgleichung, $\triangle u + k^2 u = 0$ und deren Auftreten in der mathematischen Physik. Mit einem Vorwort von Felix Klein. Mit Figuren im Text. [XII u. 339 S.] gr. 8. 1891. geh. n. *M.* 8.—

Schlömilch, Dr. **Oscar**, Kgl. Sächs. Geheimer Rath (vorher Professor an der Kgl. Technischen Hochschule zu Dresden), Übungsbuch zum Studium der höheren Analysis. Mit Holzschnitten im Text. Zwei Theile. gr. 8. geh. n. *M.* 13.60.

Einzeln:

I. Theil. Aufgaben aus der Differentialrechnung. 4. Aufl. [VIII u. 336 S.] 1887. n. *M.* 6.—

II. — Aufgaben aus der Integralrechnung. 3. Aufl. [VIII u. 384 S.] 1882. n. *M.* 7.60.

Serret, J.-A., Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung. Mit Genehmigung des Verfassers deutsch bearbeitet von Axel Harnack, Dr. und Professor am Polytechnikum zu Dresden. Zwei Bände. Mit in den Text gedruckten Figuren. gr. 8. geh. n. ℳ 24.40.

Einzeln:

I. Band. Differentialrechnung. [X u. 567 S.] 1884. n. ℳ 10 —
II. — 1. Hälfte: Integralrechnung. [VIII u. 380 S.] 1885. n. ℳ 7.20.
II. — 2. — Differentialgleichungen. [VI u. 388 S.] 1885. n. ℳ 7.20.

Stolz, Dr. **Otto**, ord. Professor an der Universität zu Innsbruck, Grundzüge der Differential- und Integralrechnung. In 2 Theilen. I. Theil: Reelle Veränderliche und Functionen. Mit 4 Figuren im Text. [X u. 460 S.] gr. 8. 1893. geh. n. ℳ 8.—

Der II. Teil erscheint im Oktober 1895.

Wenck, Dr. **Julius**, Director der Gewerbeschule in Gotha, die Grundlehren der höheren Analysis. Ein Lehr- und Hülfsbuch für den ersten Unterricht in der Mathematik. Zum Gebrauch an Lehranstalten, sowie zum Selbstunterricht. Mit besonderer Berücksichtigung derer, die sich einem technischen Berufe widmen. Mit 140 Holzschnitten im Text. [VIII u. 432 S.] gr. 8. 1872. geh. n. ℳ 6.—

Mathematische Annalen. Begründet 1868 durch Alfred Clebsch und Carl Neumann. Unter Mitwirkung der Herren Paul Gordan, Carl Neumann, Max Noether, Karl VonderMühll, Heinrich Weber gegenwärtig herausgegeben von Felix Klein in Göttingen, Walther Dyck in München, Adolph Mayer in Leipzig. 45. Band. 1895. gr. 8. Preis für den Band von 4 Heften n. ℳ 20.—

Revue semestrielle des Publications mathématiques, rédigée sous les Auspices de la Société mathématique d'Amsterdam par P. H. Schoute (Groningen), D. J. Korteweg (Amsterdam), J. C. Kluyver (Leyden), W. Kapteyn (Utrecht), P. Zeemann (Delft). gr. 8. 3. Jahrgang. 1895. Preis für den Jahrgang von 2 Heften zu je etwa 9 Bogen n. ℳ 7.—

Zeitschrift für Mathematik und Physik. Herausgegeben unter der verantwortlichen Redaction von Dr. O. Schlömilch und Dr. M. Cantor. 40. Jahrgang. 1895. gr. 8. Preis für den Jahrgang von 6 Heften n. ℳ 18.—

Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht. Ein Organ für Methodik, Bildungsgehalt und Organisation der exakten Unterrichtsfächer an Gymnasien, Realschulen, Lehrerseminarien und gehobenen Bürgerschulen. (Zugleich Organ der Sektionen für math. und naturw. Unterricht in den Versammlungen der Philologen, Naturforscher, Seminar- und Volksschullehrer, sowie auch des Vereins zur Förderung des Unterrichts i. d. Mathematik und i. d. Naturw.) Herausgegeben von J. C. V. Hoffmann. 26. Jahrgang. 1895. gr. 8. Preis für den Jahrgang von 8 Heften. n. ℳ 12.—

— — General-Register zu Jahrg. 1—25 in Vorbereitung.

Begleitwort.

Wenn man mit dem Vortrag der Invariantentheorie geometrische Anwendungen verbindet, so muss man gewisse Kenntnisse aus der analytischen Geometrie voraussetzen, die keinen grossen Umfang haben, über die jedoch der Anfänger meist nicht, oder nicht mit hinreichender Sicherheit verfügt: Homogene Coordinaten, uneigentliche Elemente, lineare Substitution, projektive Coordinaten, Parameterdarstellung in den Grundgebilden, Dualität u. s. w. Dass der Studirende aus Büchern hierüber Belehrung schöpft, wird man häufig nicht erwarten können und alsdann dem Vortrag einen besonderen, auf die erwähnten Gegenstände bezüglichen Abschnitt einfügen müssen. Diese Gegenstände hängen mit einander eng zusammen. Bei dem Versuche, sie nach ihren Zusammenhängen zu entwickeln und die Allgemeinheit, welche die Vorstellungen allmählich gewonnen haben, zu begründen, empfindet man, dass in dieser Richtung auf dem Gebiete der analytischen Geometrie bisher weniger geschehen ist, als auf den übrigen Gebieten der Mathematik. Herr Dr. Muth hat es unternommen, diese Lücke durch eine wohlumgrenzte kleine Schrift auszufüllen. Er hat es sich zur Aufgabe gemacht, den Leser auf eine Reihe von Fragen, welche für ein klares Verständniss der modernen analytischen Geometrie wichtig sind, hinzuweisen und ihm darüber Aufschluss zu geben. Der Inhalt des Buches bereitet daher nicht bloss für die geometrische Anwendung der Invariantentheorie vor, sondern er ist auch geeignet, als selbständiger Stoff reifere Leser zu beschäftigen.

Giessen, 12. September 1894.

M. Pasch.

Inhaltsverzeichniss.

Berichte

über die

Verhandlungen der mathematisch-physischen Classe

der

Kgl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften

zu Leipzig.

1894.

Heft I.

Inhalt:

Druck von Breitkopf & Härtel in Leipzig.

Berichte

über die

Verhandlungen der mathematisch-physischen Classe

der

Kgl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften

zu Leipzig.

1894.

Heft II.

Inhalt:

Druck von Breitkopf & Härtel in Leipzig.

LEHRBUCH

DER

EXPERIMENTALPHYSIK

VON

ADOLPH WÜLLNER.

ERSTER BAND.

ALLGEMEINE PHYSIK UND AKUSTIK.

FÜNFTE VIELFACH UMGEARBEITETE UND VERBESSERTE AUFLAGE.

MIT 321 IN DEN TEXT GEDRUCKTEN ABBILDUNGEN UND FIGUREN.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1895.

Vorwort.

Indem mein Lehrbuch der Experimentalphysik jetzt zum fünftenmal erscheint, habe ich betreffs der Haltung desselben nur zu bemerken, dafs dieselbe ganz die frühere ist; das Buch soll unter dem steten Hinweis auf die Originalarbeiten eine Übersicht geben über den augenblicklichen Stand der experimentellen Physik und über die theoretischen Auffassungen, zu denen die Physik zur Zeit gelangt ist.

Der Schwerpunkt des Werkes liegt demnach in den Experimentaluntersuchungen, und ich habe mich bemüht alle wichtigern neuern Errungenschaften auf unserm Gebiete einzufügen. Vielleicht scheine ich an einzelnen Stellen zu weit gegangen zu sein; indes habe ich erwogen, dafs auch manches scheinbar noch nicht ganz fertige Aufnahme finden sollte, da man noch nicht weifs, wohin es führt. Beispiele dafür, dafs es längere Zeit gedauert hat, ehe Arbeiten in ihrer ganzen Bedeutung erkannt worden sind, bietet uns die Geschichte unserer Wissenschaft an mehreren Stellen.

In der Entwicklung der Theorien bin ich soweit gegangen, als es ohne zu ausgedehnte Rechnungen möglich ist; aufser den neuern Theorien habe ich auch schon früher entwickelte gebracht, wenn sie durch neuere Versuche bestätigt sind. So ist Boltzmanns Theorie der innern Reibung der festen Körper besprochen, und an Stelle der Meyerschen Theorie der Gasdiffusion die Stephansche gesetzt.

Die Anordnung des Stoffes weicht in der neuen Auflage von der frühern insoweit ab, als die Lehre vom Lichte bezw. von der Strahlung an das Ende gesetzt ist; als zweiter Band erscheint die Wärmelehre, als dritter die Elektricitätslehre. Durch die Hertzschen Versuche ist die Faraday-Maxwellsche Auffassung der elektrischen Erscheinungen bestätigt worden; um in die Lehre vom Licht die elektromagnetische Lichttheorie einfügen zu können, mufste die Lehre von der Elektricität vorausgehen.

Die neue Auflage des zweiten Bandes befindet sich schon unter der Presse, dem sich der dritte und vierte Band baldigst anschliefsen sollen.

Die Litteratur ist im ersten Bande bis Ende 1892, im zweiten bis Ende 1893, im dritten wird sie bis Ende 1894, im vierten bis Ende 1895 berücksichtigt.

Aachen, den 18. September 1894.

A. Wüllner.

Inhaltsverzeichnis
zum ersten Bande der Experimentalphysik.

Allgemeine Physik und Akustik.

Einleitung.

Erster Teil.
Die Lehre vom Gleichgewicht und der Bewegung der Körper.

Erster Abschnitt.
Die Lehre vom Gleichgewicht und der Bewegung der Körper als solcher.

I. Von der fortschreitenden Bewegung.

II. Von der drehenden Bewegung.

III. Von der allgemeinen Gravitation.

Zweiter Abschnitt.

Von dem Gleichgewicht und der Bewegung der Körper in ihren einzelnen Teilen.

I. Von den festen Körpern.

II. Von den tropfbar flüssigen Körpern.

III. Von den gasförmigen Körpern.

Dritter Abschnitt.

Von der Wellenbewegung.

I. Theoretische Prinzipien der Wellenbewegung.

II. Von der Wellenbewegung fester Körper.

III. Wellenbewegung flüssiger und gasförmiger Körper.

Vierter Abschnitt.

Vom Schalle.

I. Von der Erregung des Schalles.

II. Von der Ausbreitung und Wahrnehmung des Schalles.

Veröffentlichungen der Deutschen Mathematiker-Vereinigung.

I. Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. Herausgegeben im Auftrage des Vorstandes von G. Cantor, W. Dyck, E. Lampe. Berlin, Verlag von Georg Reimer.

1. Band, 1890—91. IV u. 292 S. (1892). **M. 7.60*).**
2. Band, 1892. IV u. 156 S. (1893). **M. 4.50*).**
3. Band, 1893. IV u. 602 S. (1894). **M. 16.—*).**

Inhalt des ersten Bandes:

Chronik der Vereinigung. Nekrologe auf B. Klein und P. Günther.

Bericht über die Versammlung zu Halle (22.—26. Sept. 1891) enthaltend die Referate von Kronecker, C. Neumann, Dedekind, F. Klein, Papperitz, Simon, Finsterwalder, Rohn, H. Wiener, Schubert, Eberhard, Boltzmann, Hensel, F. Müller, Dyck, Hilbert, Schönflies, Minkowski, F. Kötter, Piltz, Stäckel, Wangerin, Wiltheiss, G. Cantor. — Bericht über den gegenwärtigen Stand der Invariantentheorie von F. Meyer in Clausthal.

Inhalt des zweiten Bandes:

Chronik der Vereinigung. Nekrologe auf L. Kronecker (von H. Weber), H. Schröter (von Sturm), H. Gretschel (von Papperitz), J. Gierster (von Fricke).

Bericht über die für die Versammlung in Nürnberg bestimmten Vorträge von Bjerknes, Fricke, F. Klein, F. Meyer, Schapira, Schlegel, Schumacher, Study.

Referat: Die Entwicklung der Lehre vom Erddruck, von F. Kötter in Berlin.

Inhalt des dritten Bandes:

Chronik der Vereinigung. Nekrolog auf E. E. Kummer (von E. Lampe).

Bericht über die Versammlung zu München 1893, enthaltend die Referate über die Vorträge von Dyck, Haas, Hilbert, Mehmke, Bjerknes, Joukowsky, H. Wiener, M. Simon, Pringsheim, Brunn, Bauschinger, Freyberg, von Lommel, Schapira, Fricke, Döhlemann, Burkhardt, Schapira, Lampe.

Referat: Ueber die Entwicklung der Theorie der algebraischen Functionen in älterer und neuerer Zeit, von Brill und Noether.

Referat: Ueber Entwicklung und Hauptaufgaben der Theorie der einfachen Fachwerke, von Henneberg.

---

*) Für die Mitglieder der Deutschen Mathematiker-Vereinigung ermässigt sich bei directem Bezug durch die Verlagsbuchhandlung von Georg Reimer (Berlin S. W. Anhaltstrasse 12) der Preis auf **M. 6** für Bd. 1, auf **M. 3.55** für Bd. 2, auf **M. 12.50** für Bd. 3 (incl. Porto).

Direct durch Vermittelung des Schriftführers der Vereinigung, Professor Dr. W. Dyck, München, Polytechnikum, zu beziehen sind:

II. Katalog mathematischer Modelle, Apparate und Instrumente. Unter Mitwirkung zahlreicher Fachgenossen herausgegeben im Auftrage des Vorstandes der Vereinigung von W. Dyck. München, 1892, XVI u. 430 S. **M. 9*).**

Inhalt:

1. Teil. Einleitende wissenschaftliche Aufsätze von F. Klein, A. Voss, A. Brill, G. Hauck, A. v. Braunmühl, L. Boltzmann, A. Amsler, O. Henrici.

2. Teil. Beschreibungen zu den Modellen etc. I. Arithmetik, Algebra, Functionentheorie, Integralrechnung. II. Geometrie. III. Angewandte Mathematik.

IIa. Nachtrag zum Katalog Mathematischer Modelle, Apparate und Instrumente. München 1893. X u. 136 S. **M. 3**).**

Inhaltlich den entsprechenden Abschnitten des Hauptkataloges angegliedert.

III. Verzeichnis der seit 1850 an den deutschen Universitäten erschienenen Doctor-Dissertationen und Habilitationsschriften aus der reinen und angewandten Mathematik. Herausgegeben auf Grund des für die Universitäts-Ausstellung in Chicago erschienenen Verzeichnisses. München 1892. **M. 1.50***).**

Das vorliegende Verzeichnis wurde ursprünglich für den Specialkatalog der Mathematischen Ausstellung, welche als Glied der Deutschen Universitäts-Ausstellung in Chicago von Seiten des Königl. Preussischen Unterrichts-Ministeriums ins Leben gerufen wurde, zusammengestellt. Da das Verzeichnis indes auch für weitere Kreise von Interesse sein dürfte, hat der Vorstand der Deutschen Mathematiker-Vereinigung mit Genehmigung der K. Pr. Staatsregierung die vorliegende Separatausgabe besorgt: dabei hat es das dankenswerte Entgegenkommen der einzelnen Universitätsbibliotheken ermöglicht, die im ursprünglichen Verzeichnis vorhandenen zahlreichen Lücken zu ergänzen.

IV. Sieben photographische Aufnahmen aus der Mathematischen Ausstellung in München 1893. In Lichtdruck reproducirt. Incl. Porto **M. 3.50.**

---

*) Hierzu kommen noch 50 Pf. für Portoauslagen im Inland, 80 Pf. im Ausland.

Für Mitglieder der Vereinigung ermässigt sich der Bezugspreis excl. Porto von M. 9 auf **M. 5.**

**) Hierzu kommen noch 20 Pf. bez. 40 Pf. für Portoauslagen im Inland bez. Ausland.

Für Mitglieder der Vereinigung ermässigt sich der Bezugspreis excl. Porto von M. 3 auf **M. 2.**

***) Hierzu kommen noch 10 Pf. für Portoauslagen im Inland, 20 Pf. im Ausland.

Für Mitglieder der Vereinigung ermässigt sich der Bezugspreis excl. Porto von M. 1.50 auf **M. 1.**